Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Результаты и деревья, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:20:14

Результаты и деревья

Г. Г. Ильята

Матричная теорема о деревьях (в классическом варианте представляющая число остовных деревьев графа как минор его матрицы Лапласа L) представляет минор матрицы с нулевой суммой столбцов как сумму весов деревьев в полном графе, веса ребер которого равны элементам матрицы (см. [1]). В детерминантных формулах для результата многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ от n переменных появляются матрицы вида $(\text{res}_{(f_1, \dots, f_n)}(g_j b_i f_0))$ для некоторых многочленов g_j и базиса $\{b_i\}$ в $C[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$ [2]. Добавляя к матрице строку и столбец, отвечающие любым многочленам g_0 и b_0 , и домножая столбцы на коэффициенты их линейной зависимости, мы можем применить к результату матричную теорему о деревьях и представить результат как сумму весов деревьев. В заметке изучается наиболее близкий к теории графов частный случай такого подхода к вычислению результата. А именно, мы обобщим в нескольких направлениях следующее замечание: матрица Лапласа полного n -графа с точностью до перестановки строк совпадает с матрицей Кронекера многочленов $c_{n-1}(x) = (x^n - 1)/(x - 1)$ и $c'_{n-1}(x)$ (в частности, дискриминант многочлена $c_{n-1}(x)$ с точностью до знака равен n^{n-2}). Матрица Кронекера многочленов $f(x), g(x)$ ($\deg(g) < \deg(f)$) – это матрица (a_{i+j-2}) , где $g/f = a_0 x^{-1} + a_1 x^{-2} + \dots$; минор такой матрицы равен результату [3]. Мы найдем графы, число деревьев в каждом из которых с точностью до знака равно результату явно определенных многочленов. Для любого графа мы определим аналоги матриц Безу и Фробениуса [3], миноры которых равны числу деревьев графа. Матрице L_k , составленной из k -миноров матрицы Лапласа полного n -графа, мы придадим смысл в теории симплициальных комплексов (деревья обобщаются как ациклические комплексы [4]) и в теории результатов. Задача: найти подобные интерпретации для результатов действия на матрицу Лапласа других симметризаторов Юнга.

Отметим еще несколько параллелей в теориях графов и результатов. Порядок критической группы графа (дискретного аналога якобиана римановой поверхности) равен числу его деревьев [5]. Аналогичная группа для результата появляется в [6]. Аналог формулы $L = II^t$ (I – матрица инцидентности графа) для дискриминанта имеется в [7]. Согласно [8], $\text{Res}(f(x^k), g(x^k)) = (\text{Res}(f(x), g(x)))^k$. Можно показать, что в теории графов эта формула отвечает следующему очевидному факту: сумма весов деревьев букета графов равна произведению сумм весов деревьев, составляющих букет графов. Матрица Кронекера для дискриминанта многочлена равна VV^t (V – матрица Вандермонда для корней этого многочлена). Согласно [9], обобщенную матрицу V для системы $x_1^{a_{1i}} \dots x_n^{a_{ni}} = 1$, $i = 1, \dots, n$, можно интерпретировать как таблицу характеров абелевой группы. Из соотношений ортогональности для характеров вытекает, что VV^t получается из диагональной матрицы перестановкой строк. Удаление корня $(1, \dots, 1)$ приводит к вычитанию 1 из элементов матрицы VV^t , и мы приходим к матрице Лапласа полного графа.

Специализируя для $c_{n-1}(x)$ любую формулу для дискриминанта, получим формулу для числа деревьев полного n -графа. Интересно было бы найти комбинаторные доказательства этих формул, например, построить биекции между популярными в последние годы парковочными функциями и факторгруппами целочисленной решетки по действию матриц из детерминантных представлений дискриминанта. Сдвиг переменной на любое число q не меняет результат, что позволяет включить формулы для n^{n-2} в однопараметрические семейства (действие сдвига на матрицу Кронекера известно как q -биномиальное преобразование [10]).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 04-01-00762 и НШ-4719.2006.1.

Для $S = (m_{n-1}, \dots, m_0) \in \{0, 1\}^n$, $0 \leq k < n$, обозначим через $P_{k,S}$ многочлен $(x^k \sum m_j - \sum m_j x^j) / (x - 1)$. Назовем S k -симметричным, если последовательность $m_{k-1}, \dots, m_0, m_{n-1}, \dots, m_0, m_{n-1}, \dots, m_{k+1}$ центрально симметрична. Обозначим через $G_{k,S}$ n -граф, в котором есть ребро ij , $i + j \leq n$, если и только если $(i + j - 1)$ -й элемент последовательности $m_{k-1}, \dots, m_0, m_{n-1}, \dots, m_{k+1}$ равен 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если S k -симметрично, то результат многочленов $c_{n-1}(x)$, $P_{k,S}(x)$ с точностью до знака равен числу деревьев графа $G_{k,S}$.

