Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Щепин, Арифметика теории размерности, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 115–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:38:17

АРИФМЕТИКА ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

Е. В. ЩЕПИН

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	115
Глава 1. Алгебра	134
§ 1. Тензорная классификация абелевых групп	134
§ 2. Кюннетовские алгебры полигрупп	143
§ 3. Кодовая решетка	156
Глава 2. Топология	171
§ 4. Теория экстмерности	171
§ 5. Критерий экстенсивности	178
§ 6. Размерность и связность	182
Глава 3. Геометрия	188
§ 7. Теоремы об устойчивых пересечениях	188
§ 8. Верхние оценки размерности пересечения	196
§ 9. Нижние оценки размерности пересечения	204
Список литературы	211

Введение

Три великих математика, А. Лебег, А. Пуанкаре и Г. Кантор, в начале века высказали идеи, легшие в основу теории размерности. А. Лебег дал определение размерности с помощью покрытий. А. Пуанкаре дал ей индуктивное определение. Г. Кантор определил кривую как нигде не плотный континуум.

Теорию размерности в первой половине столетия называли *теорией размерности Брауэра–Урысона–Менгера*. Л. Брауэр, доказав негомеоморфность различных евклидовых пространств – *теорему об инвариантности числа измерений*, показал принципиальную возможность построения топологической теории размерности. Построили же теорию размерности П. С. Урысон и К. Менгер.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01166а).

Вопрос, приведший Урысона к созданию теории размерности, был поставлен перед ним его учителем Д. Ф. Егоровым [1] и заключался в том, чтобы дать адекватное общее определение поверхности, т.е. множества двух измерений.

Тут читатель может спросить: а как же с определениями размерности Лебега и Пуанкаре? Разве они не были известны Егорову и Урысону? Тут мы сталкиваемся с двойным недопониманием. Во-первых, под *определением размерности*, как его понимали Лебег, Пуанкаре и Брауэр, имелось в виду *определение размерности евклидова пространства*, т.е. указание способов топологического определения геометрического числа измерений пространства. Конечно, всякое такое определение можно пытаться распространять на более или менее произвольные множества, но до Урысона этого никто не делал. Во-вторых, задача *дать адекватное определение* заключалась не столько в том, чтобы *дать определение*, сколько в том, чтобы доказать его *адекватность*. То есть продемонстрировать, что данное определение соответствует нашим интуитивным представлениям.

Если в отношении определения Лебега была ясность, как его распространить на любые множества, то в отношении определения Пуанкаре таковой не было. Проблема здесь заключалась уже в том, чтобы правильно определить значение термина “разбивает”. Урысон сумел это сделать, в то время как Л. Брауэр придал этому понятию такой смысл, на основе которого автор не берется доказать, что индуктивное определение Пуанкаре правильно определяет размерность евклидова пространства. Брауэр предлагал называть множество A разбивающим пространство X между точками a и b , если всякий континуум в X , содержащий a и b , пересекает A . Это определение двойственно определению, взятому на вооружение Урысоном, которое можно сформулировать так: дополнение к A ретрагируется на двухточечное множество. Определение Брауэра “гомологично”, определение Урысона “когомологично”. Здесь мы в простейшей форме сталкиваемся с преимуществом когомологий в теории размерности над гомотопиями.

Важнейшим аргументом Урысона в доказательстве адекватности данного им общего определения кривой, поверхности и k -мерного многообразия является то, что определения размерности Лебега и Пуанкаре для произвольных множеств евклидова пространства дают одинаковый результат.

Современное доказательство адекватности определения топологической размерности могло бы заключаться в предъявлении ее аксиоматики. Она весьма проста и наглядна.

АКСИОМАТИКА АЛЕКСАНДРОВА.¹ *Существует единственная функция, сопоставляющая каждому непустому конечномерному компакту X целое число $d(X)$ и удовлетворяющая следующим условиям:*

- (1) (аксиома инвариантности) *если X гомеоморфно Y , то $d(X) = d(Y)$;*
- (2) (аксиома нормировки) *$d(I^n) = n$ для n -мерного куба;*
- (3) (аксиома суммы) *$d(X \cup Y) = \max\{d(X), d(Y)\}$;*
- (4) (аксиома границы) *$d(\partial U) < d(X)$ для некоторого открытого $U \subset X$;*
- (5) (аксиома непрерывности) *$d(\varprojlim X_k) \leq \lim d(X_k)$.*

¹Приведенная аксиоматика является небольшой модификацией оригинальной аксиоматики П. С. Александрова из книги [2]. Так, аксиома непрерывности выступает в ней вместо аксиомы Брауэра.

Определение размерности через покрытия, данное Лебегом, давно утвердилось в математике, как основное. *Лебегова размерность* является сейчас синонимом понятия *топологическая размерность*. Что же главное из того, что сумел доказать Урысон про лебегову размерность? Как сейчас представляется, главное – это то, что Урысон научился строить перегородки размерностей меньших, чем объемлющее пространство. И сильнейшей формулировкой его достижений является следующая *теорема о разложении*:

ТЕОРЕМА УРЫСОНА. Если $\dim X = n$, то для любого $k \leq n$ найдется такое $X' \subset X$, что $\dim X' = k$ и $\dim(X \setminus X') = n - k - 1$.

Эту теорему органически дополняет следующий результат.²

НЕРАВЕНСТВО УРЫСОНА. $\dim X \cup Y \leq \dim X + \dim Y + 1$.

Пространства, фигурирующие в этих теоремах, не предполагаются компактными, а множества замкнутыми. Именно поэтому урысоновская формула объединения отличается от аксиомы суммы. Сам Урысон считал неравенство объединения второстепенным результатом. Дело в том, что основным объектом его исследований выступают *замкнутые множества* евклидова пространства, а изучением *незамкнутых множеств* он занимался лишь постольку, поскольку это было необходимо для изучения замкнутых. Эта статья следует тому же принципу.

Гомологическая теория размерности. Эстафету развития теории размерности от П. С. Урысона принял П. С. Александров [4], инициировавший гомологический подход к теории размерности.

После Урысона главной проблемой теории размерности стало получение *положительной*, как пишет Л. С. Понтрягин (см. [5]), характеристики размерности. Теория Урысона страдала односторонностью, которая проявлялась в том, что она позволяла оценивать размерность пространств сверху, но была весьма неэффективна для оценок снизу.

Конкретная задача, которую в конце двадцатых – начале тридцатых годов пытались решить П. С. Александров и Л. С. Понтрягин, заключалась в том, чтобы найти в n -мерном компакте какой-нибудь негомологичный нулю относительный n -мерный цикл. То есть доказать совпадение урысоновской размерности с гомологической, которая определялась как наибольшая размерность из имеющихся в пространстве ненулевых относительных циклов.

Если какое-то подмножество в $\mathbb{R}^n$ имеет размерность $\geq k$, то оно, с одной стороны, не допускает малых сдвигов в k -мерные остовы мелких триангуляций пространства, а с другой, малыми сдвигами не снимается с $(n - k - 1)$ -мерных остовов мелких триангуляций. П. С. Александров и Л. С. Понтрягин в поисках цикла опирались на эти двойственные свойства размерности.

Л. С. Понтрягин, развивший двойственность Александра так, что она стала применимой к компактам, руководствовался невозможностью снятия с остовов дополнительной размерности. На этом пути [5] ему надо было найти цикл в дополнении ком-

²Это неравенство в книге [2] названо неравенством Урысона–Менгера, но автор предпочитает для него сохранять название *неравенство Урысона*, которое было общепринято до появления книги [2]. История вопроса по этому поводу приведена в предисловии к книге [3] и в статье С. А. Богатого, содержащейся в этом же номере журнала.

пакта, который локально был бы зацеплен с компактом. При этом ему было известно, что сфероид (элемент гомотопической группы), локально зацепленный с компактом, существует. Для того чтобы это сделать, как мы знаем теперь, ему достаточно было, перевложив компакт, ликвидировать фундаментальную группу u дополнения и доказать теорему Гуревича об изоморфизме первой нетривиальной группы гомотопий и гомологий. Как мы видим, программа весьма серьезная, учитывая то, что и группы гомотопий в то время еще не были определены. Л. С. Понтрягин не справился с ней. Он выбрал ложный путь. Ему показалось, что сначала надо разобраться с гомотопической классификацией отображений сфер разных размерностей. В этой задаче он достиг выдающихся успехов, изобрел характеристические классы и многое другое.

В то же время П. С. Александрову [4], опиравшемуся на данную им же характеристику размерности посредством сдвигов в полиэдры, фактически потребовалось искать нетривиальный коцикл (когомологий тогда тоже еще не было), в чем ему помог Хопф, доказавший по его просьбе знаменитую теорему Хопфа об отображениях n -мерного полиэдра в n -мерную сферу.

П. Урысон развил *внутренний* подход к определению размерности. *Внешнее* определение размерности заключается в определении размерности компакта через свойства его расположения в евклидовом пространстве. Так, внешним является определение канторовской кривой, столь впечатлившее П. С. Урысона, что основное его произведение по теории размерности [1] названо им “Мемуаром о канторовых многообразиях”.

После того как внутреннее построение теории размерности было завершено, естественно встал вопрос о внешнем ее определении. То есть об определении размерности компакта через свойства его расположения в объемлющем пространстве и, в частности, через свойства его дополнения.

Проблема гомологической характеристики размерности и проблема ее внешнего определения были, по существу, разными формами одного и того же вопроса. Их эквивалентность вытекала из двойственности Александера–Понтрягина, согласно которой гомологии замкнутого множества двойственны гомологиям его дополнения. Поэтому нахождение цикла внутри компакта влекло существование локально зацепленного с ним цикла дополнительной размерности в его дополнении, а существование зацепленного цикла в свою очередь позволяло найти относительный цикл дополнительной размерности в компакте.

Таким образом, следующая *теорема о зацеплениях* является одной из форм ответа на рассмотренные вопросы.

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДРОВА. *Замкнутое множество n -мерного евклидова пространства имеет размерность k в том и только том случае, когда в дополнении к нему имеются локально зацепленные с ним $(n - k - 1)$ -мерные циклы и никакой цикл меньшей размерности нигде с ним не зацеплен.*

Проблема размерности произведения. Интрига последующего развития теории размерности концентрируется вокруг *проблемы размерности произведения*. То, что натуральные числа делятся на простые и составные, не имело на первом этапе развития теории размерности никакого значения. Однако, как оказалось, это обстоятельство невозможно игнорировать, пытаясь научиться определять размерность произведения компактов.

Так, из результатов Урысона легко получалось неравенство $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$. Но уже тот факт, что при умножении на отрезок размерность увеличивается, не был доказан Урысоном и остается за пределами монографий, излагающих теоретико-множественную теорию размерности. Этот факт был доказан П. С. Александровым [4] как одно из первых приложений гомологической теории размерности.

В первом приближении проблема размерности произведения понималась как доказательство *логарифмического закона* сложения размерностей, согласно которому размерность произведения равна сумме размерностей сомножителей. Намерение доказать этот закон существовало с самого начала теории размерности.

Эта проблема оказалось теснейшим образом связанной со следующей *проблемой коэффициентов*. В определении гомологической размерности участвует группа коэффициентов. Так, П. С. Александров предпочитал пользоваться гомологиями по модулю 2, чтобы “не путаться со знаками”. И в первом приближении проблема коэффициентов заключалась в том, чтобы доказать, что определение гомологической размерности не зависит от группы коэффициентов.

Обе эти проблемы были решены одновременно Л. С. Понтрягиным в 1930 году [6], который построил свои *понтрягинские поверхности*. Но Л. С. Понтрягин в этой работе не только опроверг логарифмический закон для топологической размерности, но и доказал его справедливость для размерностей по модулю простого числа.

Нарушение логарифмического закона делает осмысленным введение понятия *размерностного типа* компакта (впервые введенного только в 1994 году [7]). Будем говорить, что два компакта X и Y имеют одинаковый *размерностный тип*, если $\dim X \times Z = \dim Y \times Z$ для любого компакта Z . Размерностный тип является более тонкой характеристикой, чем размерность, и обозначается $\text{DIM } X$. Множество размерностных типов естественным образом упорядочено, а именно, считаем, что $\text{DIM } X \geq \text{DIM } Y$, если $\dim X \times Z \geq \dim Y \times Z$ для всякого Z . И операция произведения компактов индуцирует операцию на множестве типов. Эту операцию мы будем обозначать знаком $+$. Таким образом, $\text{DIM}(X \times Y) = \text{DIM } X + \text{DIM } Y$. Множество размерностных типов с описанным отношением частичного порядка и операцией будем называть *размерностной алгеброй* и обозначать $\mathfrak{DM}$. Ясно, что полное решение проблемы произведения должно включать в себя как *критерий совпадения типов*, так и *описание размерностной алгебры*.

С другой стороны, возможность несовпадения размерностей по различным группам коэффициентов делает осмысленным введение понятие (*ко*)*гомологического размерностного типа*. А именно, два компакта X и Y называются имеющими одинаковый (*ко*)*гомологический размерностный тип*, если $\dim_G X = \dim_G Y$ для любой абелевой группы G .

После М. Ф. Бокштейна и А. Н. Дранишникова мы знаем, что понятие *когомологического размерностного типа* для конечномерных компактов оказалось тождественным понятию *размерностного типа*. А основные вопросы, которые возникли после работы Понтрягина и решение которых имело большое значение для полного решения проблемы произведения, были таковы:

ПРОБЛЕМА РАЗМЕРНОЙ ПОЛНОЦЕННОСТИ. *Охарактеризовать размерно-полноценные компакты X , т.е. такие, для которых равенство $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$ выполнено при любом Y .*

ПРОБЛЕМА КОЭФФИЦИЕНТНОГО БАЗИСА. *Найти минимальный набор абелевых групп, знания размерностей по которым достаточно, чтобы определить размерность компакта по любой группе.*

Обе эти проблемы ставились П. С. Александровым, причем в постановке первой принимал участие А. Н. Колмогоров. После работы Понтрягина естественно было бы ожидать, что в качестве коэффициентного базиса выступают аддитивные группы полей (поля одинаковой характеристики дают одинаковые размерности). В таком случае топологическая размерность компакта определялась бы как максимум из его “полевых” размерностей. А равенство типов $\text{DIM } X = \text{DIM } Y$ естественно было ожидать равносильным совпадению размерностей $\dim_p X = \dim_p Y$ для любого простого $p \geq 0$, здесь для компакта X и числа p , простого или нуля, через $\dim_p X$ обозначается размерность по модулю p , а $\dim_0 X$ — это рациональная размерность, т.е. размерность с рациональными коэффициентами.

Этим ожиданиям, однако, не суждено было сбыться. В 1949 году В. Г. Болтянский, построив пример двумерного компакта с трехмерных квадратом [8], опроверг эти представления. Пример Болтянского имеет все полевые размерности равными единице. Построенный пример позволил Болтянскому также и решить проблему характеристики размерно-полноценных компактов [9]. Оказалось, что размерная полноценность компактов характеризуется размерностями с коэффициентами в квазициклических группах $\mathbb{Q}_p$.

ТЕОРЕМА БОЛТЯНСКОГО. *Компакт X размерно-полноценен в том и только том случае, когда $\dim_{\mathbb{Q}_p} X = \dim X$ для любого простого p .*

Из этой теоремы видно, что *проблема коэффициентов* и логарифмический закон были, по существу, разными формами одной и той же проблемы.

