Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лотоцкий, Б. Л. Розовский, Пассивное скалярное уравнение в турбулентном несжимаемом гауссовом поле скоростей, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 105–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:10:00

УДК 519.218.1

ПАССИВНОЕ СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ НЕСЖИМАЕМОМ ГАУССОВОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

С. В. Лотоцкий, Б. Л. Розовский

Рассматривается эволюция во времени пассивного скаляра в турбулентном однородном несжимаемом гауссовом потоке. Турбулентная природа потока приводит к негладким коэффициентам соответствующего эволюционного уравнения. С помощью разложения винеровского хаоса строится сильное (в вероятностном смысле) решение уравнения и изучаются свойства этого решения. В числе полученных результатов – определенная L_p -регулярность решения и представляющая формула типа Фейнмана–Каца (или лагранжева). Результаты применимы и к вязким, и к консервативным потокам.

Библиография: 14 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	105
2. Пассивный скаляр в гауссовом поле	107
3. Обзор винеровского хаоса	109
4. Решение уравнения пассивного скаляра с помощью винеровского хаоса	110
5. Лагранжево представление решения	116
Список литературы	119

1. Введение

Если $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$ – гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^d$, то существует единственное классическое решение $\theta = \theta(t, x)$ невязкого уравнения переноса

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0, \quad t > 0, \quad \theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (1.1)$$

Это решение можно представить в виде

$$\theta(t, x) = \theta_0(X_{t,0}^x), \quad (1.2)$$

Работа первого автора была частично поддержана Sloan Research Fellowship, NSF CAREER award DMS-0237724 и ARO Grant DAAD19-02-1-0374; работа второго автора была частично поддержана ONR Grant N0014-03-1-0027 и ARO Grant DAAD19-02-1-0374.

где $X = X_{s,t}^x$ – поток, порожденный векторным полем $\mathbf{v}$:

$$\frac{dX_{s,t}^x}{dt} = \mathbf{v}(t, X_{s,t}^x), \quad t > s, \quad X_{s,s}^x = x. \quad (1.3)$$

Если поле скоростей $\mathbf{v}$ не является гладким как функция x , то, вообще говоря, для уравнения (1.1) нет теорем существования, в то время как уравнение (1.3) может иметь более одного решения. Следовательно, связь между уравнениями (1.1) и (1.3) становится неясной, и представление решения в виде (1.2) сомнительно.

Для негладких векторных полей $\mathbf{v}$ анализ любого из уравнений (1.1) и (1.3) становится невозможным без дальнейшей спецификации функции $\mathbf{v}$. В [11] показано, что во многих физических моделях, таких, как турбулентные потоки и т. д., функцию $\mathbf{v} = (v^1(t, x), \dots, v^d(t, x))$ можно представить в виде

$$v^i(t, x) = \sum_{k \geq 1} \sigma_k^i(x) \dot{w}_k(t), \quad (1.4)$$

где каждая функция $\sigma_k^i(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера по x с показателем, меньшим единицы, причем имеет место равенство $\sum_{k \geq 1} \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(y) = C^{ij}(x - y)$ для некоторых функций C^{ij} , а $(w_k, k \geq 1)$ – независимые стандартные броуновские движения на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Тогда уравнение (1.3) становится стохастическим дифференциальным уравнением

$$d(X_{s,t}^x)^i = \sigma_k^i(X_{s,t}^x) dw_k(t), \quad t > s, \quad (X_{s,s}^x)^i = x^i. \quad (1.5)$$

Вообще говоря, это уравнение не имеет сильного решения, т.е. функция $X_{s,t}^x$, вообще говоря, не является измеримой относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{s,t}^W$, порожденной приращениями $w_k(v) - w_k(u)$, $s \leq u < v \leq t$, $k \geq 1$. С другой стороны, стандартный факт состоит в том, что, при перечисленных выше предположениях относительно σ_k^i , уравнение (1.5) всегда имеет единственное слабое решение (см., например, [1]).

В [11] авторы предприняли систематическое изучение семейства операторов

$$S_{s,t}: f(x) \mapsto \mathbf{E}(f(X_{s,t}^x) \mid \mathcal{F}_{s,t}^W) \quad (1.6)$$

для подходящих функций f , где X – слабое решение (1.5). Если функции σ_k^i липшицевы, то функция $X_{s,t}^x$ является $\mathcal{F}_{s,t}^W$ -измеримой. Кроме того, в [13] показано, что в этом случае функция $\theta(t, x) = \theta_0(X_{t,0}^x) = S_{t,0}\theta_0(x)$ является единственным обобщенным решением стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (с частными производными)

$$d\theta + \sum_{i,k} \sigma_k^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} \circ dw_k, \quad t > 0, \quad \theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (1.7)$$

Если функции σ_k^i не являются липшицевыми, то связь между операторами $S_{s,t}$ и уравнением (1.7) становится неясной. В частности, вообще говоря, уравнение (1.7) не имеет решения в традиционном смысле, ни в классическом, ни в обобщенном, и даже если

определить решение формулой $S_{t,0}\theta_0(x)$ (ср. с [5]), неясно, в каком смысле будет выполняться уравнение. Наконец, никакие теоремы существования не указывают пути вычисления условного ожидания в (1.6) для данного конкретного векторного поля $\mathbf{v}$.

