Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Пятышев, Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:45:09

Пример ограниченного аппроксимативно компактного множества, не являющегося локально компактным

И. А. Пятышев

Пусть M – некоторое подмножество банахова пространства X . Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ называется минимизирующей для элемента $x \in X$, если $\|z_n - x\| \rightarrow \rho(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество M *аппроксимативно компактно*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M .

Понятие аппроксимативно компактного множества было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [1] и играет важную роль в теории приближений в нормированных пространствах [2]. Свойства аппроксимативно компактных множеств исследовались многими авторами: см., например, работы [3]–[6].

Всякое ограниченно компактное множество (т. е. множество, пересечение которого с любым замкнутым шаром компактно) является аппроксимативно компактным.

В работе [5] доказано, что в любом бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве существует ограниченное аппроксимативно компактное, но не компактное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество M банахова пространства X называется *локально компактным*, если любая точка этого множества имеет некоторую замкнутую окрестность, пересечение которой с M компактно.

Цель настоящей заметки – показать, что свойства аппроксимативной компактности и локальной компактности не следуют друг из друга.

В произвольном банаховом пространстве несложно построить пример локально компактного, но не аппроксимативно компактного множества. Для этого на единичной сфере достаточно взять счетную последовательность таких элементов x_n , что расстояние между любыми двумя из них больше $1/2$ (см., например, [7; гл. 4, § 6]). Множество $M = \{x_n\}$ локально компактно, но не аппроксимативно компактно: для элемента 0 последовательность $\{x_n\}$ является минимизирующей в M , но из нее нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

ТЕОРЕМА. В любом бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве существует ограниченное аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество.

Доказательство существенно использует конструкцию из работы [5]. Отметим, что построенное в [5] аппроксимативно компактное множество является локально компактным.

Пусть $\{s_n\}$ – счетное множество, всюду плотное на единичной сфере S бесконечномерного сепарабельного банахова пространства X . Пусть Γ_n – замкнутая гиперплоскость, опорная к сфере S в точке s_n , а $\Gamma'_n = \{x \in X : x + s_n \in \Gamma_n\}$ – соответствующее гиперподпространство. Для каждого n в подпространстве $\Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 \cap \dots \cap \Gamma'_n$ возьмем какой-нибудь вектор x_n с $\|x_n\| = 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: для любого $x \in X$ и любой числовой последовательности $\{t_n\}$ имеет место неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - t_n x_n\| \geq \|x\|. \quad (1)$$

Действительно, если $x = s_k$, то при $n \geq k$ имеем $s_k - t_n x_n \in \Gamma_k$, откуда $\|s_k - t_n x_n\| \geq 1 = \|s_k\|$, неравенство (1) верно. Следовательно, это неравенство верно и для $x = ts_k$ при любых $t > 0$ и k . Поскольку элементы вида ts_k всюду плотны в пространстве X , неравенство (1) имеет место для любого $x \in X$.

Положим $y_n = s_n/n$, $n = 1, 2, \dots$.

Докажем, что множество $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, x_n] \cup \{y_n\})$ – искомое (здесь $[a, b] = \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\}$).

Очевидно, что множество M ограничено. Оно не локально компактно: для любого $r > 0$ замкнутая r -окрестность точки $0 \in M$ содержит последовательность rx_n , из которой нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность. Действительно, если элемент a является предельной точкой для этой последовательности, то $\|a\| = r$ и неравенство (1) для него не выполняется.

Покажем, что множество M аппроксимативно компактно. Пусть $x \in X$ и некоторая последовательность $\{z_n\} \subset M$ является минимизирующей для x . Если $x = 0$, то $z_n \rightarrow 0$. Если же $x \neq 0$, то для некоторого y_k имеем $\|x - y_k\| < \|x\|$, а значит, $\rho(x, M) < \|x\|$. Но тогда в силу неравенства (1) и того, что $y_n \rightarrow 0$, последовательность z_n пробегает по конечному набору точек y_n и отрезков $[0, x_n]$, а значит, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Теорема доказана.

Остается неясным, существует ли аппроксимативно компактное, но не локально компактное множество в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве. Неизвестен ответ и на более специальный вопрос: во всяком ли банаховом пространстве существует (выпуклое) аппроксимативно компактное тело? В работе [6] такое тело построено в произвольном рефлексивном пространстве, а в работе [8] – в пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей.

Список литературы

- [1] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, *Докл. АН СССР*, **140**:3 (1961), 522–524. [2] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188. [3] I. Singer, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **9**:2 (1964), 167–177. [4] С. В. Конягин, И. Г. Царьков, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 5, 20–27. [5] П. А. Бородин, *УМН*, **49**:4 (1994), 157–158. [6] П. А. Бородин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 4, 19–21. [7] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989. [8] И. А. Пятышев, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 3, 57–59.

И. А. Пятышев (I. A. Pyatyshev)
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
08.06.2007