Проблема коэффициентного базиса была решена М. Ф. Бокштейном ([10], [11]). Оказалось, что для получения *полной системы групп* нужно к полям $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ и квазициклическим группам $\mathbb{Q}_p$ добавить серию аддитивных групп локальных колец $\mathbb{Z}_{(p)}$. Кольцо $\mathbb{Z}_{(p)}$ является подкольцом поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, образованным дробями m/n , со знаменателем взаимно простым с p . Решение этой проблемы позволило Бокштейну заодно решить и проблему определения размерности произведения. Первая Теорема Бокштейна предъявила счетное множество групп — *систему Бокштейна*, знание размерностей по которым позволяет эффективно, по *алгоритму Бокштейна*, определить размерность по любой группе коэффициентов. В частности, она позволяла определить и топологическую размерность, ибо последняя, согласно Александрову, также является гомологической. Помимо *системы* и *алгоритма* эта теорема Бокштейна, включает в себя еще и *неравенства Бокштейна*, которые представляют соотношения между размерностями по группам системы Бокштейна верные для любых компактных пространств.

Вторая Теорема Бокштейна показывает, как ведут себя размерности по базисным группам при умножении. То есть она позволяет определить гомологические размер-

ности произведения, а значит, и его топологическую размерность, через гомологические размерности сомножителей.

Тут мы оговоримся. Начиная с упомянутых работ Бокштейна когомологии вытесняют гомологии из теории размерности. И то, что называется теперь *гомологической* теорией размерности, правильнее было бы называть *когомологической*.

Проблема реализации. Таким образом, Вторая Теорема Бокштейна позволила доказать, что совпадение когомологического типа компактов влечет совпадение их размерностного типа. Верно ли обратное? Ответ на этот вопрос зависел от решения следующей *проблемы реализации*, которая после результатов Бокштейна надолго стала одной из основных проблем теории размерности.

ПРОБЛЕМА БОЛТЯНСКОГО–БОКШТЕЙНА. *Всякая ли комбинация размерностей по базисным группам, удовлетворяющая неравенствам Бокштейна, является совокупностью размерностей некоторого компакта?*

Важные результаты по реализации были получены Ю. Кодамой [12], [13] и В. И. Кузьминовым [14]. Кодама, в частности, построил первый пример компакта, у которого рациональная размерность отличалась от всех размерностей по простому модулю. Он также продублировал конструкцию Болтянского и ввел в употребление понятие *пробного компакта*. Пробные компакты Кодама тестировали размерную полноценность.

Кузьминов же проанализировал *алгебру Бокштейна* – алгебру размерных функций, которые группам системы Бокштейна ставили в соответствие натуральные числа так, чтобы выполнялись неравенства Бокштейна, а “складывались” размерные функции по правилам, согласно которым определялись размерности произведения компактов. Кузьминов выделил в алгебре Бокштейна базис – *основные функции*, через которые посредством операций взятия верхней грани и сложения получались все остальные. Задача реализации была таким образом редуцирована им к проблеме построения четырех серий основных компактов, реализующих базисные размерные функции. Сам Кузьминов построил все базисные компакты размерности 3. Это позволило ему существенно обобщить понятие пробного компакта и получить результат, в некоторой степени сводящий гомологическую теорию размерности к теоретико-множественной.

ТЕОРЕМА КУЗЬМИНОВА. *Для всякой абелевой группы G и любого натурального n существует такой компакт T_G^n , что для любого компакта X размерности $\dim X \leq n$ имеет место равенство $\dim_G X = \dim X \times T_G^n - \dim X$.*

Лишь десять лет назад А. Н. Дранишников [15] построил компакты, реализующие все комбинации когомологических размерностей, удовлетворяющих неравенствам Бокштейна, и тем самым поставил точку в проблеме размерности произведения компактов. Таким образом, размерностная алгебра оказалась изоморфной алгебре Бокштейна. Реализационная теорема Дранишникова логически завершает второй – гомологический – этап в развитии теории размерности. Помимо проблемы Болтянского–Бокштейна им были решены другие важные реализационные проблемы. Это проблема Александрова о существовании бесконечномерного компакта конечной когомологической размерности и проблема Борсука о существовании размерно неполноценных локально стягиваемых компактов. Итог этому периоду подведен в обзорной статье [16].

Гомологическая теория, столь эффективная для определения размерностей произведений, оказалась беспомощной перед задачей о доказательстве гомологических аналогов неравенства Урысона. А вопрос о существовании перегородок, гомологическая размерность которых была бы меньше, чем гомологическая размерность исходного пространства, даже не поднимался. Причина последнего в том, что вопрос имел очевидный отрицательный ответ: если гомологическая размерность компакта равна единице, а топологическая больше единицы, то компакт нельзя разбить множеством гомологической размерности 0, потому что гомологическая размерность 0 влечет топологическую размерность 0. Однако для случая, когда гомологическая размерность пространства больше 1, ответ на этот вопрос, как мы увидим, положителен. Таким образом, гомологический подход к размерности оказался слаб как раз в том, в чем был так силен теоретико-множественный, и наоборот, силен в проблеме произведения и внешней характеристизации, где последний так слаб.

Проблема неустойчивого пересечения. Десять лет назад возникла проблема, изменившая весь облик теории размерности. Сейчас, когда очертания новой теории определились, можно ее квалифицировать как третий – *гомотопический* – этап развития теории размерности. Первый теоретико-множественный этап имел дело в основном с внутренним строением компактов, не знал алгебры и породил формулу объединения. Второй, *гомологический*, основные достижения имел в алгебре и внешней характеристизации размерности и породил формулу произведения. На третьем этапе, как мы увидим, в основе выступает взаимодействие внутреннего с внешним, а основная формула этого этапа – *формула пересечения* – синтетична по отношению к формулам объединения и произведения.

Началось с предпринятой Ф. Анцелем попытки обратить теорему Нёбелинга–Понтрягина, которая утверждает, что всякое непрерывное отображение n -мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$ аппроксимируется вложениями. Вопрос Анцеля гласил: если всякое отображение компакта в $\mathbb{R}^{2n}$ аппроксимируется вложениями, то можно ли утверждать, что размерность компакта меньше чем n ? Или, другими словами, верно ли, что всякий компакт размерности n можно отобразить в $\mathbb{R}^{2n}$ с устойчивыми самопересечениями. Для полиэдров это верно. В работе 1989 года [17] Д. Мак-Каллох и Л. Рубин дали на этот вопрос положительный ответ и ошиблись. Это дало старт серии работ различных авторов, из которых выделим С. Спеша (см. [18]), приведших уже через год к полному решению этого вопроса. Оказалось, что всякое отображение компакта X в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ аппроксимируется вложениями в том и только том случае, когда $\dim X^2 < 2n$. А так как существуют компакты, у которых размерность квадрата меньше удвоенной размерности самого компакта (компакты В. Г. Болтянского [8]), то и ответ на вопрос Анцеля оказывается отрицательным. То есть эффект странного поведения компактов, наблюдающийся в этой задаче, оказался обусловлен все тем же нарушением логарифмического закона. Следующим естественным вопросом оказался такой:

Верно ли, что компакты X, Y , имеющие размерность произведения меньше чем n , не имеют в $\mathbb{R}^n$ устойчивых пересечений?

Проблема эта последовательно решалась путем ослабления размерностных ограничений на компакты X и Y в соперничестве польской и русской школ (см. [18], [19]). Сильнейший на данный момент результат по этой проблеме принадлежит А. Н. Дра-

нишникова [20], который получил положительное решение для компактов коразмерности 3. Для коразмерности 2 вопрос все еще открыт. Решение этой проблемы и потребовало от Дранишникова развития гомотопического подхода к теории размерности.

Отношение экстенсивности. На третьем этапе основную роль в теории размерности стали играть гомотопические методы. В фокус интересов попало введенное К. Куратовским *отношение экстенсивности*. Пространство X называется *экстенсивным* по отношению к пространству Y , пишем $X \tau Y$, если всякое непрерывное отображение любого замкнутого подпространства $X' \subset X$ в Y продолжается до непрерывного отображения всего X . При этом пространство Y называется *коэкстенсивным* пространству X . Это отношение позволяет охарактеризовать как топологическую, так и когомологические размерности. Так, теорема Александрова в форме Гуревича гласит: $\dim X \leq n$, если и только если $X \tau S^n$. А экстенсивность X по отношению к комплексу Эйленберга–Маклейна $K(G, n)$ равносильна неравенству $\dim_G X \leq n$.

Гомотопические аналоги известных ранее теорем теории размерности оказались имеющими доказательства столь же элементарные, как их теоретико-множественные аналоги, и дающими результаты более сильные, чем их гомотопические аналоги. Причем во многих случаях гомотопические результаты были впервые получены именно гомотопическим путем.

В основе гомотопического подхода к теории размерности лежит следующий *критерий экстенсивности*:

ТЕОРЕМА ДРАНИШНИКОВА [21]. *Следующие условия равносильны для конечномерного компакта X и односвязного комплекса K :*

- (1) $X \tau K$;
- (2) $\dim_{H_k(K)} X \leq k$ при любом $k \geq 1$;
- (3) $\dim_{\pi_k(K)} X \leq k$ при любом $k \geq 1$

(через $H_k(K)$ обозначены приведенные целочисленные гомологии комплекса K , а через $\pi_k(K)$ – гомотопические группы).

Доказательство критерия экстенсивности опирается на такие достижения гомотопической топологии, как теория локализаций и пополнений Сулливана и теорема Дольда–Тома о бесконечной симметрической степени.

Критерий экстенсивности осуществляет связь между гомотопическим и гомотопическим подходами к теории размерности. Он сконцентрировал в себе все неэлементарное, что есть в гомотопическом подходе.

Отметим, что из критерия экстенсивности вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ. *При $n > 1$ для компакта X экстенсивность по отношению к комплексу Эйленберга–Маклейна $X \tau K(G, n)$ равносильна экстенсивности по отношению к комплексу Мура $X \tau M(G, n)$.*

Действительно, это непосредственно вытекает из критерия экстенсивности Дранишникова, ведь гомологии комплекса Мура как раз совпадают с гомотопиями комплекса Эйленберга–Маклейна. Важным нерешенным вопросом (поставленным А. Н. Дранишниковым) является вопрос о справедливости этого следствия для $n = 1$.

ПРОБЛЕМА НЕОДНОСВЯЗНОСТИ. Верно ли, что для любого компакта X и любой счетной группы G равносильны условия $X \tau M(G, 1)$ и $X \tau K(G, 1)$?

Экстмерность. Основные достижения третьего этапа теории размерности связаны с именем А. Н. Дранишникова, который и ввел в обиход термин *extensional dimension* для возникшей теории. Мы будем именовать ее *теория экстмерности*. При этом под *экстмерностью* компакта мы будем подразумевать класс гомотопических типов всех коэкстенсивных ему комплексов и обозначать ее $\mathfrak{Dim} X$. И договоримся использовать знак неравенства для экстмерностей вместо противоположного знака включения. То есть неравенство $\mathfrak{Dim} X \leq \mathfrak{Dim} Y$ равносильно включению $\mathfrak{Dim} Y \subset \mathfrak{Dim} X$, а неравенство $\mathfrak{Dim} X \leq K$ расшифровывается как включение $K \in \mathfrak{Dim} X$. Тогда неравенство $\dim X \leq n$ оказывается равносильным такому: $\mathfrak{Dim} X \leq S^n$.

Решение вопроса о справедливости неравенства Урысона для когомологических размерностей является яркой иллюстрацией продуктивности новых идей. Сначала, с одной стороны, как применение теории пересечений компактов, был построен пример [22], опровергающий неравенство Урысона для некоторых групп. А с другой, Л. Рубин [23] доказал это неравенство для целых чисел. При этом в работе Рубина, впервые в контексте этой задачи, была применена конструкция джойна, сыгравшая в дальнейшем решающую роль. Полное решение этой проблемы, полученное Ю. Дыдаком [24], [25], может быть сформулировано так:

$$\mathfrak{Dim}(X \cup Y) \leq \mathfrak{Dim} X * \mathfrak{Dim} Y.$$

Здесь $*$ используется для обозначения операции джойна. Доказательство Дыдака элементарно и умещается на полстраницы. Эта формула обобщает неравенство Урысона в силу вышеупомянутой теоремы Александрова. В то же время эта теорема Урысона–Дыдака с помощью критерия экстенсивности Дранишникова позволяет доказать справедливость неравенства Урысона для когомологической размерности над любым кольцом.

Другая проблема когомологической теории размерности, долго не поддававшаяся решению и нашедшая решение в рамках теории экстмерности, – *проблема пополнения*. Теорема Ольшевского [26] гласит: для всякого сепарабельного метрического пространства X найдется объемлющее его полное пространство $\tilde{X}$ той же экстмерности.

Экстраординарные размерности. До появления теории экстмерности топологи даже не подозревали, что гомотопические размерности почти удовлетворяют аксиоме границы. Проблемы о разбиении гомотопии находились в центре внимания, но решались плохо (см. [27]). Лишь в 1966 году Е. Г. Складенко [28] опубликовал безупречное доказательство теорем о разбиении гомотопий и когомологий, которые давно предполагались П. С. Александровым. При этом условия на разбивающее множество формулировались в терминах топологической, а не гомотопической размерности. Оказывается, что для любой группы G всякий компакт X размерности $\dim_G X > 1$ имеет открытую базу топологии с границами G -размерности меньшей $\dim_G X$. Этот факт можно получить из следующей теоремы разложения Дранишникова, являющейся экстмерным аналогом теоремы Урысона.

ТЕОРЕМА УРЫСОНА–ДРАНИШНИКОВА. Если $\mathfrak{Dim} X \leq K * L$, то X представляется в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ подпространств экстмерностей $\mathfrak{Dim} X_1 \leq K$ и $\mathfrak{Dim} X_2 \leq L$.

Действительно, если $\dim_G X = n$, то $X \tau K(G, n)$, и потому $X \tau M(G, n)$. Но $M(G, n) = \Sigma M(G, n - 1) = S^0 * M(G, n - 1)$. В силу теоремы о разложении получаем $X = X_0 \cup X_1$, где $X_0 \tau S^0$ и $X_1 \tau M(G, n - 1)$. Из второго условия вытекает $X_1 \tau K(G, n - 1)$, откуда $\dim_G X_1 \leq n - 1$. А из первого – $\dim X_0 = 0$. Пусть $U \subset X_0$ – открыто-замкнуто в X_0 . Пусть U' – открытое подмножество в X , для которого $U' \cap X_0 = U$. Тогда граница U' лежит в X_1 и, следовательно, имеет G -размерность меньше n .

Доказанное утверждение позволяет интерпретировать когомологические размерности как *экстраординарные*. По аналогии с теорией гомологий и когомологий, будем называть *экстраординарной теорией размерности* всякую размерностную функцию (функцию, сопоставляющую компактам натуральные числа), удовлетворяющую всем аксиомам Александрова за исключением аксиомы нормировки. Тогда всякая абелева группа порождает экстраординарную теорию размерности d_G , определяемую по следующему правилу: $d_G(X) = \dim_G X - 1$, если $\dim_G X \geq 1$, и $d_G(X) = 0$, если $\dim_G X = 0$. И всякий комплекс K порождает экстраординарную теорию размерности по следующему правилу: $\dim_K X = n$, если n – наименьшее число, для которого X экстенсивен по отношению к n -кратной надстройке $\Sigma^n K$. Сам комплекс K называется *классифицирующим пространством* для порожденной им экстраординарной теории размерности.

Теорию размерности с коэффициентами в неабелевой группе G можно определить как экстраординарную теорию размерности, классифицирующим пространством которой служит комплекс Эйленберга–Маклейна $K(G, 1)$.

Если G совершенна, то $\dim_G$ принимает всего два значения, поскольку $\Sigma K(G, 1)$ стягиваемо. Теории размерности с некоммутативными коэффициентами посвящены работы [30], [31]. В них, в частности, доказано, что компакт X , экстенсивный по отношению к $K(G, 1)$ для любой совершенной группы G , является топологически двумерным.