Цель настоящей статьи – показать, что если векторное поле $\mathbf{v}$ не является гладким, но по-прежнему бездивергентно в обобщенном смысле и если $\theta_0 \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $2 \leq p \leq \infty$, то уравнение (1.7) имеет единственное сильное обобщенное решение. Более точно, показано, что существует случайное векторное поле $\theta = \theta(t, x)$, удовлетворяющее следующим условиям для любого $t > 0$:

- (i) $\theta(t, \cdot) \in L_p(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, $2 \leq p \leq \infty$,
- (ii) $\theta(t, \cdot)$ является $\mathcal{F}_{0,t}^W$ -измеримой,
- (iii) для любой гладкой функции φ с компактным носителем соотношение

$$(\theta, \varphi)(t) = (\theta_0, \varphi) + \sum_{i,k} \int_0^t \left(\theta, \sigma_k^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)(s) \circ dw_k(s) \quad (1.8)$$

выполняется с вероятностью 1, где $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Это случайное поле допускает лагранжево представление

$$\theta(t, x) = \mathbf{E}(\theta_0(X_{t,x}(0)) \mid \mathcal{F}_t^W) \quad (\text{Р-п.н.}), \quad (1.9)$$

где

$$X_{t,x}(s) = x + \int_s^t \sigma(X_{t,x}(r)) d\widetilde{W}(r) + \sqrt{2\nu}(\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(s));$$

здесь $\widetilde{W}$ – стандартное броуновское движение, независимое от W . Решение уравнения (1.8), как и его моменты, можно вычислить с помощью разложения винеровского хаоса (см. также замечание 5.6).

2. Пассивный скаляр в гауссовом поле

Рассмотрим следующее уравнение переноса для описания эволюции пассивного скаляра θ в случайном поле скоростей $\mathbf{v}$:

$$\dot{\theta}(t, x) = \frac{1}{2}\nu\Delta\theta(t, x) - \mathbf{v}(t, x) \cdot \nabla\theta(t, x) + f(t, x); \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d > 1. \quad (2.1)$$

В (2.1) символы Δ и ∇ означают соответственно оператор Лапласа и градиент. Наш интерес к этому уравнению вызван продолжающимися успехами в изучении турбулентной задачи переноса (см. [5]–[7], [10] и т. д.)

Предположим, что в (2.1) векторное поле $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, является изотропным и гауссовым, с нулевым средним и с ковариацией $\mathbf{E}(v^i(t, x)v^j(s, y)) = \delta(t - s)C^{ij}(x - y)$, где $C = (C^{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, d$ – матричнозначная функция. Хорошо известно (см., например, [11]), что в физически интересных моделях, таких, например, как скорость Крайчана [10], матричнозначная функция $C = C(x)$ имеет преобразование Фурье $\widehat{C} = \widehat{C}(z)$, равное

$$\widehat{C}(z) = \frac{A_0}{(1 + |z|^2)^{(d+\alpha)/2}} \left(a \frac{zz^*}{|z|^2} + \frac{b}{d-1} \left(I - \frac{zz^T}{|z|^2} \right) \right), \quad (2.2)$$

где z^* – вектор-строка $(z_1, \dots, z_d)$, z – соответствующий вектор-столбец, $|z|^2 = z^*z$, I – единичная матрица, $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $A_0 > 0$ – вещественные числа. Как и в [11], предположим, что $0 < \alpha < 2$.

Прямое вычисление показывает (ср. с [2]), что векторное поле $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^d)$ может быть записано в виде

$$v^i(t, x) = \sum_{k \geq 0} \sigma_k^i(x) \dot{w}_k(t), \quad (2.3)$$

где $\dot{w}_k(t)$, $k \geq 1$, – независимые стандартные гауссовы белые шумы и $\{\sigma_k, k \geq 1\}$ – полная ортонормированная система в пространстве H_C (гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, соответствующим функции-ядру C). Пространство H_C есть соболевское пространство $H_2^{(d+\alpha)/2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ или его часть. Из (2.3) следует, что $\sum_k \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(y) = C^{ij}(x - y)$ для всех x, y ; в частности, $\sigma_k^i(x) \sigma_k^j(x) = C^{ij}(0)$ для всех x .

Если $a > 0$ и $b > 0$, то матрица $\hat{C}$ обратима и

$$H_C = \left\{ f \in \mathbb{R}^d : \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}^*(z) \hat{C}^{-1}(z) \hat{f}(z) dz < \infty \right\} = H_2^{(d+\alpha)/2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d),$$

поскольку $\|\hat{C}(z)\| \sim (1 + |z|^2)^{-(d+\alpha)/2}$.

Если $a > 0$ и $b = 0$, то

$$H_C = \left\{ f \in \mathbb{R}^d : \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(z)|^2 (1 + |z|^2)^{(d+\alpha)/2} dz < \infty; z z^* \hat{f}(z) = |z|^2 \hat{f}(z) \right\}$$

есть подмножество градиентных полей в $H_2^{(d+\alpha)/2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, т.е. семейство таких векторных полей f , что $\hat{f}(z) = z \hat{F}(z)$ для некоторой скалярной функции $F \in H_2^{(d+\alpha+1)/2}(\mathbb{R}^d)$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то

$$H_C = \left\{ f \in \mathbb{R}^d : \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(z)|^2 (1 + |z|^2)^{(d+\alpha)/2} dz < \infty; z^* \hat{f}(z) = 0 \right\}$$

есть подмножество бездивергентных полей в $H_2^{(d+\alpha)/2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

По теоремам вложения, каждая функция σ_k^i ограничена и непрерывна на $\mathbb{R}^d$; действительно, каждая функция σ_k^i удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha/2$. Кроме того, будучи элементом соответствующего пространства H_C , каждая функция σ_k является градиентным полем при $b = 0$ и бездивергентна при $a = 0$.

Чтобы упростить дальнейшее изложение и сделать модель (2.1) более значимой физически, мы рассмотрим бездивергентное векторное поле и предположим, что исходный стохастический дифференциал в (2.3) есть дифференциал в смысле Стратоновича. В этих предположениях уравнение (2.1) принимает вид

$$d\theta(t, x) = \frac{1}{2} \nu \Delta \theta(t, x) dt - \sum_k \sigma_k(x) \cdot \nabla \theta(t, x) \circ dw_k(t). \quad (2.4)$$

Если функции σ_k бездивергентны, то есть эквивалентная формулировка Ито:

$$d\theta(t, x) = \frac{1}{2} (\nu \Delta \theta(t, x) + C^{ij}(0) D_i D_j \theta(t, x)) dt - \sigma_k^i(x) D_i \theta(t, x) dw_k(t), \quad (2.5)$$

где $D_i = \partial / \partial x^i$ и проводится суммирование по повторяющимся индексам.

