Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Сильная асимптотика нулей многочленов, ортогональных относительно комплексного веса, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 10:43:23

**Сильная асимптотика нулей многочленов,
ортогональных относительно комплексного веса**

С. П. Суетин

1. Пусть ρ – непрерывная комплекснозначная функция, заданная на отрезке $\Delta = [-1, 1]$. Если $\rho > 0$ на Δ и удовлетворяет условию Дини–Липшица, то (см. [1], [2]) для многочленов Q_n , ортогональных на Δ с весом $(1-x^2)^{-1/2}\rho(x)$ и нормированных соответствующим образом, при $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы Бернштейна:

$$Q_n(z) = \Phi(z)^n D(z; \rho)(1 + o(1)), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (1)$$

$$Q_n(x) = 2(\rho(x))^{-1/2} \cos(n \arccos x + \theta(x; \rho)) + o(1), \quad x \in \Delta, \quad (2)$$

где $D(z; \rho)$ – функция Сегё, $\theta(x; \rho)$ – “сдвиг фазы”, $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная функции Жуковского $z = \frac{1}{2}(\zeta + 1/\zeta)$, $|\zeta| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\zeta = \Phi(z)$. Соотношение (1) выполняется локально равномерно в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, соотношение (2) – равномерно на Δ . Случаю $\rho \equiv 1$ соответствуют классические полиномы Чебышёва $T_n(z) = \zeta^n + \zeta^{-n}$, нули которых вычисляются явно: $x_{k,n} = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi k}{n})$, $k = 0, \dots, n-1$. В частности, для нулей, ближайших к концам отрезка Δ , имеем: $x_{0,n} = 1 - \pi^2/(4n^2) + O(1/n^4)$, $x_{n-1,n} = -1 + \pi^2/(4n^2) + O(1/n^4)$. Так как $\rho > 0$, то $\deg Q_n = n$ и все n нулей полинома Q_n лежат на отрезке Δ . Если функция ρ голоморфна на Δ , $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$, то (см. [3]–[5]) в (1), (2) величина $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta \in (0, 1)$, и формула (2) позволяет приближенно с точностью $o(\delta^n)$ находить нули Q_n как корни уравнения $\cos(n \arccos x + \theta(x; \rho)) = 0$.

2. Изучение сходимости аппроксимаций Паде приводит к задаче об асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса ρ : такие многочлены естественным образом возникают как знаменатели диагональных аппроксимаций Паде [6; § 2, п. 11], [7], [8]. Дж. Наттолом [8], [3] было показано, что результаты С. Н. Бернштейна остаются в силе и для комплексного веса $\rho: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$. Точнее, формула (1) остается неизменной, а вместо (2) имеем

$$Q_n(x) = \Psi_n(x + i0) + \Psi_n(x - i0) + o(\delta^n), \quad x \in \Delta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\Psi_n(z) := \Phi(z)^n D(z; \rho)$. Непосредственно из (1) вытекает, что $\deg Q_n = n$ при $n \geq n_0$, все нули Q_n притягиваются к отрезку Δ и

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $\mu(Q_n)$ – считающая мера для полинома Q_n . Однако для комплексного веса ρ нули Q_n , вообще говоря, не лежат на Δ . Поэтому формула (3) оказывается непригодной для приближенного решения уравнения $Q_n(z) = 0$, в отличие от случая $\rho > 0$. Тем самым, формулы типа (1)–(3) не позволяют проследить за асимптотическим поведением *каждого* из нулей полинома Q_n при $n \rightarrow \infty$ и, в частности, не дают ответа на вопрос, с какой скоростью эти нули притягиваются к отрезку Δ .

Основной результат настоящей работы – формула сильной асимптотики для Q_n в “окрестности” отрезка Δ . В частности, для веса $\rho(x) = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ из этой формулы вытекает индивидуальное описание асимптотического поведения *каждого* из n нулей полинома Q_n по отношению к нулям $x_{k,n}$ полинома Чебышёва. Иными словами, при $n \rightarrow \infty$ нули Q_n фактически “нумеруются” нулями T_n .