Экстмерное решение проблемы реализации. Теория экстмерности позволила дать качественно иное решение проблемы реализации. Проблема неустойчивого пересечения была сведена в работе [7] к следующей *проблеме промежуточных размерностей*:

Верно ли, что $\mathbb{R}^n$ содержит компакты всех размерностных типов, размерности $\leq n - 2$?

Решив эту проблему, Дранишников [20] заново решил проблему реализации. Данное им решение опиралось на экстмерную версию теоремы Эйленберга и двойственность Ситникова. Данное в §6 решение проблемы реализации еще проще. Оно опирается лишь на теоремы Урысона–Дранишникова и Урысона–Дыдака. При этом результат получается сильнее. Оказывается, что проблема промежуточных размерностей имеет положительное решение, даже если $\mathbb{R}^n$ заменить на любой n -мерный размерно-полноценный компакт.

Гомологическая теория связности. Двойственной к когомологической теории размерности выступает *гомологическая теория связности*. Такой теории не значится в рубриках реферативных журналов. В этой статье она упоминается впервые, хотя изоморфная ей теория содержится в статье Дранишникова–Дыдака [29]. И нет в литературе даже специального обозначения для того, что мы будем называть *индексом связности* комплекса.

Индекс связности бывает гомотопический и гомологический. *Гомологическим индексом связности* комплекса K называется наименьшая из размерностей его негомологичных нулю целочисленных циклов; обозначение: $\text{cin } K$ ($\text{cin} = \text{connectivity index}$). *Гомотопический индекс связности* естественно определить как размерность первой нетривиальной группы гомотопий. Для односвязных комплексов гомотопический индекс совпадает с гомологическим в силу теоремы Гуревича. Это верно также для *гомотопически простых* комплексов, которые мы, следуя М. М. Постникову [32], будем называть *абелевыми*. Мы в дальнейшем будем заниматься в основном гомологическим индексом, называя его просто *индексом связности*. Хотелось бы называть *индекс связности* еще проще – *связностью*. Это, однако, может привести к путанице, так как в устоявшейся терминологии n -связным называют пространство, у которого нулевые все группы гомотопий включая n -ю.

Поскольку мы рассматриваем приведенные гомологии, естественно работать в категории пунктированных комплексов, что мы и делаем в дальнейшем, не акцентируя на этом внимания. Произведением в категории пунктированных пространств является *приведенное произведение*, обозначаемое $M \wedge N = M \times N / M \vee N$ (smash-product), а суммой в категории пунктированных пространств является букет $M \vee N$. Поскольку $\text{cin } S^n = n$ и $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$, возникает естественное предположение, что индекс связности удовлетворяет логарифмическому закону $\text{cin } M \wedge N = \text{cin } M + \text{cin } N$. Следующая “естественная” гипотеза заключается в том, что гомологический индекс связности не зависит от группы коэффициентов.

Эти проблемы, так же как их аналоги для компактов, имеют отрицательное решение. Причем уже первый шаг конструкции понтрягинских поверхностей опровергает как логарифмический закон для связностей, так и гипотезу о равносильности коэффициентов. А именно, если лист Мёбиуса по модулю p обозначить M_p , то $\text{cin } M_p = 1$ для любого p и $\text{cin}(M_p \wedge M_q) = \infty$ при $p \neq q$. После этого по аналогии с компактами можно было бы ввести понятие *связно-полноценного* комплекса и поставить вопрос о критерии связной полноценности. Критерий получается такой же, как у Болтянского: $\text{cin}_{\mathbb{Q}_p} M = \text{cin } M$ для любого p . И доказывается, так же как у Болтянского, на основе примера комплекса Мура $M(\mathbb{Q}_p, 1)$, выполняющего в категории комплексов роль компакта Болтянского, для которого $\text{cin } M(\mathbb{Q}_p, 1) = 1$ и $\text{cin } M(\mathbb{Q}_p, 1) \wedge M(\mathbb{Q}_p, 1) = 3$. Связно-полноценные типы находятся во взаимнооднозначном соответствии с натуральными числами и представляются сферами.

После этого можно было бы задаться вопросом о коэффициентном базисе. Им оказывается та же самая система Бокштейна. Потом получить аналоги теорем Бокштейна. Все это легко можно сделать, и все это сделано в первой главе.

По аналогии с теорией размерности определим *связностный тип* комплекса. А именно, два комплекса K, L называем имеющими одинаковый *связностный тип* и пишем $\text{CIN } K = \text{CIN } L$, если $\text{cin } K \wedge M = \text{cin } L \wedge M$ для любого комплекса M .

Множество связностных типов естественно упорядочено и имеет операцию, инду-

цированную операцией приведенного произведения. Операция эта обозначается $\langle + \rangle$. Таким образом, $\text{CIN}(M \wedge N) = \text{CIN } M \langle + \rangle \text{CIN } N$. Упорядоченное множество размерностных типов с этой операцией называется *связностной алгеброй* и обозначается $\mathfrak{CM}$. В отличие от размерностной алгебры, проблема реализации решается в связностной алгебре без труда. А именно, комплексы Эйленберга–Маклейна $K(G, n)$ при G из системы Бокштейна образуют базис этой алгебры, и всякий комплекс имеет связностный тип букета таких комплексов (см. [29]).

Двойственность Дранишникова. Двойственность между размерностью и связностью проявляется и в рамках двойственности Александра–Понтрягина, и в обобщающей ее двойственности Спеньера–Уайтхеда. Собственно, уже канторовское определение кривой как замкнутого нигде не плотного множества плоскости, так вдохновившее Урысона, представляет собой определение размерности замкнутого множества через связностные свойства его дополнения (множество, имеющее непустую внутренность, можно трактовать как локально зацепленное в размерности -1).

Рассмотрение отношения экстенсивности привело Дранишникова к открытию новой двойственности между компактами и комплексами, выходящей за рамки двойственности Спеньера–Уайтхеда и вписывающейся в категорную двойственность Экмана–Хилтона. Назовем *экстсвязностью* комплекса K множество топологических типов экстенсивных по отношению к нему компактов (обозначение: $\mathfrak{Cin } K$). Тогда оказывается, что для всякого компакта X среди всех коэкстенсивных ему комплексов существует имеющий наименьшую экстсвязность (может быть несчетный). Назовем его *экстсвязность двойственной экстмерности* компакта X . И для всякого комплекса K среди экстенсивных по отношению к нему компактов существует имеющий наименьшую экстмерность (возможно, неметризуемый). Назовем его *экстмерность двойственной экстсвязности* комплекса K . Тогда описанные отображения двойственности взаимно обратны и устанавливают сохраняющее порядок взаимнооднозначное соответствие между решетками экстмерности и экстсвязности [29]. Мы будем называть ее *экстенсивной двойственностью* или *двойственностью Дранишникова*.

В связи с этой двойственностью имеется следующая важная проблема, являющаяся аналогом проблемы нахождения счетного коэффициентного базиса, решенной Бокштейном.

ПРОБЛЕМА СЧЕТНОСТИ. *Всякий ли комплекс имеет экстсвязность счетного?*

Этой проблеме посвящена статья Дранишникова [33], содержащаяся в этом же номере журнала. Если при определении экстенсивной двойственности ограничиться рассмотрением конечномерных компактов и гомотопически простых комплексов, то она превратится в *гомологическую размерностно-связностную* двойственность. А именно, отношение экстенсивности индуцирует отношение между размерностными и связностными типами, что следует из критерия экстенсивности Дранишникова (который верен не только для односвязных, но и для абелевых комплексов). И это отношение порождает отображение двойственности $\tau: \mathfrak{DM} \rightarrow \mathfrak{CM}$ так, что размерностному типу соответствует наименьший связностный тип, содержащий комплекс, коэкстенсивный компактам этого типа.

Отображение τ индуцирует биекцию размерностной и связностной алгебр, сохраняющую порядок. Естественно было предполагать, что оно сохраняет и операции. Свойство сохранения операций посредством τ являлось бы экстмерным вариантом

логарифмического закона. Но и в этой форме логарифмический закон не состоялся. Это обстоятельство было открыто Дранишниковым [34], и именно оно стимулировало алгебраические исследования автора, который долго не мог в это поверить.

Двойственность Дранишникова склеивает размерностную алгебру со связностной. Получившийся объект мы называем *размерностно-связностной алгеброй* и обозначаем $\mathfrak{DC}$. Размерно-полноценным типам при этом соответствуют связно-полноценные. Эти “дважды полноценные” элементы размерностно-связностной алгебры отождествляются с натуральными числами.

Операцию, индуцированную на $\mathfrak{DC}$ из $\mathfrak{DM}$, обозначаем $[+]$, а операцию, индуцированную из $\mathfrak{CM}$, обозначаем $\langle + \rangle$. Эти операции нередко совпадают. Например, для любого $x \in \mathfrak{DC}$ имеем $x \langle + \rangle x = x [+] x$ и $x [+] n = x \langle + \rangle n$ для любого натурального n . И для любых x и y выполняется неравенство $x [+] y \leq x \langle + \rangle y$. Это неравенство оправдывает выбор названия *минорная* для операции $[+]$ и *мажорная* для операции $\langle + \rangle$.

Автору не удалось обнаружить в алгебре такого типа структуры, которую имеет размерностно-связностная алгебра. И он дал ей имя *биаддитивной решетки*.

Тензорные типы. Начинается статья с реинтерпретации основных результатов Бокштейна [10], [11]. Этим результатам, чисто алгебраическим по содержанию, удалось найти и чисто алгебраическую форму. При этом оказалось, что вся теория Бокштейна касается лишь тензорных произведений абелевых групп. А ее связь с гомологической алгеброй и топологией осуществляется через формулы универсальных коэффициентов и Кюннета.

Вопрос, на который дает ответ Первая Теорема Бокштейна, – это нахождение условий *коэффициентной эквивалентности* абелевых групп.

Следующие два условия оказываются равносильными для абелевых групп G и H :

- 1) для любого компакта X и любого натурального n группы когомологий $H^n(X, G)$ и $H^n(X, H)$ или обе тривиальны, или обе нетривиальны;
- 2) для любого комплекса L и любого натурального n группы гомологий $H_n(L, G)$ и $H_n(L, H)$ или обе тривиальны, или обе нетривиальны.

Группы, удовлетворяющие этим условиям, называются *коэффициентно равносильными*. Ясно, что как когомологические размерности компактов, так и гомологические связности комплексов относительно коэффициентно-равносильных групп совпадают.

Ключевую роль в наших рассуждениях играет понятие *тензорного типа* абелевой группы. А именно, мы говорим, что абелевы группы G и H имеют одинаковый *тензорный тип*, если при тензорном умножении этих групп на любую третью получают либо две тривиальные, либо две нетривиальные группы. Для групп без кручения и для периодических групп коэффициентная равносильность оказывается равнозначна тензорной. Для смешанных групп (т.е. групп, имеющих элементы как конечного, так и бесконечного порядков) ответ немного сложнее.

На множестве тензорных типов есть естественное отношение порядка. А именно, мы говорим, что группа G *тензорно сильнее* группы H , если сумма $G \oplus H$ тензорно равносильна G . Тензорный тип называется *неразложимым*, если никакую группу этого типа нельзя представить в виде суммы групп других тензорных типов. Ясно, что всякий минимальный тип неразложим.

Порядковая структура множества неразложимых тензорных типов такова. Три-

виальный тип представлен одной единственной тривиальной группой 0 и является наименьшим тензорным типом. Все множество типов делится на три непересекающиеся категории: *минимальных*, *максимальных* и *полевых*. Тензорный тип называется *минимальным*, если не существует типа тензорно более слабого, чем он. Минимальность автоматически влечет неразложимость типа. Оказывается, что минимальные типы находятся во взаимнооднозначном соответствии с квазициклическими группами, т.е. каждая квазициклическая группа имеет минимальный тип, различные квазициклические группы имеют различные типы и всякий минимальный тип является типом квазициклической группы. Неразложимый тензорный тип называется *максимальным*, если не существует более сильного неразложимого типа, чем он. Максимальные типы однозначно соответствуют кольцам $\mathbb{Z}_{(p)}$.

И, наконец, тензорный тип аддитивной группы поля называется *полевым*. Аддитивные группы полей имеют одинаковый тензорный тип в том и только том случае, когда у них совпадают характеристики. Таким образом, полевые типы находятся в естественном соответствии с множеством простых чисел, дополненным нулем. Тензорный тип поля нулевой характеристики называется *рациональным*. Прочие полевые типы соответствуют полям вычетов $\mathbb{Z}_p$. Таким образом, неразложимые тензорные типы оказываются находящимися во взаимнооднозначном соответствии с группами системы Бокштейна, и мы поэтому будем в дальнейшем отождествлять тензорные типы групп с группами системы Бокштейна.

Рациональный тип сильнее всех минимальных и слабее всех максимальных типов. На множестве остальных типов транзитивным является *отношение сравнимости*. Оно разбивает остальные типы на тройки $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{(p)}$, выписанные в порядке возрастания тензорной силы. Каждой такой тройке естественно соответствует простое число, называемое ее *факторностью*. Факторность $\mathbb{Q}$ считается равной нулю.

Коэффициентный тип группы G определяется на основе ее *p-факторов Бокштейна*. *p-фактор* Бокштейна группы G определяется как тензорный тип *p-локализации* $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, от которого “отщеплен” рациональный фактор. То есть, в случае, когда из локализации выделяется $\mathbb{Q}$ в качестве прямого слагаемого, в качестве *p-фактора* нужно рассмотреть тензорный тип ее кручения. $\sigma_p G$ либо тривиально, либо имеет тип одной из бокштейновских групп $\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$.

Нетривиальность бокштейновского *p-фактора* $\sigma_p G$ обусловлена нарушением делимости на p в группе G . Нарушения делимости бывают трех типов, первый – когда группа содержит элемент бесконечного порядка, не делящийся на p , второй – когда она содержит элемент конечного порядка, не делящийся на p , и третий – когда все элементы группы делятся на p , но деление неоднозначно. Этим трем случаям как раз и соответствуют три тензорных типа $\sigma_p G$.

Оказывается, что справедливо следующее утверждение.

КРИТЕРИЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ РАВНОСИЛЬНОСТИ. *Абелевы группы G и H коэффициентно равносильны в том и только том случае, когда они имеют совпадающие бокштейновские p -факторы при любом $p \geq 0$.*

Из этого критерия вытекает, что всякая группа коэффициентно эквивалентна сумме своих *p-факторов*. А поскольку когомологии и гомологии аддитивны по отношению

к коэффициентам, постольку знание размерностей компакта по отношению к неразложимым тензорным типам позволяет определить размерности по отношению к любым. Таким образом, этот критерий отвечает на те же вопросы, что и Первая Теорема Бокштейна.

Алгебры Кюннета. Вопрос, на который отвечает Вторая Теорема Бокштейна, – о вычислении размерностей произведения – также, оказывается, может быть отделен не только от топологии, но и от гомологической алгебры.

Последовательность абелевых групп $\{G_0, G_1, G_2, \dots\}$ называется *полигруппой*.³ Почленное сложение превращает множество полигрупп в абелев моноид. Всякое умножение на группах индуцирует умножение на полигруппах. А именно, n -й член произведения полигрупп $\{G_i\}$ и $\{H_j\}$ задается посредством *формулы свертки* как сумма произведений $G_i H_j$ для $i + j = n$. Так, тензорное и периодическое произведения групп индуцируют тензорную и периодическую *свертку* на полигруппах. А те умножения, которые нас интересуют в этой статье, являются суммой тензорной и сдвинутой на единицу периодической свертки. Поскольку сдвигать на единицу можно как вверх, так и вниз, постольку возникают две операции, называемые *верхним и нижним произведениями Кюннета*. Верхнее произведение соответствует формуле Кюннета для когомологий, а нижнее – для гомологий.