Мы будем изучать уравнение (2.5) в следующих предположениях.

- A1.** Существует фиксированный стохастический базис $\mathbb{F} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, удовлетворяющий обычным условиям, и $(w_k(t), k \geq 1, t \geq 0)$ – семейство независимых стандартных винеровских процессов на $\mathbb{F}$.
- A2.** Для любого k векторное поле σ_k является бездивергентным элементом соболевского пространства $H_2^{(d+\alpha)/2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $0 < \alpha < 2, d \geq 2$.
- A3.** Для любых x, y в $\mathbb{R}^d$ имеем $\sum_k \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(y) = C^{ij}(x - y)$, и матричнозначная функция $C = C(x)$ удовлетворяет (2.2).
- A4.** Начальное условие θ_0 неслучайно и принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$; $\nu \geq 0$ – вещественное число.

Наша цель – установить существование, единственность и свойства регулярности решения уравнения (2.5), используя винеровский хаос.

3. Обзор винеровского хаоса

Пусть $\mathbb{F} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – стохастический базис, удовлетворяющий обычным условиям. Рассмотрим на $\mathbb{F}$ семейство $(w_k(t), k \geq 1, t \geq 0)$ независимых стандартных винеровских процессов. При фиксированном $0 < T < \infty$ обозначим через $\mathcal{F}_T^W$ сигма-алгебру, порожденную $w_k(t), k \geq 1, 0 < t < T$, и обозначим через $L_2(\mathcal{F}_T^W)$ семейство $\mathcal{F}_T^W$ -измеримых квадратично интегрируемых случайных величин.

Фиксируем Фурье-базис из косинусов $\{m_k, k \geq 1\}$ в $L_2((0, T))$ с

$$m_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad m_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi(k-1)t}{T}\right), \quad k \geq 2. \quad (3.1)$$

Рассмотрим семейство мультииндексов

$$\mathcal{J} = \left\{ \alpha = (\alpha_i^k, i, k \geq 1), \alpha_i^k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \sum_{i,k} \alpha_i^k < \infty \right\}.$$

Множество $\mathcal{J}$ счетно, и для любого $\alpha \in \mathcal{J}$ лишь конечное число индексов α_i^k отлично от нуля. При $\alpha \in \mathcal{J}$ положим $|\alpha| = \sum_{i,k} \alpha_i^k$, $\alpha! = \prod_{i,k} \alpha_i^k!$ и

$$\xi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{i,k} H_{\alpha_i^k}(\xi_{ik}), \quad \text{где } \xi_{ik} = \int_0^T m_i(s) dw_k(s) \quad (3.2)$$

и

$$H_n(t) = e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2}$$

– n -й многочлен Эрмита. В частности, если $\alpha \in \mathcal{J}$ удовлетворяет условию $\alpha_i^k = 1$ при $i = j$ и $k = l$ и $\alpha_i^k = 0$ в других случаях, то $\xi_\alpha = \xi_{jl}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пространство $L_2(\mathcal{F}_T^W)$ называется *пространством винеровского хаоса*, а N -м *подпространством винеровского хаоса* называется подпространство $L_2(\mathcal{F}_T^W)$, порожденное элементами ξ_α с $|\alpha| = N$.

Следующая теорема – классический результат Камерона и Мартина [4].

ТЕОРЕМА 3.2. *Набор $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathcal{J}\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\mathcal{F}_T^W)$.*

Кроме исходного источника [4], доказательство этой теоремы можно найти и во многих других местах, например, в [8]. По теореме 3.2, каждый элемент v пространства $L_2(\mathcal{F}_T^W)$ можно представить в виде $v = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} v_\alpha \xi_\alpha$, где $v_\alpha = \mathbf{E}(v \xi_\alpha)$.

4. Решение уравнения пассивного скаляра с помощью винеровского хаоса

Продолжая использовать соглашение о суммировании, определим операторы $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\nu \Delta + C^{ij}(0)D_i D_j)$ и $\mathcal{M}_k = \sigma_k^i(x)D_i$. Тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$\theta(t, x) = \theta_0(x) + \int_0^t \mathcal{A}\theta(s, x) ds + \int_0^t \mathcal{M}_k \theta(s, x) dw_k(s) ds.$$

В этом разделе, начиная отсюда, мы не будем явно указывать зависимость различных функций от x .

Заметим, что для любой функции $f \in H_2^1(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\sum_{k \geq 1} \|\mathcal{M}_k f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = (\sigma_k^j \sigma_k^i D_i f, D_j f) = (C^{ij}(0)D_i f, D_j f), \quad (4.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Так как матрица $C(0)$ положительно определена, то существуют такие положительные числа c_1 и c_2 , что для любой функции $f \in H_2^1(\mathbb{R}^d)$ выполняется соотношение

$$c_1 \|\nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{k \geq 1} \|\mathcal{M}_k f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c_2 \|\nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.2)$$

Равенство (4.1) показывает также, что уравнение (2.5) есть стохастическое параболическое уравнение [14]; оно является суперпараболическим при $\nu > 0$ и вполне вырожденным при $\nu = 0$.

