Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, Предельное поведение больших чисел Фробениуса, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 77–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:19:49

УДК 517.987.5

Посвящается В. И. Арнольду
по случаю его семидесятилетия

Предельное поведение больших чисел Фробениуса

Ж. Бургейн, Я. Г. Синай

В работе рассматривается задача об асимптотическом распределении чисел Фробениуса для n взаимно простых чисел. Для $n = 3$ получены практически окончательные результаты. Для $n > 3$ показано, что возникающие распределения образуют компактное множество. Существенную роль играет предельная теорема для логарифмов знаменателей цепных дробей случайных чисел.

Библиография: 6 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	77
§ 2. Случай $n = 3$ и $\text{нод}(a_i, a_j) = 1$ для некоторых a_i, a_j	79
§ 3. Случай $n = 3$ и произвольных $b_{ij} = \text{нод}(a_i, a_j)$	82
§ 4. Случай $n > 3$	83
Приложение	87
Список литературы	90

§ 1. Введение

Рассмотрим наборы $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из n положительных целых чисел, являющихся взаимно простыми, т. е. таких, что наибольший общий делитель (нод) всех a_j равен 1. Числом Фробениуса $F(a)$ набора a называется наименьшее F такое, что любое целое $t \geq F$ может быть записано в виде

$$t = \sum_{j=1}^n x_j a_j$$

с неотрицательными целыми x_j . В. И. Арнольд в [1] ввел ансамбль наборов a , для которых $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sigma$ стремится к бесконечности, и изучил поведение $F(a)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. В частности, он сформулировал гипотезу, согласно

Второй автор благодарит за финансовую поддержку фонд NSF (грант № 0600996).

которой для типичных a $F(a)$ растет как $\sigma^{1+\frac{1}{n-1}}$. Другие гипотезы и результаты Арнольда могут быть найдены в [2].

В этой работе мы рассматриваем другие ансамбли больших a и изучаем тот же вопрос о росте $F(a)$ в этих ансамблях. А именно, фиксируем N и обозначим через Ω_N множество всех a , для которых $1 \leq a_j \leq N$, $j = 1, 2, \dots, n$, и $\text{нод}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Используя элементарные вероятностные методы, легко показать, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} |\Omega_N|$ существует и положителен (см., например, [3]). Тем самым задается “вероятность” набора $a \in \Omega_N$ в ансамбле всевозможных наборов a из n чисел, не превосходящих N . Ниже через P_N обозначается равномерное распределение вероятностей на Ω_N . Мы изучаем в этой работе поведение $F(a)$ для типичных a (в смысле P_N) при $N \rightarrow \infty$. Случай $n = 2$ легко следует из знаменитого результата Сильвестра о том, что $F(a) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$ (см. [4]). Из него вытекает, что $\frac{1}{N^2} F(a)$ имеет предельное распределение при $N \rightarrow \infty$.

Ниже в §2 и §3 мы рассматриваем случай $n = 3$. Основываясь на некоторых фактах из теории цепных дробей, мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *При $N \rightarrow \infty$ существует предельное распределение величины $\frac{1}{N^{3/2}} F(a)$.*

Доказательство необходимых фактов содержится в статье К. Ульчирай и одного из нас (Я. Синай) [5]. Безнадежно пытаться выписать явно предельное распределение в теореме 1. Вероятно, методы этой работы могут быть использованы для оценки его убывания на бесконечности.

Ниже мы определяем другую функцию $F_1(a)$, для которой доказываем лемму 1, показывающую, что в типичных ситуациях эта функция ведет себя так же, как $F(a)$. Но $F_1(a)$ намного легче для анализа, так как для нее основная проблема формулируется как “max-min”-проблема.

В §2 мы обсуждаем случай $n = 3$ при дополнительном условии, что $\text{нод}(a_i, a_j)$ равен единице по крайней мере для одной пары a_i, a_j . В §3 мы рассматриваем общий случай.

В §4 мы рассматриваем случай $n > 3$. Теорема 2 этого параграфа показывает, что в модифицированных ансамблях величины $\frac{F(a)}{N^{1+\frac{1}{n-1}}}$ ограничены (равномерно по N) в том смысле, что

$$P_{N,\alpha} \left\{ \frac{F(a)}{N^{1+\frac{1}{n-1}}} \geq \mathcal{D} \right\} \leq \varepsilon(\mathcal{D}),$$

где $\Omega_{N,\alpha}$ – ансамбль таких a , для которых $a_j \geq \alpha N$, $1 \leq j \leq n$, и $P_{N,\alpha}$ – равномерное распределение в этом ансамбле, $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число, $\varepsilon(\mathcal{D})$ не зависит от N , $\varepsilon(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ при $\mathcal{D} \rightarrow \infty$. В приложении мы доказываем лемму, которая использовалась в более ранней версии этой работы и может иметь различные применения. Именно, мы показываем, что

$$\ell \left\{ \alpha : \sum_{m=1}^M \frac{1}{|e^{2\pi i m \alpha} - 1|} \geq \mathcal{D} M \ln M \right\} \leq \varepsilon_1(\mathcal{D}),$$

где ℓ – мера Лебега на $[0, 1]$, $\varepsilon_1(\mathcal{D})$ не зависит от M , $\varepsilon_1(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ при $\mathcal{D} \rightarrow \infty$.

