Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Фрейдлин, Гомогенизация диффузионных процессов в трубчатых областях, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:03:06

Гомогенизация диффузионных процессов в трубчатых областях

М. И. Фрейдлин

Рассмотрим область $D^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, представляющую собой трубку вокруг оси x , с переменным сечением $D^\varepsilon = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^1, \varepsilon^{-1}y \in D_x\}$. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$, сечение D_x есть ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, содержащая начало координат. Предполагается, что область $D^1 = D^\varepsilon|_{\varepsilon=1}$ имеет достаточно гладкую границу ∂D^1 и нормаль к ∂D^1 никогда не параллельна оси x .

Обозначим $Z_t^\varepsilon = (X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$ винеровский процесс в D^ε с нормальным отражением на границе. Его траектории можно описать уравнениями

$$dX_t^\varepsilon = dW_t^1 + \gamma_1^\varepsilon(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dl_t^\varepsilon, \quad dY_t^\varepsilon = dW_t^2 + \gamma_2^\varepsilon(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) dl_t^\varepsilon, \quad (1)$$

где W_t^1 и W_t^2 – независимые одномерный и двумерный винеровские процессы соответственно; l_t^ε – локальное время на ∂D^ε ; $\gamma_1^\varepsilon(x, y)$ и $\gamma_2^\varepsilon(x, y)$ – проекции единичного вектора внутренней нормали на ось x и на плоскость (y_1, y_2) соответственно.

В этой работе мы изучаем поведение компоненты X_t^ε процесса Z_t^ε при $\varepsilon \ll 1$ и $t \gg 1$, когда область D^ε в том или ином смысле однородна по x . Можно ожидать, что в этом случае x -компонента процесса Z_t^ε хорошо аппроксимируется процессом с постоянным коэффициентом диффузии и нулевым сносом. Мы вычисляем этот коэффициент явно. Мы рассматриваем также уравнение реакции-диффузии в области D^ε .

Обозначим $S(x)$ площадь сечения D_x .

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $S(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, есть эргодический стационарный процесс. Тогда случайный процесс $\tilde{X}_t^{\varepsilon, \delta} = \delta X_{t/\delta^2}^\varepsilon$ сходится слабо в пространстве непрерывных функций $C[0, T]$ на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, к процессу σW_t , где W_t – одномерный винеровский процесс и $\sigma = \left(\mathbb{E} S(x) \mathbb{E} \frac{1}{S(x)} \right)^{-1/2}$, если сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $\delta \rightarrow 0$ ($\mathbb{E}$ – знак математического ожидания).*

Если функция $S(x)$ периодична, $S(x) \equiv S(x+1)$, то $\tilde{X}_t^{\varepsilon, \delta}$ сходится слабо в $C[0, T]$, когда сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $\delta \rightarrow 0$, к процессу $\tilde{\sigma} W_t$, где

$$\tilde{\sigma} = \left(\int_0^1 S(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{S(x)} \right)^{-1/2}.$$

Доказательство этой теоремы состоит из двух частей. Сначала мы показываем, что при $\varepsilon \downarrow 0$ процессы X_t^ε на любом конечном отрезке $[0, T]$ слабо сходятся к одномерному диффузионному процессу X_t , соответствующему оператору $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{S'(x)}{S(x)} \frac{d}{dx}$. Этот результат (ср. с [1; гл. 7]) представляет собой вариант принципа усреднения. Чтобы доказать сходимость X_t^ε к X_t , рассмотрим вспомогательную функцию $v(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^2$, которая есть решение следующей задачи в области $D_x \subset \mathbb{R}^2$, x – параметр:

$$\frac{1}{2} \Delta_y v(x, y) = A(x), \quad y \in D_x, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D_x} = \frac{\gamma_1^1(x, y)}{\gamma_2^1(x, y)}, \quad (2)$$