3. Пусть $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$ и двулистно накрывающая $\mathbb{C}$; $\mathbf{z} = (z, w)$ – точки на $\mathfrak{R}$, pr – каноническая проекция: $\text{pr}(\mathbf{z}) = z$. Отрезку Δ соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутый цикл Γ , $\text{pr}(\Gamma) = \Delta$. Функция $\Phi(z)$ и полином $Q_n(z)$ поднимаются на $\mathfrak{R}$ как функции от $\mathbf{z}$; так как $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$, то Ψ_n голоморфна в некоторой окрестности Γ .

ТЕОРЕМА 1. Если $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$, $\rho(x) \neq 0$, то при некотором $\varepsilon > 0$ равномерно по $\mathbf{z}$ таким, что $e^{-\varepsilon} \leq |\Phi(\mathbf{z})| \leq e^\varepsilon$, имеет место равенство

$$Q_n(\mathbf{z}) = \Psi_n(\mathbf{z}) + \Psi_n(\mathbf{z}^*) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\mathbf{z}^* = (z, \mp \sqrt{z^2 - 1})$ при $\mathbf{z} = (z, \pm \sqrt{z^2 - 1})$, величина $\delta \in (0, 1)$ и зависит от ρ .

Доказательство теоремы 1 проводится традиционным методом исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов (см., например, [9], [5], [10]), основанным на изучении сингулярного интегрального уравнения Наттолла [3]. Очевидно, что соотношения (1)–(3) являются следствиями (4).

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Если $\rho(x) = e^{-ibx}$, $b > 0$, то:

1) при $n \geq n_0$ все нули $z_{k,n}$, $k = 0, \dots, n-1$, многочлена Q_n простые, лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и удовлетворяют неравенству $c_1/n^2 < g(z_{k,n}, \infty) < c_2/n$, где постоянные $c_1, c_2 > 0$ зависят от b , $g(z, \infty)$ – функция Грина области D ;

2) равномерно по $k = 0, \dots, n-1$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$z_{k,n} = x_{k,n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + i\left(\frac{b}{8n} \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty; \quad (5)$$

3) для нулей Q_n , ближайших к концам отрезка Δ , имеем:

$$z_{0,n} = x_{0,n} + i\frac{b\pi^2}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad z_{n-1,n} = x_{n-1,n} + i\frac{b\pi^2}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Соотношение (5) означает, что образы $\zeta_{k,n} = \Phi(z_{k,n})$ нулей Q_n в плоскости переменного ζ асимптотически при $n \rightarrow \infty$ располагаются в корнях $2n$ -й степени из -1 .

Аналоги теорем 1 и 2 справедливы и для многочленов $Q_n(z; f)$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций вида $f = \hat{\rho} + r$, где $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(\Delta)$. Отметим, что первый результат о сильной асимптотике m полюсов диагональных аппроксимаций Паде функции вида $f = \hat{\rho} + r$ в малой окрестности m -кратного полюса f получен в [5; § 2, п. 3, теорема 3]: асимптотически эти полюсы располагаются в вершинах правильного m -угольника.

Список литературы

- [1] С. Н. Бернштейн, *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*, Гостехиздат Украины, Харьков, 1937. [2] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962. [3] J. Nuttall, *Constr. Approx.*, **6:2** (1990), 157–166. [4] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, *J. Approx. Theory*, **129:2** (2004), 129–166. [5] А. А. Гончар, С. П. Суетин, *Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа*, Современные проблемы математики, **5**, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, М., 2004. [6] А. А. Гончар, *Матем. сб.*, **97:4** (1975), 607–629. [7] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988. [8] J. Nuttall, *J. Approx. Theory*, **42:4** (1984), 299–386. [9] С. П. Суетин, *УМН*, **57:1** (2002), 45–142. [10] С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **198:6** (2007), 107–138.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией

08.06.2007