Анализ поведения выражения $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{e^{2\pi i m \alpha} - 1}$ как функции от M для типичных α важен в некоторых вопросах, но мы не будем этого касаться.

Теперь мы определим функцию $F_1(a)$ и докажем лемму 1, показывающую, в каком смысле $F(a)$ и $F_1(a)$ эквивалентны. Для любого $a \in \Omega_N$ введем арифметическую прогрессию $\Pi_r = \{r + ma_n, m \geq 0\}$, $0 \leq r < a_n$. Рассмотрим равенство

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} = r + m(x_1, \dots, x_{n-1}) a_n,$$

из которого следует, что

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} \equiv r \pmod{a_n}. \quad (1)$$

Здесь $x_j \geq 0$ – целые числа. Положим $\bar{m}_r = \min_{0 \leq x_1, \dots, x_{n-1} < a_n} m(x_1, \dots, x_{n-1})$ и обозначим $F_1(a) = \max_r (r + \bar{m}_r a_n)$.

ЛЕММА 1. $F_1(a) - a_n \leq F(a) \leq F_1(a)$ в предположении, что $F_1(a) - a_n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $t \geq F_1(a)$. Тогда $t \in \Pi_r$ для некоторого r , $0 \leq r < a_n$, т.е. $t = r + m a_n$. Следовательно,

$$t = r + \bar{m}_r a_n + (m - \bar{m}_r) a_n = x_1 a_1 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} + (m - \bar{m}_r) a_n$$

для некоторых $0 \leq x_j < a_n$, $j = 1, \dots, n-1$. Так как $t \geq F_1(a)$, мы имеем $x_1 a_1 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} \leq F_1(a)$ и $m \geq \bar{m}_r$. Это дает необходимое представление t и неравенство $F(a) \leq F_1(a)$.

Чтобы доказать неравенство с другой стороны, возьмем r_1 такое, что $F_1(a) = r_1 + \bar{m}_{r_1} a_n = \max_r (r + \bar{m}_r a_n)$. Мы покажем, что $t_1 = r_1 + (\bar{m}_{r_1} - 1) a_n$ не может быть представлено в виде $t_1 = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n$ с неотрицательными y_j , $1 \leq j \leq n$. В самом деле, если бы такое представление было возможно, мы имели бы

$$y_1 a_1 + \cdots + y_{n-1} a_{n-1} = r_1 + m a_n$$

для некоторого $m \geq \bar{m}_{r_1}$, а по определению

$$t_1 = y_1 a_1 + \cdots + y_{n-1} a_{n-1} + y_n a_n = r_1 + m a_n + y_n a_n = r_1 + (\bar{m}_{r_1} - 1) a_n.$$

Поэтому должно быть выполнено равенство $m + y_n = \bar{m}_{r_1} - 1$. Но так как $m \geq \bar{m}_{r_1}$, это возможно, только если $y_n < 0$. Лемма 1 доказана.

Конечно, вместо a_n можно было бы взять любое другое a_j . В типичном случае мы ожидаем, что x_j растут как $N^{\frac{1}{n-1}}$. Следовательно, в типичной ситуации $F(a) \sim F_1(a)$.

§ 2. Случай $n = 3$ и $\text{нод}(a_i, a_j) = 1$ для некоторых a_i, a_j

Без потери общности мы можем предположить, что $i = 1$, $j = 3$. В этом случае “max-min”-задача для $F_1(a)$ может быть решена более или менее явно. Напишем для положительных целых x_1, x_2

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = r + m(x_1, x_2) a_3, \quad (2)$$

или

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 \equiv r \pmod{a_3}, \quad (3)$$

где $0 \leq r < a_3$. Так как a_1, a_3 взаимно просты, существует a_1^{-1} , $1 \leq a_1^{-1} < a_3$, для которого $a_1 a_1^{-1} \equiv 1 \pmod{a_3}$. Из оценок сумм Клостермана легко следует, что для любых фиксированных $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ и $N\alpha_1 \leq a_1 \leq N\alpha_2$ обратный элемент a_1^{-1} асимптотически равномерно распределен на $[1, \dots, a_3]$. По-видимому, это также верно в нашем ансамбле. Перепишем (3) в виде

$$x_1 + a_{12} x_2 \equiv r_1 \pmod{a_3}, \quad (4)$$

где $r_1 \equiv r a_1^{-1} \pmod{a_3}$, $a_{12} \equiv a_1^{-1} a_2 \pmod{a_3}$ и

$$a_{12} x_2 \equiv (r_1 - x_1) \pmod{a_3} \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет естественную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим $S = [0, 1, \dots, a_3 - 1]$ как “дискретную окружность”. Сдвиг R на $a_{12} \pmod{a_3}$ есть вращение окружности S , а $\{a_{12} x_2\}$ есть орбита точки нуль под действием R . Тогда (5) означает, что $r_1 - x_1$ принадлежит этой орбите.