где $n = n(x, y)$ – вектор внутренней нормали к ∂D_x в плоскости сечения D_x , $\gamma_i^1(x, y)$, $i = 1, 2$, – значение $\gamma_i^\varepsilon(x, y)$ для $\varepsilon = 1$. Для всякого $x \in \mathbb{R}^1$ задача (2) разрешима, только если

$$A(x) = -\frac{1}{S(x)} \oint_{\partial D_x} \frac{\gamma_1^1}{|\gamma_2^1|} dl, \quad dl - \text{элемент длины на } \partial D_x.$$

Решение задачи (2) единственно с точностью до аддитивной функции $c = c(x)$. Эту функцию $c(x)$ можно выбрать так, что решение $v(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in D_x \subset \mathbb{R}^2$, задачи (2) будет иметь непрерывные вторые производные по x и y . Применяя формулу

Ито к функции $v(X_t^\varepsilon, \varepsilon^{-1}Y_t^\varepsilon)$, где $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$ – решение задачи (1), и принимая во внимание, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}\gamma_1^\varepsilon = \gamma_1$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\gamma_2^\varepsilon| = 1$, нетрудно заключить, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} |X_t^\varepsilon - \tilde{X}_t| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

по вероятности, где $\tilde{X}_t$ – решение уравнения

$$d\tilde{X}_t = dW_t^1 + \frac{1}{2}A(\tilde{X}_t), \quad \tilde{X}_0 = X_0^\varepsilon = x.$$

Так как $\oint_{\partial D_x} \gamma_1^1(x, y) dl = S'(x)$, мы заключаем, что процесс $\tilde{X}_t$ управляется оператором L .

Сходимость процесса $\delta\tilde{X}_{t/\delta^2}$ к σW_t есть результат гомогенизации. Здесь можно воспользоваться условиями, обеспечивающими слабую сходимость процессов, приведенными в [2].

Рассмотрим теперь задачу о движении волнового фронта в уравнении реакции-диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\varepsilon(t, x, y)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\Delta u + f(u), \quad t > 0, \quad (x, y) \in D^\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n^\varepsilon} \Big|_{\partial D^\varepsilon} &= 0, \quad u^\varepsilon(0, x, y) = \chi_-(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Предполагается, что $f(u) = c(u)u$ удовлетворяет условиям Колмогорова–Петровского–Пискунова: $c(u) > 0$ при $u \in (0, 1)$, $c(1) = 0$, $c(0) = c = \max_{u \in [0, 1]} c(u)$, $c(u)$ удовлетворяет условию Липшица.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функция $S(x)$ периодична с периодом 1. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi''(x) + \frac{1}{2}\frac{S'(x)}{S(x)}\varphi'(x) - z\varphi'(x) + \left(c + \frac{1}{2}\frac{S'(x)}{S(x)}z + \frac{z^2}{2}\right)\varphi(x) &= \lambda(z)\varphi(x), \\ \varphi(x) &\equiv \varphi(x+1), \quad z \in \mathbb{R}^1 - \text{параметр}. \end{aligned}$$

Для каждого $z \in \mathbb{R}^1$ эта задача имеет однократное собственное значение $\lambda = \lambda(z)$, соответствующее положительной собственной функции. Функция $\lambda(z)$ непрерывно дифференцируема и выпукла. Обозначим $H(y)$ ее преобразование Лежандра: $H(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^1} (yz - \lambda(z))$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, ty) = \begin{cases} 0, & \text{если } H(y) > 0, \\ 1, & \text{если } H(y) < 0. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы основано на слабой сходимости X_t^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, которая используется в предыдущей теореме, и на результатах [3; § 7.3].

Список литературы

- [1] M. Freidlin, *Markov processes and differential equations: asymptotic problems*, Lectures Math. ETH Zurich, Basel, Birkhäuser, 1996. [2] M. Freidlin, A. Wentzell, *The Dynkin Festschrift*, Progr. Probab., **34**, ed. M. Freidlin, Boston, MA, Birkhäuser, 1994, 95–109. [3] M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations*, Ann. of Math. Stud., **109**, Princeton Univ. Press., Princeton, 1985.

М. И. Фрейдлин (M. I. Freidlin)
University of Maryland, USA
E-mail: mif@math.umd.edu

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
16.03.2007