Строки матрицы Петри P графа [11] отвечают его n нумерованным вершинам (ориентируем граф по убыванию номеров вершин), а столбцы – ребрам (парам вершин). В столбце ij , $i < j$, стоит 1 на местах $i, \dots, j - 1$ и 0 на оставшихся местах. Обозначим через C_n n -матрицу, у которой $(C_n)_{ii} = -(C_n)_{jj-1} = 1$ для всех i, j и остальные элементы равны 0. Очевидно, что $I = C_n P$. Назовем матрицей Безу (Фробениуса) графа матрицу PP^t (PI^t) (матрицу Лапласа II^t в этом контексте можно назвать матрицей Кронекера графа). Названия объясняются формулами, связывающими матрицы Безу, Кронекера и Фробениуса пар многочленов f, g и $f, 1$ [3], а также тем фактом, что матрица Кронекера (Безу) многочленов $c_n, 1$ с точностью до перестановки строк совпадает с C_n (C_n^{-1}).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Левые верхние $(n - 1)$ -миноры матриц Безу и Фробениуса графа равны числу деревьев этого графа. 2) Матрица Безу графа симметрична и ее элемент ij для $i \leq j$ равен числу ребер ps , для которых $p \leq i \leq j < s$. 3) Элемент ij матрицы Фробениуса графа равен разности числа ребер is , $i < s$, для которых $j < s$, и числа ребер pi , $p < i$, для которых $p \leq j$.

Обозначим через I_k матрицу инцидентности $(k - 1)$ -мерных и k -мерных граней в полном k -мерном комплексе на n вершинах [4]. Аналогично работе [4], следующий факт можно обобщить и для деформированной матрицы Лапласа $L(q_1, \dots, q_n)$ ($L(q_1, \dots, q_n)_{ii} = (\sum q_j - q_i)q_i$, $L(q_1, \dots, q_n)_{ij} = -q_i q_j$, $L(1, \dots, 1) = L_1 = L$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $L_k = I_k I_k^t \text{diag}(n^{k-1}, \dots, n^{k-1})$.

Элементы матрицы, составленной из k -миноров матрицы Кронекера, можно определить аналогично элементам самой матрицы Кронекера, а именно, как коэффициенты некоторого ряда. Применяя тождество Бине–Коши к произведению матрицы (a_{j-i}) размера $k \times \infty$ и матрицы (x_j^{-i}) размера $\infty \times k$, получим разложение функции $(g(x_1) \cdots g(x_k)) / (f(x_1) \cdots f(x_k))$ в ряд по функциям Шура от $x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}$ (частный случай ряда Ньютона [12]), среди коэффициентов которого находятся все k -миноры матрицы Кронекера.

Список литературы

- [1] J. Moon, *Discrete Math.*, **124**:1–3 (1994), 163–171. [2] B. Mourrain, V. Pan, *J. Complexity*, **16**:1 (2000), 110–180. [3] G. Orzech, *Linear and Multilinear Algebra*, **16**:1–4 (1984), 275–282. [4] G. Kalai, *Israel J. Math.*, **45**:4 (1983), 337–351. [5] M. Baker, S. Norine, *Riemann–Roch and Abel–Jacobi on a finite graph*, [ArXiv:math.CO/0608360](https://arxiv.org/abs/math.CO/0608360). [6] Д. К. Фаддеев, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), 164. [7] B. Parlett, *Linear Algebra Appl.*, **355**:1–3 (2002), 85–101. [8] J. McKay, S.-Sh. Wang, *Arch. Math. (Basel)*, **53**:4 (1989), 347–351. [9] P. Pedersen, B. Sturmfels, *Algorithms in algebraic geometry and applications* (Santander, Spain, 1994), *Progr. Math.*, **143**, Birkhäuser, Basel, 1996, 307–316. [10] M. Spivey, L. Steil, *J. Integer Seq.*, **9**:1 (2006), 06.1.1. [11] M. Gordon, E. Wilkinson, *Pacific J. Math.*, **51**:2 (1974), 451–453. [12] Г. Г. Ильята, *УМН*, **60**:2 (2005), 165–166.

Г. Г. Ильята (G. G. Il'yuta)
Московский государственный открытый
педагогический университет
E-mail: ilyuta@mccme.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде
Принято редколлегией
08.05.2007