Из леммы 1 получаем, что

$$\begin{aligned} F_1(a) &= \max_r \min_{\substack{x_1 a_1 + x_2 a_2 \equiv r \pmod{a_3} \\ 0 \leq x_1, x_2 < a_3}} (x_1 a_1 + x_2 a_2) \\ &= N^{3/2} \max_r \min_{x_1 a_1 + x_2 a_2 \equiv r \pmod{a_3}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N} \right) \\ &= N^{3/2} \max_{r_1} \min_{x_1 + x_2 a_{12} \equiv r_1 \pmod{a_3}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Сначала мы локализуем наш ансамбль. Выберем $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2, 3$, $\varepsilon > 0$ и определим $\Omega_{N, \alpha, \varepsilon} \subset \Omega_N$ как множество таких $a = (a_1, a_2, a_3)$, для которых $|\frac{a_j}{N} - \alpha_j| \leq \varepsilon$. Обозначим $P_{N, \alpha, \varepsilon}$ равномерное распределение вероятностей на $\Omega_{N, \alpha, \varepsilon}$. Теорема 1 будет установлена, если мы докажем ее по отношению к распределению $P_{N, \alpha, \varepsilon}$ (см. также конец этого параграфа). В ансамбле $\Omega_{N, \alpha, \varepsilon}$ отношения $\frac{a_1}{N}$, $\frac{a_2}{N}$ ε -близки к α_1 , α_2 .

Мы используем некоторые факты из теории цепных дробей и теории вращения окружности (см. [6]). Возьмем число $\rho = \frac{a_{12}}{a_3}$ и разложим его в цепную дробь:

$$\rho = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \ddots + \frac{1}{h_{s_0}}}}}, \quad (7)$$

где $h_j \geq 1$ – целые числа. Пусть

$$\rho_s = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{h_s}}}} = \frac{p_s}{q_s}$$

– s -е приближение числа ρ . Можно найти “нечетные” интервалы $\Delta_1^{(2p-1)} = \{0, 1, \dots, m_{2p-1}\}$ и “четные” интервалы $\Delta_1^{(2p)} = \{a_3 - m_{2p}, \dots, a_3 - 1\}$, $p \geq 1$, такие, что если $\Delta_j^{(2p-1)} = R^j \Delta_1^{(2p-1)}$, $\Delta_{j_1}^{(2p)} = R^{j_1} \Delta_1^{(2p)}$, то интервалы $\Delta_j^{(2p-1)}$, $0 \leq j < q_{2p}$, и $\Delta_{j_1}^{(2p)}$, $0 \leq j_1 < q_{2p-1}$, попарно не пересекаются и их объединение есть вся окружность S . Это значит, что $\Delta_j^{(2p-1)}$, $\Delta_{j_1}^{(2p)}$ образуют некоторое разбиение окружности S , которое мы обозначим $\eta^{(p)}$. Разбиения $\eta^{(p)}$ возрастают: $\eta^{(p+1)} \geq \eta^{(p)}$. Их точная структура зависит от структуры цепной дроби (7).

Мы покажем (см. ниже), что в (6) достаточно рассмотреть $x_1 \leq \mathcal{D}_1 \sqrt{N}$, $x_2 \leq \mathcal{D}_1 \sqrt{N}$, где $\mathcal{D}_1$ достаточно велико и зависит от ρ . Возьмем такое s_1 , что $q_{s_1-1} \leq \sqrt{N} < q_{s_1}$. Если $x_2 > \mathcal{D}_1 \sqrt{N}$, то выберем k_1 так, что $q_{s_1+k_1} \leq x_2 < q_{s_1+k_1+1}$. Ясно, что k_1 растет, если $\mathcal{D}_1$ растет. Положим

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + (a_{12}q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1}a_3) = x_1 + a_3(\rho q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1}), \\ x'_2 &= x_2 - q_{s_1+k_1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$x'_1 + a_{12}x'_2 \equiv x_1 + a_{12}x_2 \pmod{a_3}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{x'_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x'_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N} &= \frac{x_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N} \\ &+ \frac{a_3(\rho q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1})}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} - \frac{q_{s_1+k_1}}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение

$$\frac{a_3(\rho q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1})}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} = \frac{a_3}{N} \sqrt{N} (\rho q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1}) \frac{a_1}{N}$$

убывает при возрастании k_1 , поскольку $(\rho q_{s_1+k_1} - p_{s_1+k_1})$ ведет себя как $\frac{1}{q_{s_1+k_1}}$. С другой стороны, $\frac{q_{s_1+k_1}}{\sqrt{N}}$ принимает значения порядка $O(1)$ и возрастает с ростом k_1 . Следовательно, сумма двух последних членов в (8) становится отрицательной при достаточно большом k_1 . Так как в (6) нас интересуют минимальные значения по x'_2 , выражение (6) принимает меньшее значение при $x'_2 = x_2 - q_{s_1+k_1}$. Таким образом, достаточно рассмотреть $x_2 \leq \mathcal{D}_1 \sqrt{N}$ при достаточно большой постоянной $\mathcal{D}_1$, зависящей от ρ .