При $\alpha \in \mathcal{J}$ определим функции θ_α следующим образом:

$$\theta_\alpha(t) = \theta_0 I(|\alpha| = 0) + \int_0^t \mathcal{A}\theta_\alpha(s) ds + \int_0^t \sum_{i,k} \sqrt{\alpha_i^k} \mathcal{M}_k \theta_{\alpha^-(i,k)}(s) m_i(s) ds, \quad (4.3)$$

где $\alpha^-(i, k)$ – мультииндекс с компонентами

$$(\alpha^-(i, k))_j^l = \begin{cases} \max(\alpha_i^k - 1, 0), & \text{если } i = j \text{ и } k = l, \\ \alpha_j^l & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ЛЕММА 4.1. *В предположениях А2–А4 система уравнений (4.3) имеет единственное решение, в котором θ_α является гладкой ограниченной функцией x при*

$t > 0$, и если $T_t, t \geq 0$, – полугруппа теплопроводности, порожденная оператором $\mathcal{A}$, то при любом $N \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=N} |\theta_\alpha(t, x)|^2 \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_N} \cdots \int_0^{s_2} |T_{t-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0(x)|^2 ds^N, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $ds^N = ds_1 \cdots ds_N$ и

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=N} |\nabla \theta_\alpha(t, x)|^2 \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_N} \cdots \int_0^{s_2} |\nabla T_{t-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0(x)|^2 ds^N, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $ds^N = ds_1 \cdots ds_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти результаты непосредственно следуют из (4.3) индукцией по $|\alpha|$; подробности можно найти в [12; предложение А.1].

ТЕОРЕМА 4.2. В предположениях **A1–A4** фиксируем $T > 0$ и при $\alpha \in \mathcal{J}$ определим $\theta_\alpha(t)$ и ξ_α формулами (4.3) и (3.2) соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. При любом $\nu \geq 0$ и любом $t \in [0, T]$ ряд

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \theta_\alpha(t) \xi_\alpha \quad (4.6)$$

сходится в $L_2(\Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$ к некоторому процессу $\theta = \theta(t)$.

2. Если $\nu > 0$, то при любом $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ процесс θ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} (\theta, \varphi)(t) &= (\theta_0, \varphi) - \frac{1}{2} \nu \int_0^t (\nabla \theta, \nabla \varphi)(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t C^{ij}(0) (D_i \theta, D_j \varphi)(s) ds - \int_0^t (\sigma_k^i D_i \theta, \varphi) dw_k(s) \end{aligned} \quad (4.7)$$

с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ одновременно, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Кроме того,

$$\mathbb{E} \|\theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) + \nu \int_0^t \mathbb{E} \|\nabla \theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(s) ds = \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.8)$$

3. Если $\nu = 0$, то для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ процесс θ удовлетворяет соотношению

$$(\theta, \varphi)(t) = (\theta_0, \varphi) + \frac{1}{2} \int_0^t C^{ij}(0) (\theta, D_i D_j \varphi)(s) ds + \int_0^t (\theta, \sigma_k^i D_i \varphi) dw_k(s) \quad (4.9)$$

с вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$ одновременно. Кроме того,

$$\mathbb{E} \|\theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) \leq \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Равенства (4.7) и (4.9) означают, что $\theta = \theta(t, x)$ является решением уравнения переноса (2.5) в традиционном смысле теории стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, т.е. это – сильное решение в стохастическом смысле, удовлетворяющее соответствующему уравнению в обобщенном смысле. Это решение также единственно в классе $L_2((0, T) \times \Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$ случайных функций, поскольку любое другое решение будет иметь то же разложение винеровского хаоса. Не входя в подробности, заметим, что на самом деле можно установить единственность в гораздо более широком классе обобщенных случайных функций.

Доказательство теоремы 4.2 проводится в три шага: (1) устанавливаются сходимость ряда (4.6) и соответствующие энергетические оценки; (2) устанавливается предсказуемость θ ; (3) устанавливаются равенства (4.7) и (4.9).

Сходимость ряда (4.6) и соответствующие энергетические оценки (**шаг 1**) вытекают из двух следующих лемм.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что $\nu \geq 0$. Введем*

$$\theta_N(t, x) = \sum_{n=0}^N \sum_{|\alpha|=n} \theta_\alpha(t, x) \xi_\alpha.$$

Тогда для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} E \|\theta_N\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) &= \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - \nu \sum_{n=0}^N \sum_{|\alpha|=n} \int_0^t \|\nabla \theta_\alpha\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(s) ds \\ &- \sum_{k_1, \dots, k_{N+1}=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_2} \|\mathcal{M}_{k_{N+1}} T_{s-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds^N ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1, после интегрирования по x получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=N} \|\theta_\alpha\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) &= \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_N} \cdots \int_0^{s_2} \|T_{t-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds^N. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если $F_N(t) = \sum_{|\alpha|=N} \|\theta_\alpha(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_N(t) &= \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_{N-1}} \cdots \int_0^{s_2} \|\mathcal{M}_{k_N} T_{t-s_{N-1}} \mathcal{M}_{k_{N-1}} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 ds^{N-1} \\ &+ 2 \sum_{k_1, \dots, k_N=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_2} (\mathcal{A} T_{t-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_1} \theta_0, T_{t-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0) ds^N. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Остается заметить, что для любой гладкой функции $f = f(x)$ имеем

$$2(\mathcal{A}f, f) = -\nu \|\nabla f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 - \sum_{k \geq 1} \|\mathcal{M}_k f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Отсюда следует равенство (4.11).

Заметим, что из (4.11) следует и сходимость в $L_2(\Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$ ряда $\sum_{\alpha} \theta_{\alpha}(t) \xi_{\alpha}$ для любого $t \in [0, T]$, и неравенство (4.10).

