Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками и уравнения ассоциативности, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:34:30

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С ПЛОСКИМИ
МЕТРИКАМИ И УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ**

О. И. Мохов

Мы решаем задачу описания всех нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками. Доказано, что в ряде важных случаев такие гамильтоновы операторы описываются уравнениями ассоциативности и тесно связаны с теорией фробениусовых многообразий. Напомним, что в [1] Е.В. Ферапонтов ввел и изучил общие нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа, а именно, гамильтоновы операторы вида

$$P^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \sum_{n=1}^L \varepsilon^n (w_n)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w_n)_s^j(u(x)) u_x^s, \quad (1)$$

где $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, $\varepsilon^n = \pm 1$, $(u^1, \dots, u^N)$ – локальные координаты, $u^i(x)$ – полевые функции. В [1] доказано, что оператор (1) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда 1) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита), 2) метрика $g^{ij}(u)$ и аффиноры $(w_n)_j^i(u)$, $1 \leq n \leq L$, удовлетворяют следующим соотношениям: $g_{ik}(u)(w_n)_j^k(u) = g_{jk}(u)(w_n)_i^k(u)$, $\nabla_k(w_n)_j^i(u) = \nabla_j(w_n)_k^i(u)$, где ковариантная производная определяется связностью Леви-Чивита метрики $g^{ij}(u)$, $R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{n=1}^L \varepsilon^n ((w_n)_l^i(u)(w_n)_k^j(u) - (w_n)_l^j(u)(w_n)_k^i(u))$, где $R_{kl}^{ij}(u)$ – тензор римановой кривизны метрики $g^{ij}(u)$, и, кроме того, семейство аффиноров $w_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, – коммутативное: $[w_n, w_m] = 0$.

Рассмотрим важный специальный случай, когда метрика $g^{ij}(u)$ – плоская. Напомним, что любая плоская метрика определяет однозначно локальный гамильтонов оператор гидродинамического типа (оператор вида (1) с нулевыми аффинорами) – гамильтонов оператор Дубровина–Новикова [2]. Но мы доказываем, что имеется и богатый класс нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками, причем имеющих важные приложения в теории фробениусовых многообразий и интегрируемых иерархий. Вид гамильтонова оператора (1) инвариантен относительно локальных замен координат, при этом все коэффициенты оператора преобразуются как соответствующие дифференциально-геометрические объекты. Так как метрика плоская, то существуют локальные координаты, в которых метрика приводится к постоянному диагональному виду $\epsilon^i \delta^{ij}$, $\epsilon^i = \pm 1$. В этих локальных координатах все коэффициенты связности Леви-Чивита равны нулю и гамильтонов оператор имеет вид:

$$\tilde{P}^{ij} = \epsilon^i \delta^{ij} \frac{d}{dx} + \sum_{n=1}^L \varepsilon^n (\tilde{w}_n)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (\tilde{w}_n)_s^j(u(x)) u_x^s. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. *Оператор (2) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда существуют функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что*

$$(\tilde{w}_n)_j^i(u) = \epsilon^i \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^i \partial u^j}, \quad (3)$$

причем выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^L \epsilon^n \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial u^i \partial u^n} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^n \partial u^l} = \sum_{n=1}^L \epsilon^n \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^i \partial u^n} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial u^n \partial u^l}, \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^L \epsilon^n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^k \partial u^l} = \sum_{n=1}^L \epsilon^n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^l}. \quad (5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант № 03-01-00782), программы поддержки ведущих научных школ (грант № 2185.2003.1) и INTAS (грант № 99-1782).

Соотношения (4) и (5) хотя и существенно различаются, но похожи, и особенно интересен случай редукции, при которой соотношения (4) и (5) просто совпадают.

СЛЕДСТВИЕ. В частности, если $L = N$, $\epsilon^n = \varepsilon^n$ для всех n (или, например, $\epsilon^n = -\varepsilon^n$ для всех n) и существует функция $\Phi(u)$ такая, что $\psi_n = \partial\Phi/\partial u^n$ для всех n , то оба соотношения (4) и (5) совпадают с уравнениями ассоциативности двумерной топологической теории поля для потенциала $\Phi(u)$:

$$\sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^n} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^k \partial u^l} = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^k \partial u^n} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^j \partial u^l}. \quad (6)$$

Таким образом, любое решение уравнений ассоциативности (6), которые, как известно, совместны, интегрируемы методом обратной задачи рассеяния и обладают богатым множеством решений (см. [3]), определяет нелокальный гамильтонов оператор гидродинамического типа с плоской метрикой:

$$L^{ij} = \epsilon^i \delta^{ij} \frac{d}{dx} + \sum_{n=1}^N \epsilon^n \epsilon^i \epsilon^j \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^n \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^j \partial u^n \partial u^s} u_x^s, \quad (7)$$

и, более того, определяет пучок согласованных гамильтоновых операторов:

$$L_{\lambda, \mu}^{ij} = \lambda \epsilon^i \delta^{ij} \frac{d}{dx} + \mu \sum_{n=1}^N \epsilon^n \epsilon^i \epsilon^j \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^n \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^j \partial u^n \partial u^s} u_x^s, \quad (8)$$

где λ и μ – произвольные константы.

Аналогичное утверждение верно для любой постоянной метрики η^{ij} у оператора. Эта метрика всегда определяет инвариантную билинейную форму на соответствующих фробениусовых алгебрах. Таким образом, в частности, с каждым фробениусовым многообразием связаны нелокальные гамильтоновы операторы вида (7) и пучки (8). Кроме того, верно и в некотором смысле обратное утверждение, а именно, если все аффиноры w_n нелокального гамильтонова оператора (1) определяются произвольным решением $\Phi(u)$ уравнений ассоциативности (6) по формуле

$$(w_n)_j^i(u) = \epsilon^n \eta^{is} \xi_j^r \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^s \partial u^r},$$

где $\epsilon^n = \pm 1$, η^{is} , ξ_j^r – произвольные невырожденные постоянные матрицы, то метрика этого гамильтонова оператора обязательно является плоской. Структурные потоки (см. [1], [4]) нелокального гамильтонова оператора (7) имеют вид

$$u_{t_n}^i = \epsilon^i \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^n \partial u^k} u_x^k \quad (9)$$

и являются интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа. Условие коммутации структурных потоков (7) эквивалентно опять же уравнению ассоциативности (6).

Дальнейшие результаты, связанные с нелокальными гамильтоновыми операторами гидродинамического типа с плоскими метриками, фробениусовыми многообразиями, уравнениями ассоциативности и соответствующими интегрируемыми иерархиями, будут опубликованы в другой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Ферапонтов // Функци. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49. [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785. [3] B. Dubrovin // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018 (1994). [4] A. Ya. Maltsev, S. P. Novikov // Phys. D. 2001. V. 156. № 1–2. P. 53–80; nlin.SI/0006030 (2000).

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Принято редколлегией
24.11.2003