Покажем, что $x_2 > \mathcal{D}_2^{-1} \sqrt{N}$ для некоторой достаточно большой $\mathcal{D}_2$. В самом деле, выберем k_2 так, чтобы $q_{s_1-k_2} < \mathcal{D}_2^{-1} \sqrt{N} \leq q_{s_1-k_2+1}$, и рассмотрим

разбиение $\eta^{(s_1-k_2)}$. Возьмем любой элемент $\Delta = [y_1, y_2]$ этого разбиения. Тогда для $r_1 = y_2 - 1$ значения x_1 равны

$$(y_2 - y_1 - 1), \quad (y_2 - y_1 - 1) + \ell_1, \quad (y_2 - y_1 - 1) + \ell_1 + \ell_2, \dots,$$

где $\ell_1, \ell_2, \dots$ — длины элементов разбиения $\eta^{(s_1-k_2)}$, следующих за Δ . Если $x_2 \leq \mathcal{D}_2^{-1}\sqrt{N} \leq q_{s_1-k_2+1}$, то ясно, что $\min\left(\frac{x_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N}\right)$ достигается в точке $x_1 = y_2 - y_1 - 1$. С другой стороны, рассмотрим для r_1 элемент Δ' разбиения $\eta^{(s_1)}$, содержащий r_1 . Возьмем $x'_1 = |\Delta'| - 1$. Ясно, что $x'_2 \leq q_{s_1+1}$ и $\frac{x'_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x'_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N}$ много меньше, чем в предыдущем случае. Следовательно, $\mathcal{D}_2^{-1}\sqrt{N} \leq x_2 \leq \mathcal{D}_1\sqrt{N}$.

В упомянутой выше статье К. Ульчирай и второго автора [5] рассмотрена следующая задача. Возьмем большое R и некоторое фиксированное число k . Для любого иррационального числа ρ рассмотрим q_s такие, что $q_{s-1} \leq R < q_s$, и $h_{s-k}, \dots, h_s, \dots, h_{s+k}$. В [5] доказано, что по отношению к гауссовской плотности $\frac{1}{(\ln 2)(1+\rho)}$ существует совместное предельное распределение величин $\frac{q_{s-1}}{R}$, $\frac{q_s}{R}$, $h_{s-k}, \dots, h_s, \dots, h_{s+k}$. По-видимому, то же самое предельное распределение возникает для любого вероятностного распределения $P_{N,\alpha,\varepsilon}$, но мы не рассматриваем более детально этот вопрос.

Для любых s и k рассмотрим элементы Δ', Δ'' разбиения $\eta^{(s-k)}$, содержащие 0 (для Δ' точка 0 является правым концом, а для Δ'' она является левым концом). Разбиения $\eta^{(s-k+1)}, \eta^{(s-k+2)}, \dots, \eta^{(s+k)}$ порождают конечное разбиение объединения $\Delta' \cup \Delta''$, которое мы обозначим ν . Структура этого разбиения определяется значениями $h_{s-k}, h_{s-k+1}, \dots, h_{s+k}$. Обозначим через N конечное множество концевых точек элементов разбиения ν .

Возьмем $b = a_3 - a_{12}$ и $N' \equiv N - a_{12} \pmod{a_3}$. Обозначим

$$f_k = \max_{y \in N'} \min_{\substack{x_1 + a_{12}x_2 \equiv y \pmod{a_3} \\ a_{12}x_2 \in N'}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{N}} \frac{a_1}{N} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} \frac{a_2}{N} \right).$$

Те же самые аргументы, что и прежде, показывают, что с $P_{N,\alpha,\varepsilon}$ -вероятностью, стремящейся к 1 при $k \rightarrow \infty$, решение основной “max-min”-задачи для F_1 дается с помощью f_k . В этом смысле оно является функцией от $\frac{q_{s-1}}{R}$, $\frac{q_s}{R}$ и $h_{s-k}, \dots, h_{s+k}$ и имеет предельное распределение при $N \rightarrow \infty$.

§ 3. Случай $n = 3$ и произвольных $b_{ij} = \text{нод}(a_i, a_j)$

Так как все a_j не имеют общих делителей, то b_{13} и b_{23} взаимно просты. Снова для заданного r , $0 \leq r < a_3$, мы рассмотрим уравнение

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = r + m(x_1, x_2) a_3.$$

Напишем $a_1 = b_{13}a'_1$, $a_2 = b_{23}a'_2$, $a_3 = b_{13}b_{23}a'_3$. Ясно, что пары (a'_1, a'_3) , и (a'_2, a'_3) взаимно простые. Пусть

$$\begin{aligned} r &= r'b_{13}b_{23} + r'', & 0 \leq r'' < b_{13}b_{23}, \\ x_1 &= b_{23}x'_1 + x''_1, & 0 \leq x''_1 < b_{23}, \\ x_2 &= b_{13}x'_2 + x''_2, & 0 \leq x''_2 < b_{13}, \\ a'_1 &= b_{23}a''_1 + a'''_1, & 0 \leq a'''_1 < b_{23}, \\ a'_2 &= b_{13}a''_2 + a'''_2, & 0 \leq a'''_2 < b_{13}. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим уравнение

$$x''_1b_{13}a'''_1 + x''_2b_{23}a'''_2 \equiv r'' \pmod{b_{13}b_{23}}. \quad (9)$$

Мы можем найти единственное решение, которое мы обозначим $\bar{x}''_1$, $\bar{x}''_2$, такое, что

$$x''_1a'''_1 + x''_2a'''_2 = r'' + tb_{13}b_{23},$$

где t может принимать значения 0 или 1. Затем мы рассмотрим уравнение, которое получается после деления обеих частей уравнения (3) на $b_{13}b_{23}$:

$$x'_1a'_1 + a'_2a'_2 = r' - x''_1a''_1 - x''_2a''_2 - t + ma'_3. \quad (10)$$

Положим $r'_1 = r' - x''_1a''_1 - x''_2a''_2 + t$. Ясно, что $x''_1a''_1 - x''_2a''_2 + t$ может принимать конечное число значений, зависящее только от $\{b_{ij}\}$. Легко видеть, что пределы вероятностей этих значений существуют при $N \rightarrow \infty$.