ЛЕММА 4.5. Если $\nu > 0$, то для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k_1, \dots, k_{N+1}=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_2} \|\mathcal{M}_{k_{N+1}} T_{s-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds^N ds = 0. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F_N(t) = \sum_{k_1, \dots, k_{N+1}=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_2} \|\mathcal{M}_{k_{N+1}} T_{s-s_N} \mathcal{M}_{k_N} \cdots T_{s_2-s_1} \mathcal{M}_{k_1} T_{s_1} \theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 ds^N ds. \quad (4.15)$$

Согласно (4.2) и лемме 4.1 имеем

$$F_N(t) \leq c_2 \sum_{|\alpha|=N} \int_0^t \|\nabla \theta_{\alpha}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(s) ds.$$

Тогда из леммы 4.4 следует, что ряд $\sum_{N \geq 0} F_N(t)$ сходится для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(t) = 0$, откуда следует утверждение леммы.

Заметим, что из (4.11) и (4.14) следует формула (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Анализ приведенных выше доказательств показывает, что заключения лемм 4.1, 4.4 и 4.5 не зависят от выбора базиса $\{m_i, i \geq 1\}$ в $L_2((0, T))$. Иначе говоря, если $\{m_i, i \geq 1\}$ – некоторый ортонормированный базис в $L_2((0, T))$ и процесс θ определен формулой (4.6), то для любого $t \in [0, T]$ величина $\theta(t)$ принадлежит $L_2(\Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$, удовлетворяет соответствующей энергетической оценке и $\mathcal{F}_T^W$ -измерима.

Следующая лемма показывает, что конструкция процесса θ не зависит от выбора базиса $\{m_i, i \geq 1\}$ в $L_2((0, T))$. Эта лемма является также ключом к установлению предсказуемости процесса θ .

ЛЕММА 4.7. Пусть θ – процесс, определенный формулой (4.6), и пусть $\bar{m}_i(t)$, $i \geq 1$, – другой ортонормированный базис в $L_2((0, T))$. Тогда $\theta(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \bar{\theta}_{\alpha}(t) \bar{\xi}_{\alpha}$, где

$$\bar{\xi}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{i,k} H_{\alpha_i^k}(\bar{\xi}_{ik}), \quad \bar{\xi}_{ik} = \int_0^T \bar{m}_i(s) dw_k(s)$$

и коэффициенты $\bar{\theta}_{\alpha}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (4.3) с $\bar{m}_i$ вместо m_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = (h_1(t), \dots, h_N(t))$ – конечный набор ограниченных измеримых функций на $(0, T)$. Введем величину

$$\mathcal{E}(h) = \exp \left(\sum_{k=1}^N \int_0^T h_k(t) dw_k(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_0^T |h_k(t)|^2 dt \right). \quad (4.16)$$

Полагая

$$h_{k,i} = \int_0^T h_k(t) m_i(t) dt,$$

мы можем переписать (4.16) в виде

$$\mathcal{E}(h) = \exp \left(\sum_{i,k} \left(h_{k,i} \xi_{ki} - \frac{1}{2} |h_{k,i}|^2 \right) \right)$$

и получить

$$\mathcal{E}(h) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{h^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} \xi_\alpha, \quad \text{где } h^\alpha = \prod_{i,k} h_{k,i}^{\alpha_{ki}}. \quad (4.17)$$

Если $\theta_h(t) = \mathbf{E}(\theta(t) \mathcal{E}(h))$, то, объединяя (4.3), (4.6) и (4.17), получаем

$$\theta_h(t) = \theta_0 + \int_0^t \mathcal{A} \theta_h(s) ds + \int_0^t h_k(s) \mathcal{M}_k \theta_h(s) ds. \quad (4.18)$$

Далее, пусть $\bar{\theta}_\alpha(t)$ – решение системы уравнений (4.3) с $\bar{m}_i$ вместо m_i . Из замечания 4.6 следует, что для любого $t \in [0, T]$ процесс $\bar{\theta}(t) = \sum_\alpha \bar{\theta}_\alpha(t) \bar{\xi}_\alpha(t)$ является элементом $L_2(\Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$. Кроме того, полагая $\bar{\theta}_h(t) = \mathbf{E}(\bar{\theta}(t) \mathcal{E}(h))$ и замечая, что

$$\mathcal{E}(h) = \exp \left(\sum_{i,k} \left(\bar{h}_{k,i} \bar{\xi}_{ki} - \frac{1}{2} |\bar{h}_{k,i}|^2 \right) \right),$$

где

$$\bar{h}_{k,i} = \int_0^T h_k(t) \bar{m}_i(t) dt,$$

получаем

$$\bar{\theta}_h(t) = \theta_0 + \int_0^t \mathcal{A} \bar{\theta}_h(s) ds + \int_0^t h_k(s) \mathcal{M}_k \bar{\theta}_h(s) ds.$$

Из единственности решения этого параболического уравнения следует равенство $\theta_h(t) = \bar{\theta}_h(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $t \in [0, T]$ и всех конечных наборов $h_1, \dots, h_N$ ограниченных измеримых функций на $(0, T)$. Так как соответствующее семейство элементов $\mathcal{E}(h)$ всюду плотно в $L_2(\mathcal{F}_T^W)$, то для любого $t \in [0, T]$ имеем равенство $\theta(t) = \bar{\theta}(t)$ (как элементов $L_2(\Omega; L_2(\mathbb{R}^d))$). Лемма 4.7 доказана.

Теперь мы можем установить предсказуемость процесса θ (**шаг 2**).

