Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Теорема о глобальном гомеоморфизме
для конформно-гиперболических многообразий, *УМН*,
2007, том 62, выпуск 4, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:14:24

Теорема о глобальном гомеоморфизме для конформно-гиперболических многообразий

В. А. Зорич

1. Введение. *Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.*

Это утверждение (часто называемое теоремой о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных отображений) было сформулировано М. А. Лаврентьевым [1] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [2]. Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. обзоры [3], [4]).

Переход от погружений евклидова пространства к общему случаю погружений римановых многообразий [5], [6] стимулировал появление следующей конформно-инвариантной формы исходной теоремы, связанной с асимптотической геометрией и конформной классификацией римановых многообразий [7].

Для глобальной инъективности квазиконформного погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ риманова многообразия M^n в односвязное риманово многообразие N^n при $n > 2$ достаточно, чтобы многообразие M^n имело конформно-параболический тип.

В [3], [4], однако, высказывалось предположение, что теорема о глобальном гомеоморфизме, по-видимому, имеет место и для определенных классов многообразий конформно-гиперболического типа.

Здесь мы хотим привести пример такого типа теоремы и высказать некоторые соображения, касающиеся общего случая.

2. Формулировка основного результата.

ТЕОРЕМА. *Пусть D^k – диск размерности $k \leq n - 2$ в пространстве $\mathbb{R}^n$; U – некоторая окрестность множества D^k в $\mathbb{R}^n$; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, локально обратимое и квазиконформное вне D^k . Если $n > 2$, то отображение f обратимо в некоторой окрестности каждой точки множества D^k .*

СЛЕДСТВИЕ. *Если непрерывное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ локально обратимо и квазиконформно вне некоторого отрезка, диска D^k конечного радиуса, луча или k -мерной полуплоскости с краем, то при $n > 2$ и $k \leq n - 2$ отображение f обратимо глобально (т. е. f – квазиконформная биекция).*

3. Схема доказательства. Из общих свойств квазирегулярных отображений (см., например, [8], [9]) следует, что отображение f квазирегулярно в U и имеет конечный индекс в каждой точке особого множества D^k .

Учитывая это, из топологических соображений сначала получим локальную обратимость отображения f в точках края диска D^k . После этого, очевидно, можно будет перейти к меньшему множеству и, повторяя процедуру, свести все к уже известному случаю [4], [10], когда диск вырождается в точку.

Для наглядности разберем сначала ситуацию, когда $k = 1$, а $n = 3$ (конечный отрезок I прямой в трехмерном пространстве).

Пусть o – точка края (конец) нашего отрезка. Рассмотрим сферу $S^2(o, r)$ радиуса r с центром o . Если радиус r достаточно мал, то отображение f не принимает на $S^2(o, r)$ значения $f(o)$ и ограничение f на $S^2(o, r)$ локально инъективно всюду, кроме точки пересечения сферы $S^2(o, r)$ и отрезка I . Образ отображения $f|_{S^2(o, r)}$ вне точки $f(o)$ можно гомотопировать в сферу с центром $f(o)$, сохраняя свойство локальной инъективности отображения f (точнее, гомотопируемого отображения). Тогда получим непрерывное отображение сферы S^2 в себя, локально инъективное

вне единственной точки, что возможно только, когда оно – гомеоморфизм. Но тогда ограничение исходного отображения f на шар $B^3(o, r)$, сохраняя ориентацию, имеет индекс 1, т.е. локально гомеоморфно.

Если $k = n - 2$, то при $n \geq 3$ можно теперь действовать по индукции, учитывая, что пересечение малой гиперболы пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке края особого множества (диска D^k) и самого этого множества с топологической точки зрения есть D^{k-1} .

Если же $k < n - 2$, то при $n \geq 3$ дело упрощается тем, что удаление множества коразмерности 3 и выше не меняет фундаментальную группу многообразия, в частности, не меняет его односвязности, если оно исходно было таковым. В нашем случае рассматривается сфера, и можно непосредственно воспользоваться теоремой о монодромии в ситуации, когда имеется непрерывное отображение сферы в себя, локально инъективное вне множества коразмерности 3 или выше.

Следствие теперь получается прямой ссылкой на исходную теорему о глобальном гомеоморфизме, приведенную в начале этой заметки.

4. Комментарий. В теореме мы полагали, что исходное отображение определено и непрерывно на особом множестве D^k , хотя есть основания считать, что эти предположения излишни. Например, в [9] показано, что если ограниченное квазирегулярное отображение определено вне некоторого множества достаточно большой коразмерности, то отображение автоматически продолжается на такое множество, оставаясь квазирегулярным.

В теореме указан модельный случай особого множества – диск D^k размерности $k \leq n - 2$. Ясно, однако, что топологический эквивалент D^k тут тоже допустим.

Полезным дополнением к рассмотренной теореме была бы сформулированная ниже лемма. В сочетании с уже развитой при доказательстве исходной теоремы о глобальном гомеоморфизме техникой, она позволяет доказать аналогичную теорему, например, в случае отображения в себя односвязного многообразия размерности $n \geq 3$, имеющего абсолют размерности $k < n - 1$.

ЛЕММА. При непостоянном квазирегулярном отображении открытых римановых многообразий размерность абсолюта многообразия образа не превосходит размерности абсолюта многообразия прообраза.

Список литературы

- [1] М. А. Лаврентьев, Докл. АН СССР, **20**:4 (1938), 241–242. [2] В. А. Зорич, Матем. сб., **74**:3 (1967), 417–433. [3] V. A. Zorich, Quasiconformal space mappings, Lecture Notes in Math., **1508**, Springer, Berlin, 1992, 132–148. [4] В. А. Зорич, УМН, **57**:3 (2002), 3–28. [5] M. Gromov, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (Stony Brook, 1978), Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981, 183–213. [6] M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Progr. Math., **152**, Birkhäuser, Boston, 1999. [7] В. А. Зорич, Функци. анализ и его прилож., **34**:3 (2000), 37–48. [8] Ю. Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Наука, Новосибирск, 1982. [9] T. Iwaniec, L. Migliaccio, L. Nania, C. Sbordone, Math. Scand., **75**:2 (1994), 263–279. [10] В. А. Зорич, УМН, **56**:4 (2001), 147–148.

В. А. Зорич (V. A. Zorich)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vzor@glasnet.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
08.05.2007