Уравнение (9) подобно (6), так как a'_1 и a'_3 взаимно просты. Мы можем написать

$$x'_1 + x'_2a'_2(a'_1)^{-1} = r'_1(a'_1)^{-1} + m_1a'_3$$

и использовать те же самые аргументы, что в § 2. В частности, мы рассмотрим разложение $a'_2(a'_1)^{-1}$ в цепную дробь, возьмем s_1 , для которого $q_{s_1} \geq \sqrt{N}$, $q_{s_1} - 1 < \sqrt{N}$, и найдем значение s , при котором $\frac{|\Delta_1^{(s)}|}{\sqrt{N}} + \frac{q_s}{\sqrt{N}}$ достигает своего минимума. Предельное распределение последнего выражения дает предельное распределение величины $\frac{1}{N^{3/2}}F_1(a)$.

§ 4. Случай $n > 3$

Для $n > 3$ наш результат более слабый. Снова рассмотрим уравнение

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_{n-1}a_{n-1} = r + ma_n, \quad (11)$$

или

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_{n-1}a_{n-1} \equiv r \pmod{a_n}. \quad (12)$$

Левая часть уравнения – это орбита абелевой группы, порожденной $(n-1)$ коммутирующими вращениями R_j , где R_j – сдвиг $\bmod a_n$ окружности $S = \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$ на a_j , $1 \leq j \leq n-1$. Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим ансамбль $\Omega_{N,\alpha} \subset \Omega_N$ такой, что $\alpha N < a_j$, $1 \leq j \leq n$, где $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число. Пусть $\Sigma_{\mathcal{D}} \subset \Omega_{N,\alpha}$ – множество таких наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega_{N,\alpha}$, что для любого $r \in S$ уравнение (12) имеет решение с $0 \leq x_j \leq \mathcal{D}N^{\frac{1}{n-1}}$. Тогда $P_{N,\alpha}(\Sigma_{\mathcal{D}}) \geq 1 - \varepsilon(\mathcal{D})$, где $\varepsilon(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ при $\mathcal{D} \rightarrow \infty$. Здесь $P_{N,\alpha}$ – равномерное распределение на $\Omega_{N,\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{a_n-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i m r}{a_n}\right\} \exp\left\{-2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m a_j}{a_n} x_j\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если (12) выполнено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возьмем $M > 0$ и рассмотрим вес на $\mathbb{Z}$

$$c(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - M|}{M}, & 0 \leq x \leq 2M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы показать, что (12) имеет решение для любого $r \in S$, достаточно показать, что для любого r

$$\begin{aligned} Z_a(r) &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}} c(x_1) c(x_2) \cdots c(x_{n-1}) \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{a_n-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i m r}{a_n}\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{2\pi i m \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} x_j\right\} \neq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Перепишем предыдущее выражение в виде

$$Z_a(r) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{a_n-1} \exp\left\{-2\pi i \frac{m r}{a_n}\right\} \prod_{j=1}^{n-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}} c(x) \exp\left\{2\pi i \frac{m a_j}{a_n} x\right\}.$$

Легко проверить, что

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} c(x) e^{-2\pi i \theta x} = e^{2\pi i M \theta} \frac{1}{2M+1} \left\{ \frac{\sin \pi(2M+1)\theta}{2 \sin \pi \theta} \right\}^2 \quad (14)$$

для любых θ . Разделяя в (13) вклад от $m = 0$ и от $m \neq 0$, мы можем написать

$$Z_a(r) = \frac{M^{n-1}}{a_n} + Z_a^{(1)}(r) = \frac{M^{n-1}}{a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^{a_n-1} e^{-2\pi i \frac{m r}{a_n}} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} c(x) e^{2\pi i \frac{m a_j}{a_n} x} \right).$$

Рассмотрим $M = AN^{\frac{1}{n-1}}$. Тогда $\frac{M^{n-1}}{a_n} = \frac{A^{n-1}N}{a_n}$. В нашем случае $\alpha \leq \frac{a_n}{N} \leq 1$. Ввиду (14) для $Z_a^{(1)}(r)$ мы имеем оценку

$$|Z_a^{(1)}(r)| \leq \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^{a_n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\sin \pi(2M+1)\theta_j}{2 \sin \pi \theta_j} \right)^2 \frac{1}{2M+1}, \quad (15)$$

где $\theta_j = \frac{m a_j}{a_n}$. Эта оценка не зависит от r . Поэтому, если мы покажем, что математическое ожидание правой части в (15) ограничено некоторой постоянной, то утверждение теоремы будет легко вытекать из неравенства Чебышёва.