ЛЕММА 4.8. *Процесс θ , определенный формулой (4.6), предсказуем. Если, кроме того, $\nu > 0$, то процесс $\nabla \theta$ тоже предсказуем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t^* \in (0, T)$ и рассмотрим специальный базис $\bar{m}_i(t)$ в $L_2((0, T))$, удовлетворяющий условию, что носитель $\bar{m}_i$ содержится либо в $[0, t^*]$, либо в $[t^*, T]$. Обозначим через $\bar{\xi}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{J}$, соответствующий ортонормированный базис в $L_2(\mathcal{F}_T^W)$. Тогда из определения $\bar{\xi}_\alpha$ следует, что $\bar{\xi}_\alpha = \bar{\xi}_\beta(0, t^*)\bar{\xi}_\gamma(t^*, T)$, где $\bar{\xi}_\beta(0, t^*)$ (компонента, предшествующая t^*) $\mathcal{F}_{t^*}^W$ -измерима и $\bar{\xi}_\gamma(t^*, T)$ (компонента, следующая за t^*) независима от $\mathcal{F}_{t^*}^W$. Соответственно, любой мультииндекс $\alpha \in \mathcal{J}$ будет представлен в виде $\alpha = (\beta, \gamma)$ для учета компоненты, предшествующей t^* , и компоненты, следующей за t^* . По лемме 4.7,

$$\theta(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \bar{\theta}_\alpha(t) \bar{\xi}_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \bar{\theta}_{\beta, \gamma}(t) \bar{\xi}_\beta(0, t^*) \bar{\xi}_\gamma(t^*, T), \quad t \in [0, T],$$

и коэффициенты $\bar{\theta}_\alpha$ удовлетворяют системе уравнений (4.3) с $\bar{m}_i$ вместо m_i . Следовательно, при $t \leq t^*$ функция $\bar{m}_i$ входит в систему тогда и только тогда, когда носитель $\bar{m}_i$ содержится в $[0, t^*]$. Индукцией по β получаем, что $\bar{\theta}_{\beta, \gamma}(t) = 0$ при $t \in [0, t^*]$, если $|\gamma| > 0$. С другой стороны, $E(\bar{\xi}_\gamma(t^*, T) | \mathcal{F}_{t^*}^W) = E\bar{\xi}_\gamma(t^*, T) = 0$ для всех γ с $|\gamma| > 0$. В результате,

$$E(\theta(t^*) | \mathcal{F}_{t^*}^W) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \bar{\theta}_{\beta, 0} \bar{\xi}_\beta(0, t^*) = \theta(t^*),$$

т.е. $\theta(t^*)$ $\mathcal{F}_{t^*}^W$ -измерима для любого $t^* \in (0, T)$. То же рассуждение доказывает предсказуемость $\nabla \theta$ при $\nu > 0$. Лемма 4.8 доказана.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.2, остается установить равенства (4.7) и (4.9) (**шаг 3**). Как в доказательстве леммы 4.7, положим $\theta_h(t) = E(\theta(t) \mathcal{E}(h))$, где $\mathcal{E}(h)$ определено формулой (4.16).

Если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то из уравнения (4.3) следует, что

$$\begin{aligned} (\theta_h, \varphi)(t) &= (\theta(0), \varphi) + \int_0^t (\theta_h, \mathcal{A}^* \varphi)(s) ds \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \sum_{i, k} \int_0^t \sqrt{\alpha_i^k} m_i(s) (\theta_{\alpha - (i, k)}, \mathcal{M}_k^* \varphi)(s) ds, \end{aligned}$$

где $*$ означает переход к сопряженному оператору, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а h^α определено в (4.17). Из свойств предсказуемости и интегрируемости процесса θ следует, что стохастический интеграл $I(t) = \int_0^t (\theta(s), \mathcal{M}_k^* \varphi) dw_k(s)$ корректно определен. Если $\xi_\alpha(t) = E(\xi_\alpha | \mathcal{F}_t^W)$, то, согласно [13], имеем

$$d\xi_\alpha(t) = \sum_{i, k} \sqrt{\alpha_i^k} \xi_{\alpha - (i, k)}(t) m_i(t) dw_k(t). \quad (4.19)$$

Ввиду $\mathcal{F}_t^W$ -измеримости $I(t)$, получаем

$$I_\alpha(t) = E(I(t) E(\xi_\alpha | \mathcal{F}_t^W)) = E(I(t) \xi_\alpha(t)), \quad (4.20)$$

а тогда из формулы Ито следует, что

$$\mathbb{E}(I(t)\xi_\alpha(t)) = \int_0^t \sum_{i,k} \sqrt{\alpha_i^k} m_i(s) (\theta_{\alpha^-(i,k)}, \mathcal{M}_k^* \varphi)(s) ds. \quad (4.21)$$

Из последнего соотношения, в сочетании с (4.17), следует, что

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \frac{z^\alpha}{\alpha!} \sum_{i,k} \int_0^t \sqrt{\alpha_i^k} m_i(s) (\theta_{\alpha^-(i,k)}, \mathcal{M}_k^* \varphi)(s) ds = \mathbb{E} \left(\mathcal{E}(h) \int_0^t (\theta(s), \mathcal{M}_k^* \varphi) dw_k(s) \right).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{E}(h)(\theta, \varphi)(t)) &= (\theta(0), \varphi) + \mathbb{E} \left(\mathcal{E}(h) \int_0^t (\theta, \mathcal{A}^* \varphi)(s) ds \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\mathcal{E}(h) \int_0^t (\theta(s), \mathcal{M}_k \varphi) dw_k(s) \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из равенства (4.22) и из плотности семейства $\{\mathcal{E}(h)\}$ в $L_2(\mathcal{F}_T^W)$, с учетом предположения **A4** и равенства $\mathbb{E}\mathcal{E}(h) = 1$, следует, что

$$(\theta, \varphi)(t) = (\theta(0), \varphi) + \int_0^t (\theta, \mathcal{A}^* \varphi)(s) ds + \int_0^t (\theta, \mathcal{M}_k^* \varphi)(s) dw_k(s). \quad (4.23)$$

Если $\nu = 0$, то последнее равенство совпадает с (4.9). Если $\nu > 0$, то из (4.8) видим, что соотношение (4.23) можно переписать в виде (4.7).

Это завершает доказательство теоремы 4.2.

Теорема Камерона–Мартина 3.2 и теорема 4.2 приводят к следующим простым формулам для вычисления первых и вторых моментов решения пассивных скалярных уравнений (4.7) и (4.9).