На множестве полигрупп имеются две естественные градуировки. *Высотой* или *размерностью* полигруппы называется номер ее наибольшего нетривиального члена, а *глубиной* или *связностью* – наименьшего. Эти градуировки, подобно размерности и связности, позволяют определить *высотный* и *глубинный* типы полигрупп. Причем высотный тип определяется посредством операции верхнего произведения, а глубинный – нижнего.

Вся теория Бокштейна, по существу, заключается в описании *верхней алгебры Кюннета* – алгебры высотных типов полигрупп. Описание Бокштейна заключается в следующем: высотный тип полигруппы $\mathcal{G}$ однозначно определяется *функциями Бокштейна*, которые каждой группе C из системы Бокштейна ставят в соответствие высоту произведения Кюннета полигруппы $\mathcal{G}$ и полигруппы $\{C, 0, 0, \dots\}$ (=размерность с коэффициентами в C). И Вторая Теорема Бокштейна дает формулу для вычисления функции Бокштейна кюннетовского произведения полигрупп.

Альтернативное описание алгебр Кюннета, предложенное в §2 настоящей работы, заключается в том, чтобы вместо размерностей относительно коэффициентов использовать тензорные типы групп. А именно, оказывается, что высотный тип полигруппы $\{G_n\}$ однозначно определяется значениями ее *высших p -факторов* Бокштейна, т.е. тензорным типом $\sigma_p G_n$ для наибольшего n , при котором он нетривиален. А высшие p -факторы произведения полигрупп вычисляются через таблицу умножения факторов размером 3×3 .

В §6 настоящей статьи показано, что размерностная алгебра изоморфна верхней алгебре Кюннета, а связностная – нижней. В случае связностной алгебры изоморфизм задается обычным функтором гомологий. В случае размерностной алгебры он осуществляется *тотальными когомологиями* $\mathcal{H}^*(X)$, определяемыми для компакта X как сумма целочисленных когомологий пар $H^*(X, A)$ по всем замкнутым подмножествам $A \subset X$.

³В литературе принят термин *градуированная группа*.

Триплетные кодировки. Для факторного описания полигрупп мы кодируем их посредством так называемых триплетов. *Триплетными кодами* или, кратко, *триплетами* мы называем элементы последовательности

$$\mathbb{N}^{\pm} = \{0, 1, 1^{+}, 2^{-}, 2, 2^{+}, \dots, n^{-}, n, n^{+}, \dots, \infty\}.$$

Триплеты делятся на три типа: со знаком минус называются *минорными*, со знаком плюс *мажорными*, а без знака *регулярными* или *натуральными*. Последних мы отождествляем с натуральными числами. Натуральное число, получающееся при отбрасывании знака триплета, называется его *основой*.

Размерностный тип компакта кодируется последовательностью триплетов – кодов высших p -факторов его тотальных когомологий. Возникающие при этом триплетные последовательности удовлетворяют следующим трем условиям:

- 1) если хотя бы один член последовательности равен нулю, то и все члены последовательности нули;
- 2) начальный член последовательности (соответствующий 0-фактору) является натуральным числом;
- 3) если какой-то член последовательности является натуральным числом, то он совпадает с начальным членом.

Триплетные последовательности, удовлетворяющие этим трем условиям, называются *корректными кодировками*. Отметим, что постоянная кодировка обязательно принимает натуральное значение. Постоянные кодировки отождествляются с натуральными числами. Множество корректных кодировок упорядочивается в соответствии с порядком, имеющимся на триплетах (которые написаны выше в порядке возрастания). А именно, одна кодировка считается больше либо равной другой, если при любом p соответствующий член первой кодировки больше либо равен соответствующему члену второй (*почленное сравнение*).

На триплетах вводятся две операции сложения – *минорная* $[+]$ и *мажорная* $\langle + \rangle$ – следующим образом: $n [+] m^{\pm} = (n + m)^{\pm} = n \langle + \rangle m^{\pm}$, $n^{\pm} [+] m^{\pm} = (n + m)^{\pm} = n^{\pm} \langle + \rangle m^{\pm}$, $n^{\pm} [+] m^{\mp} = (n + m)^{-}$ и $n^{\pm} \langle + \rangle m^{\mp} = (n + m)^{+}$. То есть основы триплетов при сложении складываются. Операции сложения на триплетах порождают аналогичные операции на кодировках. Минорная и мажорная суммы кодировок вычисляются почленно.

Совокупность ограниченных кодировок с описанным выше отношением порядка и операцией минорного сложения оказывается изоморфной размерностной алгебре. Для компакта X кодирующую его высшие когомологические факторы последовательность обозначаем $\text{Dim } X$. А через $\text{Dim}_p X$ обозначаем член этой последовательности, кодирующий p -фактор. Основа триплета $\text{Dim}_p X$ совпадает с размерностью по модулю p . А тип триплета $\text{Dim}_p X$ определяется тензорным типом соответствующего p -фактора. Таким образом, аддитивность основ триплетов выражает логарифмический закон Понтрягина. Неравенство $\text{DIM } X \geq \text{DIM } Y$ оказывается равносильным неравенству $\text{Dim } X \geq \text{Dim } Y$, и имеет место *формула произведения*

$$\text{Dim}(X \times Y) = \text{Dim } X [+] \text{Dim } Y.$$

А совокупность кодировок с тем же самым отношением порядка, но с мажорной суммой оказывается изоморфной связностной алгебре. Изоморфизм осуществляется посредством кодирующего отображения Cin , которое получается посредством кодирования *низиш* гомологических p -факторов Бокштейна.

Замечательно простой вид приобретает в результате кодирования критерий экстенсивности Дранишникова:

$$X \tau K \iff \text{Dim } X \leq \text{Cin } K.$$

Неравенство Урысона–Дыдака приобретает вид

$$\text{Dim}(X \cup Y) \leq \text{Dim } X (+) \text{Dim } Y + 1.$$

Под единицей в данной формуле подразумевается единичная кодировка, а знак $+$ поставлен без скобочек, потому что минорная и мажорная суммы совпадают в случае, когда одно из слагаемых натурально. Формула джойна комплексов выглядит так:

$$\text{Cin}(K * L) = \text{Cin } K (+) \text{Cin } L + 1.$$

И, наконец, главная формула этой статьи – *формула пересечения* – выглядит так:

$$\text{Dim}(f(X) \cap g(Y)) \leq (\text{Dim } X (+) \text{Dim } Y) (-) n.$$

Эта формула справедлива для почти всех⁴ отображений компактов X, Y в $\mathbb{R}^n$ в случае, если $\dim X, \dim Y \leq n - 2$. В последней формуле фигурирует *мажорная разность*. Вот ее определение: $C (-) D = \inf\{B \mid B (+) C \geq D\}$. Парная ей *минорная* разность определяется так: $C (-) D = \sup\{B \mid B (+) C \leq D\}$. Используя понятие мажорной разности, можно сформулировать такой вариант теоремы Урысона–Дранишникова: *для любой кодировки D в компакте X найдется такое сигма-компактное X^D , что $\text{Dim } X^D \leq D$ и $\text{Dim } Y \leq \text{Dim } X (-) (D + 1)$ для любого компакта $Z \subset X \setminus X^D$.*

Размерности пересечений. Кодовая алгебра $\mathfrak{CD}$ определяется как множество корректных кодировок с введенным выше отношением порядка и парой операций сложения $[+]$, $\langle + \rangle$. Эти две операции сложения, как будет показано в статье, при любых B, C, D удовлетворяют следующему неравенству *парной ассоциативности*:

$$D [+](C \langle + \rangle B) \leq (D [+]) C \langle + \rangle B.$$

Оказывается, что знания этого неравенства достаточно для того, чтобы проводить вычисления в кодовой алгебре. Таковые вычисления в значительном количестве приходится проводить в третьей главе, посвященной теории пересечений компактов.

Размерность пересечения компактов $X_1, X_2, \dots, X_k$, находящихся в общем положении в n -мерном евклидовом пространстве, как показано в этой статье, выражается следующей формулой

$$\dim(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k) = \dim(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k) - (k - 1)n.$$

⁴В этой статье *почти все* значит *дополнение имеет первую категорию*.

Для $k = 2$ этот результат доказан в статье [19]. Но из результата для $k = 2$ нельзя вывести результат для $k = 3$, потому что он дает неполную информацию о размерностном типе пересечения. Полная информация должна в себя включать кохомологические размерности пересечения по всем бокштейновским группам. В “бокштейновских координатах” размерностный тип пересечения записывается ненамного сложнее размерностного типа произведения. Но и бокштейновское представление размерностного типа произведения не отличается простотой. И сложность выражения размерностей по бокштейновским группам для многократного пересечения растет с ростом кратности.

Триплетный формализм является, альтернативным бокштейновскому, координатным представлением размерностно-связностной алгебры. Но оказывается, что вычисления в этой алгебре можно проводить, вообще не прибегая к координатам.

Так, формула для пересечения трех компактов получается из формулы парного пересечения следующей выкладкой:

$$\begin{aligned} \text{Dim}(X_1 \cap X_2 \cap X_3) &= ((\text{Dim}(X_1 \cap X_2) \langle - \rangle n) [+] \dim X_3) \langle - \rangle n \\ &= (((\text{Dim } X_1 [+] \text{Dim } X_2) \langle - \rangle n) [+] \text{Dim } X_3) \langle - \rangle n \\ &= (\text{Dim } X_1 [+] \text{Dim } X_2 [+] \text{Dim } X_3) \langle - \rangle 2n. \end{aligned}$$

Доказательство последнего равенства занимает три строчки, оно проводится “бескоординатно” и использует общие свойства операций сложения $[+]$, $\langle + \rangle$ и вычитания $[-]$, $\langle - \rangle$, а также то обстоятельство, что $n [-] D = n \langle - \rangle D$ для кодировки размерности $\leq n - 1$. Последнее обстоятельство и приводит к ограничению на коразмерность компактов. Причина, по которой эти выкладки не проходят для компактов коразмерности 1, заключается в отсутствии 1^- – минорной единицы – среди триплетов. Таким образом, формула для размерности пересечения нескольких компактов выводится из формулы пересечения для двух.

Все вычисления, проведенные в этой статье при получении основных результатов по теории пересечений компактов, имеют такой бескоординатный характер. Понятие размерности по группе коэффициентов почти не применяется при таком подходе к изложению кохомологической теории размерности.

Структура статьи. Статья начинается с алгебры. Для понимания ее алгебраической части от читателя требуется лишь элементарное знакомство с понятием тензорного и периодического произведения абелевых групп. Знание теории Бокштейна не предполагается, она полностью переизложена в алгебраической части. Третий параграф можно читать независимо от двух предыдущих.

Начинать чтение статьи можно также со второй главы. Четвертый параграф не зависит от алгебры. Для его понимания от читателя требуются лишь элементарные знания из теории непрерывного продолжения отображений. В этом параграфе изложены все основные результаты теории экстерности. И он может служить введением в эту теорию.

Завершающая глава посвящена теории пересечений. Эта геометрическая глава опирается на все предыдущие результаты. Но § 7 совершенно элементарен и может быть прочитан независимо от всего остального. Для понимания § 8 и § 9 необходимо

владение размерностными кодировками. Хотя понятие ручного компакта и появляется начиная с § 8, применения теории М. А. Штанько удается избежать вплоть до заключительного раздела § 9.

Параграф, посвященный триплетному кодированию (§ 3), хотя и опирается на результаты первой главы, может быть прочитан независимо. В этом параграфе необходимо научиться технике вычислений в кодовой решетке. Эта техника необходима для понимания последней главы.

Наименее элементарен пятый параграф, посвященный доказательству критерия экстенсивности Дранишников. От читателя здесь требуется как минимум владение теорией препятствий.

Глава 1. Алгебра

§ 1. Тензорная классификация абелевых групп

Терминология. Через $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_0$ обозначаются множество простых чисел и простых чисел с нулем. Для простого p и группы G ее p -компонентой называется подгруппа $\text{Тог}_p G \subset G$, состоящая из элементов, порядок которых является степенью числа p . Подгруппа кручения $\text{Тог } G$, составленная всеми элементами конечного порядка, является прямой суммой p -компонент: $\text{Тог } G = \bigoplus_{p \in \mathfrak{P}} \text{Тог}_p G$.

И мы называем факторгруппу $G / \text{Тог } G$ ее 0-компонентой и обозначаем G^0 . Число p (нуль или простое) будем называть *периодом* группы G , если p -компонента G нетривиальна. Множество всех периодов группы обозначается $\mathcal{T}(G)$ и называется ее *периодическим спектром*. Группу, периодический спектр которой состоит ровно из одного числа, будем называть *монопериодической*. Монопериодическая группа периода p совпадает со своей p -компонентой и называется p -группой при $p > 0$.

Простое число p называем *делителем* группы G , если $G = pG$, т.е. каждый элемент группы G делится на p . Группа, имеющая p делителем, называется p -делимой. Множество всех делителей группы G обозначается $\mathcal{D}(G)$.

Группу, состоящую из одного элемента, называем *тривиальной* или нулевой и обозначаем 0. Нулевая группа 0 характеризуется отсутствием периодов, так что $\mathcal{D}(0) = \mathfrak{P}$ и $\mathcal{T}(0) = \emptyset$.

Группа называется *делимой*, если $\mathcal{D}(G) = \mathfrak{P}$. Напомним, что p -группа делима на любое простое $q \neq p$, поэтому ее делимость равносильна p -делимости.

Основные группы. Аддитивные группы целых и рациональных чисел обозначаются $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Циклическая группа порядка p обозначается $\mathbb{Z}_p$. Несократимая дробь m/n называется p -целым числом, если ее знаменатель взаимно прост с p . Через $\mathbb{Z}_{(p)}$ обозначается подгруппа рациональных чисел, состоящая из p -целых чисел. Через $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_{(p)} / \mathbb{Z}$ обозначается квазициклическая p -группа.

Совокупность групп $\{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{(p)}\}_{p \in \mathfrak{P}}$ обозначается σ и называется *системой Бокштейна*. Группы $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{(p)}$ будем называть *бокштейновскими факторностями* p , а рациональные числа – факторности 0.

Для бокштейновских групп нетрудно проверить следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{Z}_{(p)}) &= \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p) = \mathfrak{P} \setminus p, & \mathcal{D}(\mathbb{Q}) &= \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) = \mathfrak{P}, \\ \mathcal{T}(\mathbb{Z}_{(p)}) &= \mathcal{T}(\mathbb{Q}) = \emptyset, & \mathcal{T}(\mathbb{Z}_p) &= \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p) = \{p\}. \end{aligned}$$

Тензорная сила. *Индексом тривиальности* группы G будем называть число, обозначаемое через $\text{triv } G$ и равное нулю, если группа $G = 0$, и единице в противном случае.

Мы говорим, что тензорная сила группы G не уступает тензорной силе группы H , и записываем это отношение $G \succ H$, если $\text{triv } G \otimes F \geq \text{triv } H \otimes F$ для любой F . Группы равной тензорной силы называются *тензорно эквивалентными*, и отношение тензорной эквивалентности обозначается так: $\sim$.

Из дистрибутивности операции тензорного произведения по отношению к прямой сумме групп непосредственно вытекает соотношение

$$\text{triv}((G \oplus G') \otimes H) = \max\{\text{triv}(G \otimes H), \text{triv}(G' \otimes H)\}.$$

Прямая сумма индуцирует идемпотентную операцию $(G \oplus G \sim G)$ на множестве тензорных типов групп, согласованную с тензорным порядком, так что неравенство $G \succ G'$ равносильно равенству $G \oplus G' \sim G$. Тензорное произведение также индуцирует операцию на множестве тензорных типов, как вытекает из следующего утверждения.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ТИПОВ. *Если $G \sim G'$ и $H \sim H'$, то $G \otimes H \sim G' \otimes H'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в цепочке равенств: $\text{triv}(G \otimes H) \otimes F = \text{triv } G \otimes (H \otimes F) = \text{triv } G' \otimes (H \otimes F) = \text{triv}(G' \otimes F) \otimes H = \text{triv}(G' \otimes F) \otimes H' = \text{triv}(G' \otimes H') \otimes F$.