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\sin \pi(2M+1)\theta_j}{2 \sin \pi\theta_j} \right)^2 \leq \frac{C_1}{(\sin(\pi m a_j/a_n))^2 + M^{-2}}$$

для некоторой абсолютной постоянной C_1 . Следовательно,

$$\begin{aligned} |Z_a^{(1)}(r)| &\leq \frac{C_2}{a_n} \sum_{m=1}^{a_n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{M} \frac{1}{(\sin(\pi m a_j/a_n))^2 + M^{-2}} \right\} \\ &\leq \frac{C_2}{a_n} \sum_{m=1}^{a_n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{M \|m a_j/a_n\|^2 + M^{-1}} \end{aligned} \quad (16)$$

для другой абсолютной постоянной C_2 . В последней формуле $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого числа. Усредним правую часть (16) по мере $P_{N,\alpha}$, т. е. рассмотрим

$$Z_a^{(2)}(r) = \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{\alpha N \leq a_n \leq N} \sum_{m=1}^{a_n-1} \sum_{\substack{\alpha N \leq a_1, \dots, a_{n-1} \leq N \\ \text{нод}(a_1, \dots, a_n)=1}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{M \|m a_j/a_n\|^2 + M^{-1}}. \quad (17)$$

Предположим, что $\frac{m}{a_n} = \frac{b}{q}$ для некоторого $1 \leq b \leq q$ и $\text{нод}(b, q) = 1$. Тогда правая часть (17) может быть записана в виде

$$N^{-n-1} \sum_{q=1}^N \frac{N}{q} \sum_{\substack{1 \leq b \leq q \\ \text{нод}(b, q)=1}} \sum_{\substack{\alpha N \leq a_1, \dots, a_n \\ \text{нод}(a_1, \dots, a_{n-1}, q)=1}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a_j \right\|^2 + M^{-1}}. \quad (18)$$

Если $\text{нод}(a_1, \dots, a_{n-1}, q)$ равен единице, то a_k не делится на q для некоторых $k = 1, \dots, n-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha N \leq a_1, \dots, a_n \leq N} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a_j \right\|^2 + M^{-1}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha N \leq a_1, \dots, a_{n-1} \leq N \\ a_k \notin q\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a_j \right\|^2 + M^{-1}} \\ &= (n-1) \sum_{\substack{\alpha N \leq a \leq N \\ a \notin q\mathbb{Z}}} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}} \cdot \left(\sum_{\alpha N \leq a \leq N} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}} \right)^{n-2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь мы оценим обе суммы в (19).

ЛЕММА 2. *Имеют место неравенства:*

(i) *если $q > M$, то*

$$\sum_{\alpha N \leq a \leq N} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}} \leq N;$$

(ii) если $q \leq M$, то

$$\sum_{\alpha N \leq a \leq N} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}} \leq \frac{M}{q} N;$$

(iii) если $q \leq M$, то

$$\sum_{\substack{\alpha N \leq a \leq N \\ a \notin q\mathbb{Z}}} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}} \leq \frac{q}{M} N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $[\alpha N, N]$ на приблизительно $\frac{(1-\alpha)N}{q}$ интервалов I_γ длины q . Обозначим через π_q факторотображение $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Тогда для каждого I_γ мы имеем $\{\pi_q(ba) \mid a \in I_\gamma\} = \mathbb{Z}_q$ и

$$\{\pi_q(ba) \mid a \in I_\gamma, \pi_q(a) \neq 0\} = \mathbb{Z}_q \setminus \{0\}.$$

Следовательно, сумма

$$\sum_{\alpha N \leq a \leq N} \frac{1}{M \left\| \frac{b}{q} a \right\|^2 + M^{-1}}$$

ведет себя как

$$\frac{N}{q} \sum_{z=0}^{q-1} (q-1) \frac{1}{M \left\| \frac{z}{q} \right\|^2 + M^{-1}}$$

и для абсолютной постоянной C_3

$$\sum_{z=0}^{q-1} \frac{1}{M \left\| \frac{z}{q} \right\|^2 + M^{-1}} \leq C_3 q, \quad \text{если } q \geq M,$$

и

$$\sum_{z=0}^{q-1} \frac{1}{M \left\| \frac{z}{q} \right\|^2 + M^{-1}} \leq C_3 M, \quad \text{если } q < M.$$

Из этого получаем утверждения (i) и (ii) леммы. Для $q < M$ сумма

$$\sum_{z=1}^{q-1} \frac{1}{M \left\| \frac{z}{q} \right\|^2 + M^{-1}} \leq \frac{q^2}{M}.$$

Лемма 2 доказана.