СЛЕДСТВИЕ 4.9. В предположениях теоремы 4.2, для любых s и t и почти всех x и y имеем

$$\mathbb{E}\theta(t, x) = \theta_\alpha(t, x) I_{|\alpha|=0}, \quad \mathbb{E}\theta(t, x)\theta(s, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \theta_\alpha(t, x)\theta_\alpha(s, y).$$

5. Лагранжево представление решения

Пусть $\widetilde{W} = (\widetilde{w}_k(s), k = 1, \dots, d, s \geq 0)$ – набор независимых стандартных винеровских процессов. Предположим, что $\widetilde{W}$ независим от $W = (w_k(s), k \geq 1, s \geq 0)$ и что $\nu \geq 0$. При некотором фиксированном $t, t < \infty$, рассмотрим следующее обратное уравнение Ито (см., например, [14]):

$$\begin{aligned} -d_s X_{t,x}^i(s) &= \sqrt{2\nu} \overleftarrow{d\widetilde{w}_i}(s) + \sigma_k^i(X_{t,x}(s)) \overleftarrow{dw_k}(s), \quad s \in [0, t), \\ X_{t,x}^i(t) &= x. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В связи с нашим предположением, что $\operatorname{div}(\sigma_k) = 0$, формы Ито и Стратоновича этого уравнения совпадают.

Так как каждая функция $\sigma_k^i(x)$ непрерывна и, по предположению, $\sigma_k^i(x)\sigma_k^j(x) = C^{ij}(0)$, откуда следует, что для некоторого $\delta > 0$ соотношение $(\sigma(x)\sigma^*(x)y, y) \geq \delta|y|^2$ выполняется для всех $y \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, уравнение (5.1) имеет мартингальное решение, т.е. можно найти стохастический базис $\mathbb{F} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, удовлетворяющий обычным требованиям, множество $B = (\widetilde{W}, W) = (\widetilde{w}_k(s), k = 1, \dots, d, w_k(s), k \geq 1, s \geq 0)$ независимых стандартных винеровских процессов, согласованных с $\{\mathcal{F}_s\}_{s \geq 0}$, и процесс $X_{t,x}(s)$ на $\mathbb{F}$ со значениями в $\mathbb{R}^d$ такие, что $\mathbf{P}$ -почти наверное для всех $s < t$

$$X_{t,x}(s) = x + \int_s^t \sigma(X_{t,x}(r)) d\widetilde{W}(r) + \sqrt{2\nu} (\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(s)). \quad (5.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При $Y_{t,x}(s) = X_{t,x}(t-s)$ и $B_t(s) = B(t) - B(t-s)$ уравнение (5.2) можно переписать следующим образом:

$$Y_{t,x}(s) = x + \int_0^s \sigma(Y_{t,x}(r)) dW_t(r) + \sqrt{2\nu} \widetilde{W}_t(t-s),$$

где $W_t(r) := W(t) - W(t-r)$.

Заметим, что мартингальное (или *слабое*) решение уравнения (5.1) не обязательно $\mathcal{F}_s^B$ -согласовано. Кроме того, нет никакой априорной гарантии того, что решение уравнения (5.1) может быть построено на заранее выбранном стохастическом базисе и для данного набора B винеровских процессов. Грубо говоря, эти ограничения и составляют различие между мартингальным решением и сильным (в вероятностном смысле) решением, которое известно также как траекторное решение; см., например, [9] или [1].

С другой стороны, в теореме 4.2 мы доказали, что уравнение (2.5) имеет единственное $\mathcal{F}_s^W$ -согласованное решение при любом $\nu \geq 0$ на любом стохастическом базисе и для любого набора W независимых стандартных винеровских процессов на этом базисе. В частности, мы можем предположить – и будем предполагать, – что существует единственное траекторное решение $\theta = \theta(t, x)$ уравнения (2.5) на $\mathbb{F}$, управляемое W . Поэтому, если только $X_{t,x}(0)$ не является $\mathcal{F}_t^W$ -измеримой, не следует ожидать классического лагранжева представления решения пассивного скалярного уравнения $\theta(t, x) = \theta_0(X_{t,x}(0))$.

Однако справедливо следующее обобщение этой формулы.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любого $T < \infty$ и для почти всех x имеем

$$\theta(T, x) = \mathbf{E}(\theta_0(X_{T,x}(0)) \mid \mathcal{F}_T^W) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве леммы 4.7, определим величину $\mathcal{E}(h)$ как в (4.16) и функцию θ_h так, чтобы выполнялось (4.18).

С другой стороны, по теореме Гирсанова

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}(h)\mathbf{E}(\theta_0(X_{T,x}(0)) \mid \mathcal{F}_t^W)) = \mathbf{E}(\mathcal{E}(h)\theta_0(X_{T,x}(0))) = \mathbf{E}'(\theta_0(X_{T,x}(0))),$$

где E' – математическое ожидание относительно меры $dP'_T = \mathcal{E}(h) dP_T$ и P_T – ограничение меры P на $\mathcal{F}_T$. Кроме того, P_T -п.н. процесс $X_{T,x}(s)$ является мартингалльным решением уравнения

$$X_{T,x}(s) = x + \int_s^T \sigma_k(X_{T,x}(r)) h_k(r) dr + \int_s^T \sigma(X_{T,x}(r)) d\overleftarrow{W}'(r) + \sqrt{2\nu} (\widetilde{W}'(T) - \widetilde{W}'(s)), \quad s \leq T.$$

По формуле Фейнмана–Каца, функция $\psi_h(s) := E'(\theta_0(X_{t,x}(s)))$ тоже является решением уравнения (4.18). Из единственности решения уравнения (4.18) следует, что $E(\mathcal{E}(h)E(\theta_0(X_{T,x}(0)) | \mathcal{F}_T^W)) = E(\mathcal{E}(h)\theta(T, x))$ для любого конечного набора h ограниченных измеримых функций на $[0, T]$. Так как набор всех таких $\mathcal{E}(h)$ всюду плотен в $L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$, то P -п.н. имеем $\theta(T, \cdot) = E(\theta_0(X_{t,\cdot}(0)) | \mathcal{F}_T^W)$ (как равенство элементов $L_2(\Omega; \mathbb{R}^d)$). Это завершает доказательство теоремы 5.2.

