Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Х. К. Каршибоев, Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:56:55

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

А. А. ДЖАЛИЛОВ, Х. К. КАРШИБОВЕВ

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности, задаваемые функциями с одной точкой излома, в которой происходит скачок первой производной. Пусть $f(x)$ – непрерывная строго монотонная функция такая, что

- a) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$;
- b) существует точка $x_c \in S^1 = [0, 1)$ такая, что $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([x_c, x_c+1])$ при некотором $\varepsilon > 0$, $f'(x) > \text{const} > 0$ для всех $x \in (x_c, x_c+1)$;
- c) существуют конечные положительные односторонние производные $f'_-(x_c)$, $f'_+(x_c)$ и $\sqrt{f'(x_c-0)/f'(x_c+0)} = c \neq 1$.

Определим гомеоморфизм окружности T , отвечающий f : $Tx = \{f(x)\}$, $x \in S^1$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Пусть число вращения $\rho = \rho(T)$ иррационально и его разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, $n \geq 1$, конечные дроби числа ρ . Числа q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям: $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$, $q_0 = 1$, $q_1 = k_1$. Обозначим $x_0 = x_c$ и $x_i = T^i x_0$, $i \geq 1$, где T^i обозначает i -ю итерацию T . Обозначим через $\Delta_0^{(n)}$ замкнутый отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n} . Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при четном n – справа. Положим $\Delta_i^{(n)} = T^i \Delta_0^{(n)}$, $i \geq 1$. Системы интервалов $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i < q_n$, и $\Delta_j^{(n)}$, $0 \leq j < q_{n-1}$, попарно не пересекаются (за исключением концевых точек) и образуют разбиение окружности (см. [1]). Полученное разбиение обозначим через ξ_n . Опишем процесс перехода от ξ_{n-1} к ξ_n . Все отрезки $\Delta_j^{(n)}$, $0 \leq j < q_{n-1}$, сохраняются, а каждой отрезок $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i < q_n$, разбивается на $k_{n+1} + 1$ отрезков: $\Delta_i^{(n-1)} = \Delta_i^{(n+1)} \cup \bigcup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+s q_n}^{(n)}$.

ЛЕММА 1. Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T удовлетворяет условиям (a)–(c) и число вращения ρ иррационально. Тогда для любого $\Delta^{(n)} \in \xi_n$ справедливо неравенство $|\Delta^{(n)}| \leq \text{const} \cdot \lambda^n$, где $|\cdot|$ обозначает длину отрезка, а константа $\lambda \in (0, 1)$.

Обозначим через V_n отрезок, соединяющий точки $x_{q_{n-1}}$ и x_{q_n} . Обозначим через $N_n^{(k)}$ момент k -го попадания точки x в V_n . Для каждого $k \geq 1$ определим $D_n^{(k)}(x) = N_n^{(k+1)}(x) - N_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, $N_n^{(0)}(x) \equiv 0$. Заметим, что $N_n^{(1)}(x)$ принимает значения от 1 до q_n , а $D_n^{(k)}(x)$, $k > 1$, принимает всего два значения: q_{n-1} и q_n . Определим следующие нормированные случайные величины: $\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_n^{-1} D_n^{(k)}(x)$, $k \geq 1$.

Поскольку число вращения ρ иррационально, отображение T обладает единственной нормированной инвариантной мерой μ . Обозначим через λ меру Лебега на окружности. Обозначим $A_n^{(k)}(t) = \{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \leq t\}$. Рассмотрим функции распределения случайных величин $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно мер μ и λ , т.е. $F_n^{(k)}(t) = \mu(A_n^{(k)}(t))$, $\Phi_n^{(k)}(t) = \lambda(A_n^{(k)}(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$.

Заметим, что функции $F_n^{(k)}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота $T_\rho x = \{x + \rho\}$, $x \in S^1$. В работе [2] доказано, что предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_s}^{(1)}(t)\}$, в зависимости от числа вращения ρ , является или равномерным распределением, или непрерывным кусочно-линейным распределением на $[0, 1]$. При $k > 1$ предел подпоследовательности $\{F_{n_s}^{(k)}(t)\}$ является или распределением для случайной величины $X \equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

Если диффеоморфизм гладко сопряжен с линейным поворотом T_ρ , то для последовательности $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F_n^{(k)}(t)\}$, также справедливы [2].