Тензорно-периодическая последовательность. Всякая тройка групп $G' \subset G, H$ порождает следующую точную последовательность [35]

$$0 \rightarrow G' * H \rightarrow G * H \rightarrow G/G' * H \rightarrow G' \otimes H \rightarrow G \otimes H \rightarrow G/G' \otimes H \rightarrow 0,$$

гомоморфизмы которой являются тензорными и периодическими произведениями тождественного $\text{id}_H: H \rightarrow H$ на соответствующие гомоморфизмы включения или факторизации пары G', G .

Тензорно-периодическая последовательность естественно делится на две половины, левую – периодическую и правую – тензорную, которые, вообще говоря, не являются точными. Периодическая последовательность точна слева, а тензорная – справа. Из этих обстоятельств непосредственно вытекают следующие соотношения между тензорной и периодической силами группы, подгруппы и фактор-группы, которые мы будем именовать свойствами *монотонности* тензорного произведения по фактор-группам и периодического – по подгруппам.

Свойства монотонности. *Для любых групп $G' \subset G, H$ справедливы неравенства: $\text{triv}(G \otimes H) \geq \text{triv}(G/G' \otimes H)$ и $\text{triv}(G' * H) \leq \text{triv}(G * H)$.*

Обращение в нуль последнего члена периодической части тензорно-периодической последовательности является, очевидно, необходимым и достаточным условием точности ее тензорной части, что и фиксирует следующее предложение.

УСЛОВИЕ ТЕНЗОРНОЙ ТОЧНОСТИ. *Если $H * G/G' = 0$, то точна последовательность $0 \rightarrow G' \otimes H \rightarrow G \otimes H \rightarrow G/G' \otimes H \rightarrow 0$.*

Это условие выполнено, когда H не имеет кручения. Таким образом, мы получаем такое следствие.

ТЕНЗОРНАЯ 0-МОНОТОННОСТЬ. $\text{triv } G' \otimes H \leq \text{triv } G \otimes H$, если $\text{Tor } H = 0$.

ТЕНЗОРНАЯ 0-НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ. Тензорное произведение нетривиальных групп без кручения нетривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G и H – две группы без кручения. Тогда G содержит подгруппу G' , изоморфную $\mathbb{Z}$. И поскольку $G' \otimes H = H \neq 0$, постольку в силу 0-монотонности получаем $G \otimes H \neq 0$.

ОТШЕПЛЯЕМОСТЬ НУЛЯ. $G \sim G^0 \oplus \text{Tor } G$ для любой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку G^0 не имеет кручения, постольку для любой группы H точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Tor } G \otimes H \rightarrow G \otimes H \rightarrow G^0 \otimes H \rightarrow 0,$$

поэтому $\text{triv}(G \otimes H) = \max\{\text{triv}(\text{Tor } G \otimes H), \text{triv}(G^0 \otimes H)\}$ определяется той же формулой, что и для $G^0 \oplus \text{Tor } G$.

Свойства делителей групп

Помимо тензорно-периодической последовательности есть два основных простых соображения, используемых при вычислениях тензорных произведений. Мы будем именовать их *принципом уничтожения* и *принципом сохранения*.

ПРИНЦИП УНИЧТОЖЕНИЯ. Если g делится на порядок h , то $g \otimes h = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $nh = 0$ и $g = ng'$, то $g \otimes h = g' \otimes nh = 0$.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ. Если группа G является модулем над кольцом с единицей R , то соответствие $g \rightarrow g \otimes 1$ индуцирует изоморфизм группы G на тензорное произведение аддитивной группы кольца $G \otimes R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратный гомоморфизм из $G \otimes R \rightarrow G$ задается модульным умножением $(r \otimes g) \rightarrow rg$.

Поскольку всякая p -группа делима на любое простое q , отличное от p , из принципа уничтожения получаем такое следствие:

Тензорное произведение p -группы на q -группу тривиально, если $p \neq q$.

Во всякой p -группе G уравнение $nx = g$ имеет единственное решение, если n не делится на p . Таким образом, возможно определить умножение p -целых рациональных чисел на элементы группы, т.е. превратить ее в модуль над кольцом $\mathbb{Z}_{(p)}$. Тензорное произведение $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ называется *p -локализацией* группы G .

ЛЕММА О ЛОКАЛИЗАЦИИ. Если $G^0 = 0$, то $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \text{Tor}_p G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{Z}_{(p)}$ делится на любое простое q , отличное от p , постольку $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \text{Tor}_q G = 0$ в силу принципа уничтожения. И $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \text{Tor}_p G = \text{Tor}_p G$ в силу принципа сохранения. Откуда и следует нужное утверждение.

КРИТЕРИЙ ДЕЛИМОСТИ. $p \in \mathcal{D}(G)$, если и только если $G \otimes \mathbb{Z}_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это так ввиду изоморфизма $\mathbb{Z}_p \otimes G = G/pG$ (см. [35]).

Из этого критерия вытекает, что свойство p -делимости является *инвариантом тензорного типа*. То есть группы, имеющие одинаковый тензорный тип, имеют одинаковые множества делителей.

ТЕОРЕМА О ДЕЛИТЕЛЯХ. Для любых групп G и H справедливы формулы

$$\mathcal{D}(G \otimes H) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{D}(H), \quad \mathcal{D}(G \oplus H) = \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся доказательством формулы для делителей произведения, оставив читателю формулу для делителей суммы. Если G делится на p , то $G \otimes \mathbb{Z}_p = 0$, и, значит, $G \otimes H \otimes \mathbb{Z}_p = 0$, поэтому $G \otimes H$ делится на p в силу критерия делимости. Пусть $G \otimes H$ делится на p , тогда $0 = G \otimes H \otimes \mathbb{Z}_p = G \otimes \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p \otimes H$. В группе $G \otimes \mathbb{Z}_p$ все элементы имеют порядок p , и она является $\mathbb{Z}_p$ -модулем, т.е. векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$ и, следовательно, изоморфна прямой сумме групп $\mathbb{Z}_p$. То же самое относится и к группе $H \otimes \mathbb{Z}_p$. Поэтому предположение, что обе они отличны от нуля, приводит к противоречию с предположением, что они имеют нулевое тензорное произведение. Значит, одна из них ноль и, следовательно, делится на p .

КРИТЕРИЙ $(p \otimes p)$ -ТРИВИАЛЬНОСТИ. Тензорное произведение двух p -групп тривиально тогда и только тогда, когда одна из них делима на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одна из них делится на p , то произведение групп тривиально в силу принципа уничтожения. Если же обе не делятся на p , то и произведение не делится на p в силу теоремы о делителях.

КРИТЕРИЙ $(0 \otimes p)$ -ТРИВИАЛЬНОСТИ. Тензорное произведение p -группы G на группу H без кручения равно нулю в том и только том случае, когда $p \in \mathcal{D}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если H делима на p , то $G \otimes H = 0$ в силу принципа уничтожения. Если H не делима на p , то $H \otimes \mathbb{Z}_p \neq 0$. А так как всякая p -группа содержит $\mathbb{Z}_p$ в качестве подгруппы, то свойство 0-монотонности тензорного произведения влечет $H \otimes G \neq 0$.

КРИТЕРИЙ ДЕЛИМОСТИ 0-КОМПОНЕНТЫ. Произведение $G \otimes \mathbb{Q}_p$ тривиально, если и только если G^0 делится на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G^0 не делится на p , то $G^0 \otimes \mathbb{Q}_p \neq 0$ в силу критерия $(0 \otimes p)$ -тривиальности. А значит, и $G \otimes \mathbb{Q}_p \neq 0$ в силу монотонности тензорного произведения по факторгруппам. Если же G^0 делится на p , то $G^0 \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ и $\text{Tor } G \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ в силу критериев $(p \otimes q)$ - и $(p \otimes p)$ -тривиальности. Отсюда $G \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ в силу леммы об отщеплении нуля.

Классификация монопериодических групп

Следующее предложение решает проблему тензорной классификации для монопериодических групп.

КРИТЕРИЙ ДЕЛИТЕЛЕЙ. Монопериодические группы G и H тензорно эквивалентны $G \sim H$, если и только если $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что тензорно эквивалентные группы имеют совпадающие множества делителей, уже отмечалось выше (см. критерий делимости). Предположим теперь, что G и H являются монопериодическими группами периода p , возможно равного нулю, у которых совпадают множества делителей. Докажем их тензорную эквивалентность.

Если $p = 0$, $G \neq 0$ и группа F такова, что $F \otimes G = 0$, тогда $F^0 = 0$ в силу 0-невыврожденности тензорного произведения и леммы об отщеплении 0-компоненты. Но тогда F является прямой суммой своих компонент кручения. Следовательно, $G \otimes \text{Тог}_q F = 0$ для всякого простого q . Последнее в силу критерия $(0 \otimes p)$ -тривиальности означает, что $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{D}(G)$. Но тогда и $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{D}(H)$, и согласно тому же критерию $H \otimes F = 0$.

Если $p > 0$, $G \neq 0$ и $p \notin \mathcal{D}(G)$, а группа F такова, что $F \otimes G = 0$, то F делится на p , и потому тензорное произведение группы F на любую p -группу тривиально и, в частности, $F \otimes H = 0$.

Если $p > 0$, $G \neq 0$ и $p \in \mathcal{D}(G)$, а группа F такова, что $F \otimes G = 0$, то как G , так и H являются делимыми группами, и потому $H \otimes \text{Тог} F = 0$. Условие же $F^0 \otimes G = 0$ в силу критерия $0 \otimes p$ -тривиальности равносильно делимости $p \in \mathcal{D}(F^0)$. И на основании этого же критерия $F^0 \otimes H = 0$, откуда и $F \otimes H = 0$.

Поскольку множество делителей группы $\mathbb{Z}_{(p)}$ представляет собой все простые числа за исключением p , постольку из формул сложения для делителей и только что доказанного критерия делителей немедленно вытекает такое следствие:

ТЕНЗОРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ. Если $\text{Тог} G = 0$ и $\mathcal{D}(G) \neq \mathfrak{P}$, то $G \sim \bigoplus_{p \notin \mathcal{D}(G)} \mathbb{Z}_{(p)}$. Если $\text{Тог} G = 0$ и $\mathcal{D}(G) = \mathfrak{P}$, то $G \sim \mathbb{Q}$.

А поскольку для p -группы ($p > 0$) все простые, за исключением, быть может, p , являются ее делителями, постольку из критерия делителей вытекает такое следствие:

ПРИМАРНАЯ ТЕНЗОРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ. Всякая p -группа G тензорно эквивалентна либо циклической $\mathbb{Z}_p$, либо квазициклической $\mathbb{Q}_p$ группе.

Приведенных выше соображений хватает для вычисления тензорных произведений всех бокштейновских групп. Таблица таких произведений для групп факторности p приведена ниже.

Тензорная таблица умножения

	$\mathbb{Z}_{(p)}$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Q}_p$
$\mathbb{Z}_{(p)}$	$\mathbb{Z}_{(p)}$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Q}_p$
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$	0
$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{Q}_p$	0	0

Произведение бокштейновских групп различных факторностей нулевое, если только обе они не являются группами без кручения, и равно $\mathbb{Q}$, если они таковыми являются. Изоморфизм $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = \mathbb{Q}$ устанавливается отображением $x \otimes y \rightarrow xy$.

Периодическая классификация групп. Известно [35], что периодическое произведение любой группы $G * \mathbb{Z}_p$ на циклическую изоморфно подгруппе G , состоящей из элементов порядка p . Этого соображения хватает для заполнения следующей таблицы:

Периодическая таблица умножения

	$\mathbb{Z}_{(p)}$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Q}_p$
$\mathbb{Z}_{(p)}$	0	0	0
$\mathbb{Z}_p$	0	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$
$\mathbb{Q}_p$	0	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Q}_p$

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. *Периодическое произведение ненулевых p -групп нетривиально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$, а всякая p -группа содержит $\mathbb{Z}_p$ как подгруппу, то $\text{triv } G * H \geq \text{triv } \mathbb{Z}_p * H \geq \text{triv } \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p = 1$ в силу отмеченной выше монотонности периодического произведения по подгруппам.

Две группы G и H называем *периодически эквивалентными*, если $\text{triv}(G * F) = \text{triv}(H * F)$ для любой группы F .

КРИТЕРИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. *Группы G и H периодически эквивалентны, если и только если $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, периодическое произведение p -группы на q -группу при различных простых $p \neq q$ тривиально [35]. Поэтому нужное нам утверждение вытекает из доказанной выше леммы о нетривиальности периодического произведения.

Факторная классификация

Число $(G, H) = \max\{3 \text{triv}(G \otimes H), 2 \text{triv}(G * H)\}$ назовем *индексом кофакторности* групп G и H . Группы, имеющие нулевой индекс кофакторности, называются *взаимно простыми*. Как нетрудно видеть, взаимно простые группы не могут иметь общих нетривиальных p -компонент, что оправдывает этот термин.

Будем называть группы G и H *изофакторными*, если $(G, F) = (H, F)$ для любой группы F , и писать $G \approx H$. Если же для любой группы F выполняется неравенство $(G, F) \leq (H, F)$, то будем говорить, что группа H *факторно доминирует* группу G , и писать $G \ll H$. Факторное доминирование, очевидно, влечет за собой тензорное. А тензорное и периодическое доминирование вместе влекут за собой факторное.

Неравенство $H \ll G$ расшифровывается следующим образом: если $H \otimes F \neq 0$, то и $G \otimes F \neq 0$, если же $H \otimes F = 0$ и $H * F \neq 0$, то $(G \otimes F) \oplus (G * F) \neq 0$.

Дистрибутивность операций тензорного и периодического произведений по отношению к прямой сумме влечет следующее свойство дистрибутивности индекса кофакторности по отношению к прямой сумме.

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ ИНДЕКСА КОФАКТОРНОСТИ. $(G, \bigoplus H_n) = \max(G, H_n)$.

Из этой дистрибутивности вытекает, что операция прямой суммы индуцирует операцию сложения на факторных типах групп. Так как 0-компонента никак не влияет на периодическое произведение, то равенство $G \sim G^0 \oplus \text{Tor } G$ влечет $G \approx G^0 \oplus \text{Tor } G$. Таким образом, имеет место следующее

КОМПОНЕНТНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ФАКТОРНОГО ТИПА. *Всякая группа факторно эквивалентна прямой сумме своих p -компонент ($p \geq 0$).*

Элементы $\mathcal{T}(G)$, входящие в $\mathcal{D}(G^0)$, называются *существенными периодами*. Множество всех существенных периодов обозначается через $\mathcal{T}^0(G)$. Тройку $\{\mathcal{D}(G), \mathcal{D}(G^0), \mathcal{T}^0(G)\}$ мы называем *факторным спектром* группы G . Для факторного спектра имеем равенство

$$\mathcal{D}(G^0) = \mathcal{D}(G) \cup \mathcal{T}^0(G).$$

Перейдем к факторной классификации абелевых групп. Для монопериодических групп факторная классификация совпадает с тензорной. Разница между этими понятиями проявляется лишь при сравнении смешанных групп. Для начала научимся сравнивать периодические группы с группами без кручения.