ТЕОРЕМА 5.3. *Энергетическое равенство $E\|\theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) = \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$ выполняется тогда и только тогда, когда для почти всех x*

$$E(\theta_0(X_{t,x}(0)) | \mathcal{F}_t^W) = \theta_0(X_{t,x}(0)) \quad (P\text{-п.н.}). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполняется условие (5.3). Плотность вероятности перехода процесса X однородна, т.е. имеет вид $p(t, x - y)$. Тогда

$$\begin{aligned} E\|\theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} E|\theta_0(X_{t,x}(0))|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\theta_0(y)|^2 p(t, x - y) dx dy = \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что для любого t существует множество $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ положительной лебеговой меры такое, что $E(\theta_0(X_{t,x}(0)) | \mathcal{F}_t^W) \neq \theta_0(X_{t,x}(0))$. По неравенству Минковского имеем $E|E(\theta_0(X_{t,x}(0)) | \mathcal{F}_t^W)|^2 \leq E|\theta_0(X_{t,x}(0))|^2$, и равенство выполняется, только если $E(\theta_0(X_{t,x}(0)) | \mathcal{F}_t^W) = \theta_0(X_{t,x}(0))$. Поэтому

$$\begin{aligned} E\|\theta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2(t) &= E \int_{\mathbb{R}^d} |E(\theta_0(X_{t,x}(0)) | \mathcal{F}_t^W)|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^d} E|\theta_0(X_{t,x}(0))|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} E|\theta_0(y)|^2 p(t, x - y) dy dx = \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Очевидно, что во всех интересных сценариях условие (5.3) не выполняется, если $\nu > 0$. Если $\nu = 0$, то условие (5.3) эквивалентно предположению, что $X_{t,x}(s)$ является сильным решением уравнения (5.1).

Теоремы 4.2 и 5.2 приводят к следующей оценке нормы решения уравнения (2.5).

ТЕОРЕМА 5.5. *Если $\theta_0 \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $2 \leq p < \infty$, то для любого $t \geq 0$ решение $\theta = \theta(t, x)$ уравнения (2.5) удовлетворяет неравенству*

$$E\|\theta\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p(t) \leq \|\theta_0\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S_t: \theta_0(\cdot) \mapsto \theta(t, \cdot)$, $t > 0$, оператор решения для уравнения (2.5). По теореме 4.2, S_t является ограниченным линейным оператором из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ и

$$\|S_t \theta_0\|_{L_2(\Omega \times \mathbb{R}^d)} \leq \|\theta_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

По теореме 5.2, S_t есть ограниченный линейный оператор из $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ в $L_\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ и

$$\|S_t \theta_0\|_{L_\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d)} \leq \|\theta_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Теперь неравенство (5.4) следует из теоремы Рисса о выпуклости (см., например, [3; теорема 4.1.7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Можно было бы показать, что оператор, сопряженный к оператору решения в теореме 3.2 из [11], является обобщенным решением уравнения (4.7) с $\nu \geq 0$. Однако, поскольку мы рассматриваем гораздо более специализированную ситуацию, то доказательство существования, предложенное в настоящей статье, оказывается проще. Главные новые элементы нашей статьи включают:

- (1) единственность сильного решения невынужденного несжимаемого (unforced) пассивного скалярного уравнения для подходящего класса начальных условий,
- (2) L_p -регулярность решений (в терминах L_p -регулярности начального условия),
- (3) процедуру вычисления решения и моментов пассивного скалярного уравнения через стохастические коэффициенты Фурье θ_α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Фундам. напр. Т. 45. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–253.
- [2] P. Baxendale, T. E. Harris. Isotropic stochastic flows // Ann. Probab. 1986. V. 14. № 4. P. 1155–1179.
- [3] C. Bennett, R. Sharpley. Interpolation of Operators. Boston: Academic Press, 1988. (Pure Appl. Math. V. 129.)
- [4] R. H. Cameron, W. T. Martin. The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier–Hermite functionals // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. № 2. P. 385–392.
- [5] W. E, E. Vanden Eijden. Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2000. V. 97. № 15. P. 8200–8205.
- [6] K. Gawędzki, M. Vergassola. Phase transition in the passive scalar advection // Phys. D. 2000. V. 138. № 1–2. P. 63–90.
- [7] K. Gawędzki, A. Kupiainen. Universality in turbulence: an exactly solvable model // Lecture Notes in Phys. 1996. V. 469. P. 71–105.
- [8] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff, L. Streit. White Noise. An Infinite-dimensional Calculus. Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [9] Ш. Ватанабэ, Н. Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1985.
- [10] R. H. Kraichnan. Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 945–963.
- [11] Y. Le Jan, O. Raimond. Integration of Brownian vector fields // Ann. Probab. 2002. V. 30. № 2. P. 826–873.

- [12] S. Lototsky, R. Mikulevicius, B. L. Rozovskii. Nonlinear filtering revisited: a spectral approach // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. №2. P. 435–461.
- [13] R. Mikulevicius, B. L. Rozovskii. Linear parabolic stochastic PDEs and Wiener chaos // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29. №2. P. 452–480.
- [14] Б. Л. Розовский. Эволюционные стохастические системы. М.: Наука, 1983.

University of Southern California, Los Angeles
E-mail: lototsky@math.usc.edu, rozovski@math.usc.edu

Поступила в редакцию
20.06.2003