Вернемся к (19). Для $q \geq M$ лемма 2 показывает, что правая часть не превосходит N^{n-1} , а для $q < M$ — не превосходит $\frac{q}{M} N \left(\frac{M}{q} N\right)^{n-2} = \left(\frac{M}{q}\right)^{n-3} N^{n-1}$. Подставляя эти оценки в (17), мы получаем в предположении $n > 3$, что

$$\begin{aligned} Z_a^{(2)}(r) &\leq \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{M \leq q \leq N} \frac{N}{q} \sum_{\substack{1 \leq b \leq q \\ (b,q)=1}} N^{n-1} + \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{1 \leq q \leq M} \frac{N}{q} \sum_{\substack{1 \leq b \leq q \\ (b,q)=1}} \left(\frac{M}{q}\right)^{n-3} \cdot N^{n-1} \\ &< C_4 + C_4 \frac{M^{n-3}}{N} \sum_{1 \leq q \leq M} \frac{1}{q^{n-3}} < C_4 \left(1 + \frac{M^{n-2}}{N}\right) \end{aligned}$$

для другой константы C_4 . Следовательно, $Z_a^{(2)}(r)$ ограничены. Из этого вытекает утверждение теоремы 2.

Теорема 2 показывает, что для любого ансамбля $\Omega_{N,\alpha}$ семейство вероятностных распределений величины $F_1(a)/N^{1+\frac{1}{n-1}}$ слабо компактно. Однако из этого не следует существование предельного распределения для $F_1(a)/N^{1+\frac{1}{n-1}}$, а следует только существование предельных точек.

Приложение

Ниже мы доказываем оценку, которая не используется в предыдущих доказательствах, но представляет некоторый независимый интерес. Подобное утверждение было доказано А. Кочергиным (устное сообщение).

ЛЕММА. Для $0 < \alpha < 1$ положим

$$S_T(\alpha) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{|\exp\{2\pi i t \alpha\} - 1|}$$

и

$$A_T(\mathcal{D}) = \{\alpha : |S_T(\alpha)| \geq \mathcal{D} \ln T\}.$$

Тогда лебегова мера $\ell(A_T(\mathcal{D})) \leq \varepsilon_1(\mathcal{D})$, где $\varepsilon_1(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ при $\mathcal{D} \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем два положительных числа C_1, C_2 , $1 < C_1 < 2C_1 < C_2$, и определим интервалы

$$\Delta_T(k) = \left\{ \alpha : \frac{C_1^k}{T} \leq \alpha \leq \frac{C_1^{k+1}}{T} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Без потери общности мы можем предположить, что $C_1^{K+1} = T$. Ясно, что $K \sim \frac{\ln T}{\ln C_1}$. Рассмотрим

$$B_{T,k}(C_1, C_2) = \{\alpha : \nu_{T,k}(\alpha) \leq C_2 C_1^k\},$$

где $\nu_{M,k}(\alpha)$ – число тех m , $1 \leq m \leq M$, для которых $\{m\alpha\} \in \Delta_M(k)$, и

$$B_T(C_1, C_2) = \bigcap_{k=0}^K B_{T,k}(C_1, C_2).$$

Для $\alpha \in B_T(C_1, C_2)$ мы имеем

$$\begin{aligned} |S_T(\alpha)| &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{|\exp\{2\pi i t \alpha\} - 1|} \leq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^K \frac{T}{2\pi C_1^k} \nu_{T,k}(\alpha) \\ &\leq \frac{C_2}{2\pi} (K+1) \leq \frac{C_2 \ln T}{2\pi \ln C_1}. \end{aligned}$$

Это есть требуемое неравенство с $\mathcal{D} = \frac{C_2}{2\pi \ln C_1}$. Следовательно, мы должны оценить меру дополнения к $B_T(C_1, C_2)$. Ясно, что

$$\ell(\bar{B}_T(C_1, C_2)) \leq \sum_{k=0}^K \ell(\bar{B}_{T,k}(C_1, C_2)),$$

где $\bar{B}$ – дополнение к B . Пусть $\chi_k(\alpha)$ – индикатор множества $B_{T,k}(C_1, C_2)$. Тогда

$$\nu_{T,k}(C_1, C_2) = \sum_{t=1}^T \chi_k(t\alpha)$$

и по неравенству Чебышёва

$$\begin{aligned} \ell\{\alpha : \nu_{T,k}(\alpha) \geq C_2 C_1^k\} &= \ell\left\{\alpha : \sum_{t=1}^T \chi_k(t\alpha) \geq C_2 C_1^k\right\} \\ &= \ell\left\{\alpha : \sum_{t=1}^T \left(\chi_k(t\alpha) - \frac{C_1^k(C_1-1)}{T}\right) \geq (C_2 - C_1 + 1)C_1^k\right\} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^T \left(\chi_k(t\alpha) - \frac{C_1^k(C_1-1)}{T}\right)^2\right]}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^T (T-j) \left[\mathbb{E}\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) - \left(\frac{C_1^k(C_1-1)}{T}\right)^2\right]}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}}. \end{aligned}$$

Здесь математическое ожидание берется относительно меры Лебега. Мы оценим последнюю сумму. Это будет сделано в четыре шага.

Шаг 1: $j < C_1$. Здесь $\mathbb{E}\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) \leq \mathbb{E}\chi_k(\alpha) = \frac{C_1^k(C_1-1)}{T}$ и

$$\frac{\sum_{j < C_1} (T-j) \left[\mathbb{E}\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) - \left(\frac{C_1^k(C_1-1)}{T}\right)^2\right]}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \leq \frac{C_1^k(C_1-1)C_1}{C_1^{2k}(C_2 - C_1 + 1)^2} \leq \frac{1}{C_1^{k+1}},$$

так как $C_2 > 2C_1$.