Заметим, что для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и с иррациональным числом вращения сопряжение является сингулярным [3].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T удовлетворяет условиям а)–с), а число вращения ρ иррационально и его коэффициенты разложения в непрерывную дробь ограничены. Пусть подпоследовательность функций распределения $\{\Phi_{n_s}^{(1)}(t)\}$ сходится поточечно на $\mathbb{R}^1$ к функции распределения $\Phi^{(1)}(t)$. Тогда предельная функция $\Phi^{(1)}(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}^1$ и сингулярна на $[0, 1]$, т.е. $\frac{d}{dt}\Phi^{(1)}(t) = 0$ почти всюду.*

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T и число вращения ρ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть $k > 1$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_{n_s}^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$. Тогда функция распределения $\Phi^{(k)}(t)$ является ступенчатой функцией с двумя точками разрыва из $(0, 1)$.*

Теперь приведем примеры гомеоморфизмов окружности, для которых последовательность $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}_{n=1}^\infty$ при каждом $k \geq 1$ сходится. Рассмотрим множество X , состоящее из пар непрерывных строго возрастающих функций $(f(x), x \in [-1, 0]; g(x), x \in [0, \alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f(0) = \alpha$, $\alpha > 0$, $g(0) = -1$, $f(\alpha) = g(1)$; 2) $f(-1) < 0, \dots, f^{(m)}(-1) < 0$, $f^{(m+1)}(-1) > 0$, где $f^{(k)}$ обозначает k -ю итерацию функции $f(x)$. Используя пару (f, g) из X , можно построить гомеоморфизм окружности: $Tx = f(x)$, если $x \in [-1, 0)$, и $Tx = g(x)$, если $x \in [0, \alpha)$. Обозначим $\rho_m = [m+1, m, \dots, m, \dots]$, $m \geq 1$. Обозначим через X_m подмножество X , состоящее из таких пар (f, g) , что число вращения соответствующего гомеоморфизма равно иррациональному числу ρ_m . На X_m определим ренормгрупповое преобразование:

$$R_m(f(x), -1 \leq x < 0; g(x), 0 \leq x < \alpha) = (\tilde{f}(x), -1 \leq x < 0; \tilde{g}(x), 0 \leq x < \tilde{\alpha}),$$

где $\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1}f^m(g(-\alpha x))$, $\tilde{g}(x) = -\alpha^{-1}f(-\alpha x)$, $\tilde{\alpha} = -\alpha^{-1}f^k(-1)$. Положим $c = \frac{f'_-(0)}{g'_+(0)}$. В [4] доказано, что при фиксированном c , $c \neq 1$, преобразование R_m имеет единственную периодическую траекторию $\{(f_i, g_i), i = 1, 2\}$ периода 2. Функции $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2$, являются дробно-линейными. Обозначим через T_1 гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha_1]$, соответствующий паре (f_1, g_1) (пара (f_2, g_2) изучается аналогично). Множество всех гомеоморфизмов, C^1 -сопряженных с T_1 , обозначим $B(T_1)$. Учитывая, что (f_1, g_1) является периодической точкой R_1 , можно построить термодинамический формализм для всех гомеоморфизмов множества $B(T_1)$ [5].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $T \in B(T_1)$. Тогда соответствующая последовательность функций распределения $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ при каждом $k \geq 1$ сходится поточечно на $\mathbb{R}^1$ к функции распределения $\Phi^{(k)}(t)$.*

Авторы признательны Я. Г. Синаю за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Я. Г. Синай. Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.
 [2] Z. Coelho, E. de Faria // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 93–112. [3] А. А. Джалилов, К. М. Ханин // Функц. анализ и его прил. 1998. Т. 32. №3. С. 11–21. [4] К. М. Khanin, E. B. Vul // Adv. Soviet Math. 1991. V. 3. P. 57–98. [5] А. А. Джалилов // ТМФ. 2003. Т. 134. №2. С. 190–206.