КРИТЕРИЙ СМЕШАННОГО СРАВНЕНИЯ. *Если G не имеет кручения, а H является p -группой и $p \notin \mathcal{D}(G)$, то $H \ll G$, если же $p \in \mathcal{D}(G)$, то G тензорно не сильнее чем H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если p является делителем группы G , то $G \otimes \mathbb{Z}_p = 0$ и $H \otimes \mathbb{Z}_p \neq 0$, поэтому неравенство $G \succ H$ не выполнено. Если же p не является делителем для G , то $G \succ G \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \sim \mathbb{Z}_{(p)}$ в силу критерия делителей. Но $\mathbb{Z}_{(p)} \succ \mathbb{Z}_{(p)} \otimes H \sim H$, откуда $G \succ H$. Если же $G \otimes F = 0$, то $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes F = 0$, поэтому F является периодической группой без p -компоненты. Но тогда $F * H = 0$ для p -группы H . Тем самым доказано факторное доминирование $H \ll G$.

p -компоненту группы G назовем *несущественной*, если $\text{Tor}_p G \ll G^0$. Из критерия смешанного сравнения получаем

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВЕННОСТИ. *p -компонента существенна тогда и только тогда, когда $p \in \mathcal{D}(G^0)$.*

КОМПОНЕНТНЫЙ КРИТЕРИЙ ИЗОФАКТОРНОСТИ. *Необходимым и достаточным условием изофакторности групп является совпадение тензорных типов всех существенных компонент:*

$$G \approx H \iff \text{Tor}_p G \sim \text{Tor}_p H \quad \forall p \in \mathcal{D}(G^0) \cup \mathcal{D}(H^0) \text{ и } G^0 \sim H^0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что для монопериодических групп тензорная эквивалентность совпадает с факторной. Поэтому тензорная эквивалентность существенных компонент влечет их факторную эквивалентность, а значит, и факторную эквивалентность их сумм, что в свою очередь влечет изофакторность самих групп.

Обратно, пусть $G \approx H$. В силу критерия $(0 \otimes p)$ -тривиальности тензорное произведение $G \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ в том и только том случае, когда p является делителем 0-компоненты. Следовательно, $\mathcal{D}(G^0)$ является инвариантом тензорного, а значит, и факторного типа. То есть $G \sim H$ влечет $\mathcal{D}(G^0) = \mathcal{D}(H^0)$, но последнее влечет $G^0 \sim H^0$ в силу критерия делителей.

Пусть p является делителем нуль-компонент. Тогда результат тензорного умножения групп G и H на p -группы определяется лишь их p -компонентами. Поэтому, тензорно умножая на $\mathbb{Z}_p$, мы можем доказать, что $\text{Тог}_p G$ имеет ту же делимость, что и $\text{Тог}_p H$. А в случае делимости обеих компонент индекс кофакторности с $\mathbb{Z}_p$ покажет нам совпадение индексов тривиальности компонент. А это уже влечет их тензорную эквивалентность в силу примарной классификации.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ИЗОФАКТОРНОСТИ. *Группы факторно эквивалентны в том и только том случае, когда совпадают их факторные спектры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G \sim H$, то $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(H)$ в силу критерия делимости. Далее, включение $p \in \mathcal{D}(G^0)$ проверяется тензорным умножением на $\mathbb{Q}_p$. А именно, из критерия тривиальности для p -групп вытекает, что $G \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ если и только если $p \in \mathcal{D}(G^0)$. Поэтому тензорная эквивалентность групп влечет совпадение множеств делителей их 0-компонент. Принадлежность нуля к множеству периодов проверяется умножением на $\mathbb{Q}$. Для доказательства совпадения множеств существенных периодов потребуется использовать изофакторность групп. А именно, если p является существенным периодом группы G , то наличие кручения $\text{Тог}_p G$ проверяется индексом кофакторности $(G, \mathbb{Z}_p)$, который в этом случае должен быть положителен (равняется трем, если $\text{Тог}_p G \sim \mathbb{Z}_p$, двум, если $\text{Тог}_p G \sim \mathbb{Q}_p$, и нулю, если $\text{Тог}_p G \sim 0$). Поскольку для H мы в этом случае имеем те же индексы, то, зная делимость H^0 и положительность $(H, \mathbb{Z}_p)$, можем сделать вывод о наличии $\text{Тог}_p H \neq 0$. Таким образом, установлено, что факторные спектры являются инвариантами факторного типа.

Поскольку тензорный тип монопериодической группы определяется множеством ее делителей, постольку группы с одинаковыми факторными спектрами имеют тензорно эквивалентные существенные компоненты и являются факторно эквивалентными в силу компонентного критерия изофакторности. Теорема полностью доказана.

Теорема Бокштейна о базисе

Для любой группы G и простого числа p определим группу $\sigma_p(G)$, называемую *бокштейновским p -фактором* группы G , следующим образом: $\sigma_p(G) = \mathbb{Z}_{(p)}$, если $p \notin \mathcal{D}(G^0)$, $\sigma_p(G) = \mathbb{Z}_p$, если $p \in \mathcal{D}(G^0) \setminus \mathcal{D}(G)$, $\sigma_p(G) = \mathbb{Q}_p$, если $p \in \mathcal{T}^0(G) \cap \mathcal{D}(G)$, и $\sigma_p(G) = 0$, если $p \in \mathcal{D}(G) \setminus \mathcal{T}(G)$.

И положим $\sigma_0(G) = \mathbb{Q}$, если $G^0 \neq 0$, и $\sigma_0(G) = 0$, если $G^0 = 0$. Из этого определения, зная поведение факторных спектров при тензорном произведении, нетрудно получить следующее, нужное нам в дальнейшем утверждение.

ЛЕММА О ФАКТОРЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ. $\sigma_p G = \sigma_p(G \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$.

Следующее тождество нетрудно проверить с помощью спектрального критерия. Именно оно, как мы скоро увидим, и представляет собой основное содержание Первой

Теоремы Бокштейна. И мы будем называть его *разложением Бокштейна*.

$$G \approx \bigoplus_{p \in \mathbb{P}_0} \sigma_p(G).$$

Тензорный тип группы G называется *неразложимым*, если равенство $G \sim G_1 \oplus G_2$ влечет $G \sim G_1$ или $G \sim G_2$. Таковы типы, представленные бокштейновскими группами, что нетрудно получить из спектрального критерия. Из доказанной теоремы вытекает, что и наоборот, всякий неразложимый тензорный тип является бокштейновским, т.е. является тензорным типом бокштейновской группы.

Неравенства Бокштейна. При том изложении теории Бокштейна, которая приводится в этой статье, по существу, отпадает потребность рассмотрения так называемых *неравенств Бокштейна*. Однако, они также могут быть естественно рассмотрены и при этом подходе.

Так, полученные результаты дают следующую таблицу сравнений бокштейновских групп:

$$\mathbb{Q}_p \ll \mathbb{Q} \ll \mathbb{Z}_{(p)} \gg \mathbb{Z}_p \gg \mathbb{Q}_p.$$

При этом бокштейновские группы различных положительных факторностей между собой несравнимы. Эти сравнения соответствуют следующим четырем *неравенствам Бокштейна*.

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_p} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \geq \dim_{\mathbb{Q}} X \geq \dim_{\mathbb{Q}_p} X.$$

(Здесь под X понимается произвольный компакт.)

Для того чтобы сформулировать аналоги остальных двух неравенств Бокштейна для любой группы G , обозначим через D_G *функцию кофакторности*, которая каждой группе H ставит в соответствие индекс кофакторности $D_G(H) = (G, H)$. Тогда аналоги двух оставшихся неравенств Бокштейна могут быть сформулированы следующим образом:

$$D_{\mathbb{Q}_p} X \leq \max\{D_{\mathbb{Q}} X, D_{\mathbb{Z}_{(p)}} X - 1\}, \quad D_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \leq \max\{D_{\mathbb{Q}} X, D_{\mathbb{Q}_p} X + 1\}.$$

(Здесь через X обозначена произвольная группа.)

Они получаются из рассмотрения точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow 0$ ввиду следующего общего утверждения.

Неравенства точной последовательности. Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ справедливы следующие неравенства: $D_B \leq \max\{D_A, D_C\}$, $D_A \leq \max\{D_B, D_C + 1\}$, $D_C \leq \max\{D_B, D_A - 1\}$.

Доказательство получается из анализа точной тензорно-периодической последовательности, возникающей при умножении короткой точной последовательности на некоторую группу. Мы докажем здесь только первое неравенство, но зато в следующей более сильной форме:

Неравенство среднего члена. Для точной последовательности $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ справедливо неравенство $D_C \leq \max\{D_A, D_B, D_D, D_E\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа, для которой $G \otimes (A \oplus B \oplus D \oplus E) = 0$. Пусть B' является факторгруппой группы B по подгруппе, являющейся образом A , и D' является факторгруппой группы D по ядру гомоморфизма в E . Тогда и $G \otimes (B' \oplus E') = 0$. Но мы имеем короткую точную последовательность $0 \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D' \rightarrow 0$, из рассмотрения тензорного произведения которой на G получаем, что $G \otimes C = 0$. Пусть теперь, кроме того, $G * (A \oplus B \oplus D \oplus E) = 0$. Обозначим через C' фактор-группу группы C по подгруппе, которая одновременно является образом гомоморфизма из B и ядром гомоморфизма в D . Имеем следующие точные последовательности: $0 \rightarrow C' \rightarrow D \rightarrow E$ и $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C' \rightarrow 0$, из рассмотрения периодических произведений которых на G получаем: из первой – что $G * C' = 0$, а затем из второй – что $G * C = 0$, что и завершает доказательство.

§2. Кюннетовские алгебры полигрупп

Верхняя алгебра Кюннета

Обозначать полигруппы мы будем рукописными латинскими буквами $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$. n -й член полигруппы $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ и т. д. обозначается соответственно F_n, G_n, H_n и т. д. Номер члена полигруппы называется также его *размерностью*. *Высотой* полигруппы $\mathcal{G}$ будем называть максимальное n , для которого $G_n \neq 0$, обозначение: $\text{alt } \mathcal{G}$.

Будем говорить, что полигруппа $\{G_0, G_1, \dots, G_n, \dots\}$ имеет *сильное начало*, если $G_0 \approx \mathbb{Z}$, $\text{Tor } G_0 = 0 = \text{Tor } G_1$ и или $G_1 \approx \mathbb{Z}$, или $G_1 = 0$.

Полигруппы конечной высоты с сильным началом называются *верхними*.

Суммой полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называется полигруппа $\{G_n \oplus H_n\}$; обозначение: $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$. Также *почленно* определяется операция бесконечной суммы полигрупп. Операция суммы сохраняет начальные условия, и потому сумма верхних полигрупп является верхней. *Верхним произведением Кюннета* полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называется полигруппа, обозначаемая $\mathcal{G} [\times] \mathcal{H}$, n -й член которой задается формулой

$$\bigoplus_{i+j=n} (G_i \otimes H_j) \oplus \bigoplus_{i+j=n+1} (G_i * H_j).$$

Мы в дальнейшем будем обычно опускать знак кюннетовского произведения, и писать $\mathcal{G}\mathcal{H}$ вместо $\mathcal{G} [\times] \mathcal{H}$, если это не приводит к недоразумениям.

Верхнее произведение Кюннета сохраняет конечность и сильное начало. Для верхних полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ имеем $\text{Tor } G_1 = \text{Tor } H_1 = 0$ и $\mathcal{D}(G_1) = \mathcal{D}(H_1) = \emptyset$. Последнее условие, как мы знаем, характеризует тензорный тип $\mathbb{Z}$ среди групп без кручения. По формулам сложения периодов и делителей оба эти свойства сохранятся для произведения $G_1 \otimes H_1$, которое как раз совпадает с первым членом произведения $\mathcal{G}\mathcal{H}$. И начальный член произведения $\mathcal{G}\mathcal{H}$, равный $G_0 \otimes H_0$, имеет тензорный тип $\mathbb{Z}$ и не имеет кручения. Таким образом, на множестве верхних полигрупп определены операции сложения и умножения.

Из свойств дистрибутивности тензорного и периодического произведений непосредственно вытекает свойство дистрибутивности полигруппового произведения по отношению к полигрупповой сумме:

$$\mathcal{G} \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}\mathcal{H}_i.$$

Кроме того, ясно, что полигрупповые операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны. Непосредственно из определения вытекают такие оценки для высоты произведения и суммы полигрупп:

$$\begin{aligned}\text{alt}(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) &= \max\{\text{alt } \mathcal{G}, \text{alt } \mathcal{H}\}, \\ \max\{\text{alt } \mathcal{G}, \text{alt } \mathcal{H}\} + 1 &\leq \text{alt } \mathcal{G}\mathcal{H} \leq \text{alt } \mathcal{G} + \text{alt } \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Назовем верхние полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ *взаимно простыми*, если $(G_n, H_k) = 0$ для любых $n, k > 1$. Для взаимно простых полигрупп высота произведения совпадает с нижней оценкой.

Высотность. Будем говорить, что верхние полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ имеют один и тот же *высотный тип*, одинаковую *высотность* или *равновысотны*, и писать $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$, если $\text{alt } \mathcal{F}\mathcal{H} = \text{alt } \mathcal{F}\mathcal{G}$ для любой верхней полигруппы $\mathcal{F}$. Неравенство $\text{ALT } \mathcal{G} \geq \text{ALT } \mathcal{H}$ означает, что $\text{alt } \mathcal{F}\mathcal{G} \geq \text{alt } \mathcal{F}\mathcal{H}$ для любой верхней полигруппы $\mathcal{F}$.

Полигрупповые операции суммы и произведения индуцируют операции суммы и произведения на множестве высотных типов верхних полигрупп, что доказывается так же, как аналогичное утверждение для тензорных типов.

Для группы G и целого $n \geq 0$ через $G^{(n)}$ обозначаем полигруппу, у которой тривиальны все члены, за исключением n -го, который совпадает с G .

Всякая верхняя полигруппа нулевой высоты имеет высотный тип полигруппы $\mathbb{Z}^{(0)} = \{\mathbb{Z}, 0, 0, \dots\}$, которая представляет собой наименьший высотный тип. Эта полигруппа ведет себя, как единичный элемент, при умножении Кюннета. Все верхние полигруппы единичной высоты имеют высотный тип полигруппы $\mathbb{Z}^{(0)} \oplus \mathbb{Z}^{(1)} = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, \dots\}$. Полигруппы высоты ≤ 1 мы будем называть *тривиальными*. Наибольший высотный тип представляет *стационарная* полигруппа $\mathbb{Z}^{(\infty)} = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \dots\}$. Любое ограниченное множество высотных типов имеет точную верхнюю грань, которая представляется суммой представляющих типы полигрупп. Отсюда ввиду наличия наименьшего элемента вытекает, что любое множество высотных типов имеет точную нижнюю грань. Таким образом, множество высотных типов является решеткой. Операция суммы совпадает с операцией взятия верхней грани и не несет дополнительной информации о его структуре. Дистрибутивность умножения Кюннета по отношению к сумме влечет согласованность умножения с порядком. То есть неравенство $\text{ALT } \mathcal{G} \geq \text{ALT } \mathcal{H}$ влечет $\text{ALT } \mathcal{G}\mathcal{F} \geq \text{ALT } \mathcal{H}\mathcal{F}$ для любой полигруппы $\mathcal{F}$. Множество высотных типов верхних полигрупп обозначаем $\mathfrak{K}^*$ и называем *верхней алгеброй Кюннета*. Она является *решеточной полу группой* по отношению к описанному порядку и операции верхнего произведения Кюннета. Впредь по умолчанию мы будем считать, что рассматриваемые полигруппы верхние.

Верхние моногруппы. Верхняя полигруппа, у которой тривиальны все члены размерности > 1 , за исключением, может быть, одного, называется *верхней моногруппой*. Для группы G и натурального $n > 1$ через $G^{[n]}$ обозначим верхнюю моногруппу $\mathbb{Z}^{(0)} \oplus \mathbb{Z}^{(1)} \oplus G^{(n)}$, n -й член которой совпадает с G , а все остальные члены размерности > 1 тривиальны. Таким образом, $\text{alt } G^{[n]} = n$ для нетривиальной G .