Шаг 2: $C_1 \leq j < \frac{T}{C_1^{k+1}}$. В этом случае $\mathbb{E}\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) = 0$ и не надо ничего оценивать. В самом деле, $\chi_k(\alpha)$ есть индикатор множества $\Delta_T(k)$. Функция $\chi_k(j\alpha)$ является индикатором интервала из арифметической прогрессии интервалов $\left[\frac{1}{j} \frac{C_1^k}{T} + \frac{s}{j}, \frac{1}{j} \frac{C_1^{k+1}}{T} + \frac{s}{j}\right]$, $s \geq 0$. Из нашего условия на j следует, что $\Delta_T(k)$ может пересекаться только с интервалом, для которого $t = 0$; это пересечение пусто.

Шаг 3: $\frac{T}{C_1^{k+1}} \leq j < \frac{3T}{C_1^k(C_1-1)}$. Число 3 не играет никакой существенной роли и может быть заменено любым большим числом. Здесь $\Delta_T(k)$ пересекается не более чем с тремя интервалами вышеупомянутой арифметической прогрессии.

Следовательно, $E\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) \leq \frac{3C_1^k}{jT}$ и

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_j (T-j) \left[E\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) - \left(\frac{C_1^k(C_1-1)}{T} \right)^2 \right]}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \\ & \leq \frac{3C_1^k}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \sum_{\frac{T}{C_1^{k+1}} \leq j \leq \frac{3T}{C_1^k(C_1-1)}} \frac{1}{j} \\ & \leq \frac{3}{C_1^k(C_2 - C_1 + 1)^2} \frac{C_1^{k+1} \cdot 2T}{TC_1^k(C_1-1)^2} = \frac{24}{C_1^k C_2}. \end{aligned}$$

Это и есть нужная оценка.

Шаг 4: $j \geq \frac{3T}{C_1^k(C_1-1)}$. В этом случае $E\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha)$ близко к $(E\chi_k(\alpha))^2 = \left(\frac{C_1^k(C_1-1)}{T} \right)^2$. Действительно, мы можем увеличить $\Delta_T(k)$, добавив интервалы вблизи каждого конца так, чтобы новое множество $\Delta'_T(k)$ состояло из целого числа интервалов $\left[\frac{s}{j}, \frac{s+1}{j} \right]$. Тогда

$$\begin{aligned} E\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) & \leq \ell(\Delta'_T(k)) \frac{C_1^k(C_1-1)}{T} \leq \left(\ell(\Delta_T(k)) + \frac{2}{j} \right) \frac{C_1^k(C_1-1)}{T} \\ & = \ell^2(\Delta_T(k)) + \frac{2C_1^k(C_1-1)}{Tj} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{3T}{C_1^k(C_1-1)} \leq j \leq T} \frac{(T-j) \left[E\chi_k(\alpha)\chi_k(j\alpha) - \left(\frac{C_1^k(C_1-1)}{T} \right)^2 \right]}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \\ & \leq \sum_{\frac{3T}{C_1^k(C_1-1)} \leq j \leq T} \frac{(T-j) \cdot 2C_1^k(C_1-1)}{Tj(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^{2k}} \\ & \leq \frac{2C_1^k(C_1-1)}{(C_2 - C_1 + 1)^2 C_1^k} \ln \frac{TC_1^k(C_1-1)}{3T} = \frac{4(C_1-1)k \ln C_1}{(C_2 - C_2 + 1)^2 C_1^k}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем закончить доказательство леммы. Из всех наших оценок следует, что

$$\ell\{\alpha : \nu_{T,k}(\alpha) \geq C_2 C_1^k\} \leq \frac{4 \ln C_1}{C_1} \frac{k}{C_1^k}$$

и, значит,

$$\sum_k \ell\{\alpha : \nu_{T,k}(\alpha) \geq C_2 C_1^k\} \leq \text{const} \frac{\ln C_1}{C_1}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, “Слабые асимптотики чисел решений диофантовых проблем”, *Функц. анализ и его прилож.*, **33**:4 (1999), 65–66; англ. пер.: V. I. Arnold, “Weak asymptotics for the numbers of solutions of Diophantine problems”, *Funct. Anal. Appl.*, **33**:4 (1999), 292–293.
- [2] V. I. Arnold, “Arithmetical turbulence of selfsimilar fluctuations statistics of large Frobenius numbers of additive semigroups of integers”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 173–193.
- [3] L. B. Koralov, Ya. G. Sinai, *Probability theory and random processes*, Springer-Verlag, 2007.
- [4] J. J. Sylvester, “Mathematical questions with their solutions”, *Educational Times*, **41** (1884), 21.
- [5] Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “Renewal-type limit theorem for the Gauss map and continued fractions”, *Ergodic Theory Dynam. Systems* (to appear).
- [6] Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории*, Физматлит, М., 1995; пер. с англ.: Ya. G. Sinai, *Topics in ergodic theory*, Princeton Math. Ser., **44**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.

Ж. Бургейн (J. Bourgain)

Institute for Advanced Study, Princeton, USA

E-mail: bourgain@math.ias.edu

Поступила в редакцию

29.05.2007

Я. Г. Синай (Ya. G. Sinai)

Princeton University, USA

E-mail: sinai@math.princeton.edu