Группа $G_{\text{alt } \mathcal{G}}$ называется *высшей* группой полигруппы $\mathcal{G}$ и обозначается $|\mathcal{G}|$.

Следующее предложение раскрывает связь между изофакторностью и равновысотностью.

КРИТЕРИЙ РАВНОВЫСОТНОСТИ МОНОГРУПП. *Верхние моногруппы $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ равновысотны $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$, если и только если $\text{alt } \mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{H}$ и $|\mathcal{G}| \approx |\mathcal{H}|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия совпадения высот полигрупп очевидна. Что касается изофакторности, то при умножении моногруппы $\mathcal{G}$ на моногруппу $\mathcal{F}$ высота произведения $\mathcal{G}\mathcal{F}$ определяется на основе индекса кофакторности $(|\mathcal{G}|, |\mathcal{F}|)$. А именно, она равна $\text{alt } \mathcal{F} + \text{alt } \mathcal{G}$, если $(|\mathcal{G}|, |\mathcal{F}|) = 3$, она равна $\text{alt } \mathcal{F} + \text{alt } \mathcal{G} - 1$, если $(|\mathcal{G}|, |\mathcal{F}|) = 2$, и она равна $\max\{\text{alt } \mathcal{F}, \text{alt } \mathcal{G}\} + 1$, если $(|\mathcal{G}|, |\mathcal{F}|) = 0$.

Моногруппа $|\mathcal{G}|^{[\text{alt } \mathcal{G}]}$ называется *высшей моногруппой* полигруппы $\mathcal{G}$ и обозначается $[\mathcal{G}]$.

Полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ будем называть *почленно изофакторными* и писать $\mathcal{G} \approx \mathcal{H}$, если $G_n \approx H_n$ для любого n .

ФАКТОРНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВЫСОТНОСТИ. *Если $\mathcal{G} \approx \mathcal{H}$, то $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что почленная изофакторность полигрупп влечет равенство их высот. Предположим, что для полигрупп высоты $< n$ доказано, что почленная изофакторность влечет равновысотность. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ имеют высоту n . Пусть $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{H}'$ — *усеченные* полигруппы высоты $n - 1$, для которых $G'_k = G_k$ и $H'_k = H_k$ при $k < n$. Тогда $\mathcal{G}' \approx \mathcal{H}'$ и по предположению индукции $\text{ALT } \mathcal{G}' = \text{ALT } \mathcal{H}'$. По критерию равновысотности высшие моногруппы у $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ равновысотны: $\text{ALT}[\mathcal{G}] = \text{ALT}[\mathcal{H}]$. Но $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \oplus [\mathcal{G}]$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus [\mathcal{H}]$, откуда и следует, что $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$.

Отметим такое следствие доказанного:

МОНОГРУППОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. *Всякая полигруппа $\mathcal{G}$ имеет высотный тип суммы моногрупп: $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \bigoplus_{n \leq \text{alt } \mathcal{G}} G_n^{[n]}$.*

Две моногруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ будем называть *смещенными* друг относительно друга, если $|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}'|$. При этом мы говорим что $\mathcal{G}$ смещена вверх (соответственно вниз) относительно $\mathcal{G}'$, если $\text{alt } \mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{G}'$ (соответственно $\text{alt } \mathcal{G} < \text{alt } \mathcal{G}'$).

ФОРМУЛЫ СМЕЩЕНИЯ. *Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная полигруппа, $\mathcal{B}'$ — моногруппа, смещенная вверх относительно моногруппы $\mathcal{B}$. Тогда справедливо неравенство смещения $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B}' - \text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B} \leq \text{alt } \mathcal{B}' - \text{alt } \mathcal{B}$; если же $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{G} + 1$ или $\text{alt } \mathcal{B} \geq \text{alt } \mathcal{G}$, то имеет место равенство смещения $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B}' - \text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B} = \text{alt } \mathcal{B}' - \text{alt } \mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(|\mathcal{B}|, G_n) = 0$ при любом $n > 1$, то $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ взаимно просты, так же как $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{G}$. Тогда $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} = 1 + \max\{\text{alt } \mathcal{B}, \text{alt } \mathcal{G}\}$ и $\text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{G} = 1 + \max\{\text{alt } \mathcal{B}', \text{alt } \mathcal{G}\}$, и справедливость неравенства смещения очевидна. Если же $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{G} + 1$ или $\text{alt } \mathcal{B} \geq \text{alt } \mathcal{G}$, то получаем $\text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{G} = 1 + \text{alt } \mathcal{B}'$ и $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} = 1 + \text{alt } \mathcal{B}$, поэтому справедливо равенство смещения.

В противном случае пусть $k = \max\{i + (G_i, |\mathcal{B}|) - 3 \mid (G_i, |\mathcal{B}|) > 0\}$. Тогда $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} = \max\{\text{alt } \mathcal{B} + k, \text{alt } \mathcal{G} + 1\}$ и $\text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{G} = \max\{\text{alt } \mathcal{B}' + k, \text{alt } \mathcal{G} + 1\}$. Из этих формул очевидно неравенство смещения. А выполнение условий $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{G} + 1$ или $\text{alt } \mathcal{B} \geq \text{alt } \mathcal{G}$ приводит к формулам $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{B} + k$ и $\text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{B}' + k$, из которых вытекает равенство смещения.

Моногруппа $\mathcal{G}$ называется *бокштейновской*, если ее высшая группа $|\mathcal{G}|$ принадлежит системе Бокштейна.

ЛЕММА О ТЕСТИРОВАНИИ. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ являются полигруппами высот $\leq n$ и $\text{ALT } \mathcal{G} \neq \text{ALT } \mathcal{H}$. Тогда $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B} \neq \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{B}$ для некоторой бокштейновской моногруппы $\mathcal{B}$ высоты n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\text{alt } \mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{H}$. Тогда

$$\text{alt } \mathcal{G}\mathbb{Z}^{[n]} = \text{alt } \mathcal{G} + n > \text{alt } \mathcal{H} + n = \text{alt } \mathcal{H}\mathbb{Z}^{[n]}.$$

Поскольку $\mathbb{Z}$ изофакторна сумме $\bigoplus \mathbb{Z}_{(p)}$, постольку для некоторого p имеем $|\mathcal{G}| \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \neq 0$. Тогда

$$\text{alt } \mathcal{G}\mathbb{Z}_{(p)}^{[n]} = \text{alt } \mathcal{G} + n > \text{alt } \mathcal{H} + n \geq \text{alt } \mathcal{H}\mathbb{Z}_{(p)}^{[n]},$$

т.е. $\mathbb{Z}_{(p)}^{[n]}$ является искомой бокштейновской моногруппой. Аналогично разбирается случай $\text{alt } \mathcal{G} < \text{alt } \mathcal{H}$. Пусть теперь $\text{alt } \mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{H}$. Если $\text{ALT } \mathcal{G} \neq \text{ALT } \mathcal{H}$, то для некоторой полигруппы $\mathcal{F}$ будет $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{F} \neq \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{F}$ имеет высоту суммы моногрупп, постольку для одного из слагаемых этой суммы, которое мы обозначим $\mathcal{F}'$, также имеем неравенство $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{F}' \neq \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{F}'$. Но $|\mathcal{F}'|$ изофакторна сумме бокштейновских групп, поэтому моногруппа $\mathcal{F}'$ также изофакторна сумме бокштейновских моногрупп. Тогда для одной из этих бокштейновских моногрупп, обозначаемой $\mathcal{B}'$, также имеем неравенство $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B}' \neq \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{B}'$. Пусть $\mathcal{B}$ – моногруппа высоты n , смещенная относительно $\mathcal{B}'$. Если $\text{alt } \mathcal{B}' > n$, то выполнено равенство смещения, и мы получим, что $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B} \neq \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{B}$, что нам и требуется. Пусть теперь $\text{alt } \mathcal{B}' < n$, и предположим, что $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B}' > \text{alt } \mathcal{H}\mathcal{B}'$. Поскольку $\text{alt } \mathcal{H}\mathcal{B}' \geq \text{alt } \mathcal{H} + 1 = \text{alt } \mathcal{G} + 1$, постольку $\text{alt } \mathcal{G}\mathcal{B}' > \text{alt } \mathcal{G} + 1$, и равенство смещения для $\mathcal{G}$ дает $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{G} + \text{alt } \mathcal{B} - \text{alt } \mathcal{B}'$. А для $\mathcal{H}$ на основании неравенства смещения имеем $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{H} \leq \text{alt } \mathcal{B}'\mathcal{H} + \text{alt } \mathcal{B} - \text{alt } \mathcal{B}'$. Откуда $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} > \text{alt } \mathcal{B}\mathcal{H}$. Что и завершает доказательство.

Бокштейновские моногруппы одинаковой факторности, как нетрудно видеть, имеют сравнимые высотности, и справедлив следующий

КРИТЕРИЙ СРАВНЕНИЯ БОКШТЕЙНОВСКИХ МОНОГРУПП. Если $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ – две бокштейновские моногруппы одинаковой факторности и $\text{alt } \mathcal{B} > \text{alt } \mathcal{B}'$, то $\text{ALT } \mathcal{B} > \text{ALT } \mathcal{B}'$; если же $\text{alt } \mathcal{B} = \text{alt } \mathcal{B}'$, то неравенство $\text{ALT } \mathcal{B} \geq \text{ALT } \mathcal{B}'$ равносильно факторному доминированию $|\mathcal{B}| \gg |\mathcal{B}'|$.

Факторы Бокштейна

Для p – простого или нуля, определим *полигрупповой p -фактор Бокштейна* полигруппы $\mathcal{G} = \{G_n\}$ как полигруппу $\Sigma_p \mathcal{G}$, n -й член которой при $n > 1$ совпадает с $\sigma_p G_n$ а начальные члены равны $\mathbb{Z}$. Разложение Бокштейна для групп влечет за собой разложение для полигрупп

$$\mathcal{G} \approx \bigoplus_{p \in \mathbb{P}_0} \Sigma_p \mathcal{G}.$$

Очевидно также следующее свойство аддитивности полигруппового фактора Бокштейна:

$$\Sigma_p(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) \approx \Sigma_p \mathcal{G} \oplus \Sigma_p \mathcal{H}.$$

Определим теперь *моногрупповой p -фактор Бокштейна* $\sigma_p \mathcal{G}$ полигруппы $\mathcal{G}$ как высшую моногруппу $\sigma_p \mathcal{G} = \lceil \Sigma_p \mathcal{G} \rceil$.

Полигруппу $\mathcal{G}$ назовем *гомофакторной* факторности p , если $\mathcal{G} \approx \Sigma_p \mathcal{G}$ для некоторого p . Очевидно, что сумма и произведение гомофакторных полигрупп одинаковой факторности также гомофакторно. Из критерия сравнения бокштейновских моногрупп немедленно вытекает следующий

ГОМОФАКТОРНЫЙ КРИТЕРИЙ СРАВНЕНИЯ. *Если $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ – гомофакторные полигруппы одинаковой факторности, то $\text{ALT } \mathcal{G} \geq \text{ALT } \mathcal{H}$, если и только если $\text{ALT } \lceil \mathcal{G} \rceil \geq \text{ALT } \lceil \mathcal{H} \rceil$.*

Из этого критерия мы, в частности, получаем, что $\text{ALT } \sigma_p \mathcal{G} = \text{ALT } \Sigma_p \mathcal{G}$ для любой полигруппы $\mathcal{G}$, откуда немедленно следует такой факт.

МОНОГРУППОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ БОКШТЕЙНА. $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G}$.

Из критерия равновысотности для моногрупп и гомофакторного критерия сравнения получаем такое следствие.

ГОМОФАКТОРНЫЙ КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ. *Для гомофакторных полигрупп $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ равенство $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$ равносильно совпадению факторов $\sigma_p \mathcal{G} = \sigma_p \mathcal{H}$.*

Из отмеченной выше сравнимости высотных типов бокштейновских моногрупп и гомофакторного критерия сравнения получаем, что гомофакторные полигруппы одинаковой факторности также имеют сравнимые высотности, откуда получаем такое

ПРАВИЛО ДОМИНИРОВАНИЯ. *Для гомофакторных полигрупп $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ факторности p бокштейновский p -фактор суммы $\sigma_p(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H})$ совпадает с p -фактором слагаемого большей высотности.*

Для любых полигрупп из приведенных выше результатов вытекает такое свойство аддитивности p -факторов. Вкупе с приведенным выше правилом доминирования оно позволяет эффективно определять факторы суммы полигрупп.

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ФАКТОРОВ. *Для любых полигрупп $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ выполнено равенство $\sigma_p(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) = \sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \oplus \sigma_p \mathcal{H})$.*

Полигрупповой p -фактор бокштейновской полигруппы факторности q , как легко понять, тривиален, если $q \neq p > 0$. В случае же $p = 0$ это, вообще говоря, не так. В этом случае имеется лишь такое соотношение:

РАЦИОНАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО. $\text{alt } \sigma_0(\sigma_p \mathcal{G}) \leq \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что группа G_n при любом n факторно доминирует $\sigma_p G_n$, поэтому тривиальность $\mathbb{Q} \otimes G_n$ влечет тривиальность $\mathbb{Q} \otimes \sigma_p G_n$, а высота $\text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$ – это наибольшее n , для которого нетривиально $\mathbb{Q} \otimes G_n$.

Итак, высотность полигруппы определяется ее моногрупповыми факторами. Обратное верно для *надрациональных* факторов, каковыми мы называем p -факторы, для

которых $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} \geq \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$, и, вообще говоря, неверно для метарациональных факторов, каковыми мы называем p -факторы, для которых $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} < \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$. Естественное предположение, что равновысотность полигрупп в свою очередь влечет совпадение моногрупповых факторов Бокштейна, опровергается следующим примером.

Метарациональная альтернатива. Для любого $k \geq 0$ справедливо равенство $\text{ALT}(\mathbb{Q}^{[n]} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{[n-k-1]}) = \text{ALT}(\mathbb{Q}^{[n]} \oplus \mathbb{Q}_p^{[n-k]})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для непериодических групп G нетривиально произведение $G \otimes \mathbb{Q}$, и потому высота произведения моногруппы $G^{[m]}$ на любую из рассматриваемых будет равна $n + m$. Если же $G = \text{Tor } G$, то $(G, \mathbb{Z}_{(p)}) = (G, \mathbb{Q}_p) + 1$, откуда следует, что $\text{alt}(G^{[m]} \mathbb{Z}_{(p)}^{[k]}) = \text{alt}(G^{[m]} \mathbb{Q}_p^{[k]}) + 1$. И высоты произведений обеих рассматриваемых групп на $G^{[m]}$ равны в этом случае $m + n + k - 1$.

Унифицированные факторы. Определим унифицированный моногрупповой p -фактор $\sigma_p^+ \mathcal{G}$ как $\sigma_p \mathcal{G}$ в случае, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} \geq \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$, и как $\mathbb{Q}_p^{[\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} + 1]}$ в противном случае. В частности, всегда верно $\sigma_0^+ \mathcal{G} = \sigma_0 \mathcal{G}$. Отметим такое свойство унифицированного фактора, непосредственно вытекающее из его определения.

УНИРАЦИОНАЛЬНОСТЬ. Если $|\sigma_p^+ \mathcal{G}| = \mathbb{Z}_{(p)}$, то $\text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$.

Из леммы о метарациональной альтернативе следует, что $\text{ALT}(\sigma_p^+ \mathcal{G} \oplus \sigma_0 \mathcal{G}) = \text{ALT}(\sigma_p \mathcal{G} \oplus \sigma_0 \mathcal{G})$. Поэтому

$$\text{ALT} \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G} = \text{ALT} \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p^+ \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{G}.$$

Для доказательства инвариантности унифицированных факторов нам потребуется следующая таблица умножения на бокштейновские моногруппы.

ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ. Для любой полигруппы $\mathcal{G}$ высоты $\leq n$ справедливы следующие формулы:

- (1) $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Q}^{[n]} = \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G} + n$;
- (2) $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Q}_p^{[n]} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G} + n + (\mathbb{Q}_p, |\sigma_p \mathcal{G}|) - 3$;
- (3) $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Z}_p^{[n]} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G} + n + (\mathbb{Z}_p, |\sigma_p \mathcal{G}|) - 3$;
- (4) $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Z}_{(p)}^{[n]} = \max\{\text{alt } \sigma_0 \mathcal{G} + n, \text{alt } \sigma_p \mathcal{G} + n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу изофакторности группы сумме своих бокштейновских факторов можно считать, что $\mathcal{G} = \bigoplus \Sigma_p \mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{B}$ равна либо $\mathbb{Q}_p^{[n]}$, либо $\mathbb{Z}_p^{[n]}$. Тогда $\mathcal{B}$ взаимно проста с $\Sigma_q \mathcal{G}$ при $q \neq p$, и потому $\text{alt } \mathcal{B} \mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{B} \Sigma_p \mathcal{G}$. Последнее же совпадает с $n + (\mathcal{B}, |\sigma_p \mathcal{G}|) - 3$, что и доказывает наше утверждение во втором и третьем случаях.

Моногруппа $\mathbb{Z}_{(p)}^{[n]}$ не взаимно проста с $\Sigma_0 \mathcal{G}$ и $\Sigma_p \mathcal{G}$, если только последние не тривиальны, и в этом случае $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes |\sigma_p \mathcal{G}| \neq 0$, так же как $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes |\sigma_0 \mathcal{G}| \neq 0$. Откуда вытекает четвертый случай.

Первый оставляем читателю.

ИНВАРИАНТНОСТЬ УНИФИЦИРОВАННЫХ ФАКТОРОВ. Если $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$, то $\sigma_p^+ \mathcal{G} = \sigma_p^+ \mathcal{H}$ для любого простого $p \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{alt } \mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{H} = n$. Если $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$, то умножая на $\mathbb{Q}^{[n]}$ полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, получаем полигруппы одинаковых высот, откуда $\text{alt } \sigma_0 \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_0 \mathcal{H}$ в силу первой формулы умножения.

Если $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} \leq \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$, то знание высот произведений полигруппы $\mathcal{G}$ на бокштейновские моногруппы $\mathbb{Q}_p^{[n]}, \mathbb{Z}_p^{[n]}, \mathbb{Z}_{(p)}^{[n]}$ позволяет определить, основываясь на четвертой формуле умножения, высоту $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G}$, зная которую можно определить индексы кофакторности группы $|\sigma_p \mathcal{G}|$ с группами $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$, что позволяет определить саму группу $|\sigma_p \mathcal{G}|$. То же самое относится и к $\mathcal{H}$, а поскольку высоты произведений полигруппы $\mathcal{H}$ с бокштейновскими моногруппами такие же самые, то и результаты для $\mathcal{H}$ получатся те же. То есть $\text{alt } \sigma_p \mathcal{H} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G}$ и $|\sigma_p \mathcal{H}| = |\sigma_p \mathcal{G}|$. А поскольку в этом случае унифицированный фактор совпадает с обычным, те же результаты справедливы и для унифицированного фактора.

Рассмотрим теперь метарациональный случай, когда $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} > \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$. Если $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Q}_p^{[n]} \neq \text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Z}_p^{[n]}$, то и $\text{alt } \mathcal{H} \mathbb{Q}_p^{[n]} \neq \text{alt } \mathcal{H} \mathbb{Z}_p^{[n]}$, в этом случае $\sigma_p \mathcal{G} = \sigma_p \mathcal{H} = \mathbb{Z}_p$, и в силу третьей формулы умножения мы сможем получить, что $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{H} = \text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{H} = \text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Z}_p^{[n]} - n$.

Наконец, если $\text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Q}_p^{[n]} = \text{alt } \mathcal{G} \mathbb{Z}_p^{[n]} = \text{alt } \mathcal{H} \mathbb{Q}_p^{[n]} = \text{alt } \mathcal{H} \mathbb{Z}_p^{[n]}$ и $|\sigma_p \mathcal{G}| = |\sigma_p \mathcal{H}|$, то совпадение высот $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{H}$ следует из формул умножения, и отсюда в свою очередь вытекает совпадение унифицированных факторов $|\sigma_p^+ \mathcal{G}| = |\sigma_p^+ \mathcal{H}|$. Если же $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq |\sigma_p \mathcal{H}|$, то один из них, допустим, первый, совпадает с $\mathbb{Z}_{(p)}$, а второй в таком случае совпадает с $\mathbb{Q}_p$. Формулы умножения позволяют в этом случае получить, что $\text{alt } \sigma_p \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{H} - 1$. Но тогда как раз получится, что $\text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{H} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G}$. А поскольку в этом случае $\sigma_p^+ \mathcal{G} = \sigma_p \mathcal{G}$, постольку получаем оба требуемых равенства $|\sigma_p^+ \mathcal{G}| = |\sigma_p^+ \mathcal{H}|$ и $\text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p^+ \mathcal{H}$.

Из только что доказанной инвариантности унифицированных факторов и отмеченной изотипности полигруппы сумме своих унифицированных факторов Бокштейна вытекает такое следствие.

ФАКТОРНЫЙ КРИТЕРИЙ СРАВНЕНИЯ. Неравенство $\text{ALT } \mathcal{G} \geq \text{ALT } \mathcal{H}$ равносильно системе неравенств $\text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{H}$, $p \geq 0$. Равенство $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$ равносильно совпадению всех унифицированных p -факторов $\sigma_p^+ \mathcal{G} = \sigma_p^+ \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь то, что неравенство типов $\text{ALT } \mathcal{G} \geq \text{ALT } \mathcal{H}$ влечет неравенство типов факторов $\text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{H}$. Поскольку в этом случае $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } (\mathcal{G} \oplus \mathcal{H})$, постольку $\sigma_p \mathcal{G} = \sigma_p (\sigma_p \mathcal{G} \oplus \sigma_p \mathcal{H})$, что значит $\text{ALT } \sigma_p \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_p \mathcal{H}$ в силу формулы сложения факторов.

Если $\text{ALT } \sigma_p \mathcal{G} > \text{ALT } \sigma_p \mathcal{H}$, то $\text{ALT } \sigma_p \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{H}$ и, тем более, $\text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{H}$. Если же $\sigma_p \mathcal{G} = \sigma_p \mathcal{H}$, то ввиду неравенства $\text{ALT } \sigma_0 \mathcal{G} \geq \text{ALT } \sigma_0 \mathcal{H}$ метарациональность $\sigma_p \mathcal{H}$ влечет метарациональность $\sigma_p \mathcal{G}$, и потому $\sigma_p^+ \mathcal{G} = \sigma_p^+ \mathcal{H}$. Что и требовалось доказать.

Следующие два предложения, по существу, являются формой Второй Теоремы Бокштейна – теоремы о размерностях произведения.

Мультипликативность факторов Бокштейна. Для любых полигрупп $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и любого простого $p \geq 0$ выполнено равенство $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = \sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H})$.

ФОРМУЛА ФАКТОРА ПРОИЗВЕДЕНИЯ. Пусть $n = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G} + \text{alt } \sigma_p \mathcal{H}$, тогда если $|\sigma_p \mathcal{G}| \otimes |\sigma_p \mathcal{H}| \neq 0$, то $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = (|\sigma_p \mathcal{G}| \otimes |\sigma_p \mathcal{H}|)^{[n]}$, иначе $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = (|\sigma_p \mathcal{G}| * |\sigma_p \mathcal{H}|)^{[n-1]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала формулу $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = \sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H})$. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $\mathcal{G} = \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G}$ и $\mathcal{H} = \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{H}$. Ввиду взаимной простоты полигрупп $\sigma_p \mathcal{G}$ и $\sigma_q \mathcal{H}$ при различных $p, q > 0$ имеем

$$\text{ALT } \mathcal{G} \mathcal{H} = \text{ALT} \left(\bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_0 \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{p > 0} \sigma_p \mathcal{G} \sigma_0 \mathcal{H} \right).$$

Но второе и третье слагаемые имеют все нетривиальные члены, равные $\mathbb{Q}$, поэтому они не влияют на p -факторы правой части при $p > 0$. На рациональный фактор правой части они также не влияют, потому что имеют высоты меньше, чем $\text{alt } \sigma_0 \mathcal{G} \sigma_0 \mathcal{H}$, что нетрудно получить из рационального неравенства. Поэтому второе и третье слагаемые в сумме справа могут быть опущены. В результате получаем равенство

$$\text{ALT } \mathcal{G} \mathcal{H} = \text{ALT} \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H}.$$

У суммы справа p -фактор, очевидно, равен $\sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H})$. Ввиду инвариантности факторов таким же является p -фактор произведения $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H}$, что и доказывает мультипликативность p -факторов.

В помощь читателю при доказательстве формулы для фактора произведения в случае, когда $|\sigma_p \mathcal{G}| \otimes |\sigma_p \mathcal{H}| \neq 0$, отметим лишь, что тензорное произведение бокштейновских групп всегда само является бокштейновской группой.

Существуют лишь два варианта, при которых возникает второй случай. Первый – когда обе высшие группы сомножителей совпадают с $\mathbb{Q}_p$, и второй, когда одна из них $\mathbb{Q}_p$, а вторая – $\mathbb{Z}_p$. Высшая группа произведения во втором случае является суммой трех слагаемых. В первом варианте эти слагаемые таковы: $\mathbb{Q}_p * \mathbb{Q}_p (= \mathbb{Q}_p)$, $G \otimes \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p \otimes G$ (где G – какая-то группа). Последние два либо тривиальны либо факторно эквивалентны $\mathbb{Q}_p$, поэтому их сумма изофакторна $\mathbb{Q}_p$, что и доказывает нужную формулу в первом варианте второго случая. Во втором варианте слагаемые таковы: $\mathbb{Q}_p * \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p \otimes C$, $C \otimes \mathbb{Z}_p$. Второе и третье слагаемые имеют факторную силу, не превосходящую $\mathbb{Z}_p$, поэтому их сумма изофакторна $\mathbb{Z}_p$. Что и доказывает формулу во втором варианте.

Коэффициентная высота

Пусть C какая-то группа, а $\mathcal{G}$ – верхняя полигруппа. Определим высоту $\text{alt}_C \mathcal{G}$ полигруппы $\mathcal{G}$ относительно группы коэффициентов C как $\text{alt}_C \mathcal{G} = \mathcal{G} \times C^{(0)}$. Высоту $\text{alt}_C \mathcal{G}$ мы будем называть также C -коэффициентной высотой или, еще короче, C -высотой полигруппы $\mathcal{G}$.

Простые вычисления дают следующий результат.

ФОРМУЛА КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ВЫСОТЫ. $\text{alt}_C \mathcal{G} = \text{alt } \mathcal{G}C^{[n]} - n$ для $n \geq \text{alt } \mathcal{G}$.

Следующее свойство *аддитивности* коэффициентных высот непосредственно вытекает из определения.

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ АДДИТИВНОСТЬ. Если $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$, то $\text{alt}_C \mathcal{G} = \max_i \text{alt}_{C_i} \mathcal{G}$.

Следующее предложение вскрывает связь факторной классификации групп с коэффициентной теорией Бокштейна.

КРИТЕРИЙ РАВНОСИЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ. Для любых двух групп C и D следующие два условия эквивалентны:

- (1) $C \approx D$;
- (2) $\text{alt}_C \mathcal{G} = \text{alt}_D \mathcal{G}$ для любой верхней полигруппы $\mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C \approx D$, то согласно критерию равновысотности моногрупп имеем $\text{ALT } C^{[n]} = \text{ALT } D^{[n]}$ для любого n , откуда $\text{alt } \mathcal{G}C^{[n]} - n = \text{alt } \mathcal{G}D^{[n]} - n$, что при $n > \text{alt } \mathcal{G}$ дает $\text{alt}_C \mathcal{G} = \text{alt}_D \mathcal{G}$.

Если C не изофакторна D , то $\text{ALT } C^{[2]} \neq \text{ALT } D^{[2]}$ согласно критерию равновысотности для моногрупп. Тогда, в силу леммы о тестировании, найдется бокштейновская моногруппа $\mathcal{B}$ высоты 2, для которой $\text{alt } \mathcal{B}C^{[2]} \neq \text{alt } \mathcal{B}D^{[2]}$, и в силу формулы коэффициентной высоты получаем, что $\text{alt}_C \mathcal{B} \neq \text{alt}_D \mathcal{B}$, что и требовалось доказать.

Из доказанного критерия и коэффициентной монотонности получаем такое следствие, являющееся полигрупповой формой Первой Теоремы Бокштейна:

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ БОКШТЕЙНА. Для любой группы C и полигруппы $\mathcal{G}$ высота $\text{alt}_C \mathcal{G}$ равна максимуму высот $\text{alt}_{\sigma_P C} \mathcal{G}$.

Этот результат вкупе с критерием сравнения для бокштейновских моногрупп дает следующий результат:

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ МОНОТОННОСТЬ. Если группа C факторно доминирует группу C' , то $\text{alt}_C \mathcal{G} \geq \text{alt}_{C'} \mathcal{G}$ для любой полигруппы $\mathcal{G}$.

Если $\text{ALT } \mathcal{G} \neq \text{ALT } \mathcal{H}$, то, как мы знаем из леммы о тестировании, найдется бокштейновская моногруппа $\mathcal{B}$ высоты, равной максимуму из высот $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, для которой $\text{alt } \mathcal{B}\mathcal{G} \neq \text{alt } \mathcal{B}\mathcal{H}$. Но из формулы смещения вытекает, что при смещении вверх это неравенство сохранится, и потому получаем такой результат:

КОЭФФИЦИЕНТНЫЙ КРИТЕРИЙ РАВНОВЫСОТНОСТИ. Равенство $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{H}$ равносильно совпадению высот полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ относительно любой группы коэффициентов.

Формулы умножения позволяют выразить коэффициентную высоту полигруппы относительно групп системы Бокштейна, а значит, и любых групп, через ее моногрупповые факторы Бокштейна. А именно, справедливы следующие формулы.

ФОРМУЛЫ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ВЫСОТ.

- (1) $\text{alt}_{\mathbb{Q}} \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_0 \mathcal{G}$;
- (2) $\text{alt}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G} - 1$, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Z}_{(p)}$, иначе $\text{alt}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G} = \text{alt } \sigma_p \mathcal{G}$;

- (3) $\text{alt}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G} = \text{alt}_{\sigma_p} \mathcal{G}$, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Q}_p$, иначе $\text{alt}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G} = \text{alt}_{\sigma_p} \mathcal{G} - 1$;
 (4) $\text{alt}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{G} = \max\{\text{alt}_{\sigma_0} \mathcal{G}, \text{alt}_{\sigma_p} \mathcal{G}\}$.

Коэффициентная высота относительно группы $\mathbb{Z}_p$ имеет особое значение, и мы будем ее обозначать через alt_p и называть высотой по модулю p или p -высотой. Обозначение alt_0 мы используем для рациональной высоты $\text{alt}_{\mathbb{Q}}$. Эти высоты обладают важным свойством.

p -ЛОГАРИФМИЧНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ. Для любых полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ и любого простого $p \geq 0$ верно равенство $\text{alt}_p \mathcal{G}\mathcal{H} = \text{alt}_p \mathcal{G} + \text{alt}_p \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p = 0$ результат непосредственно вытекает из мультипликативности нулевого фактора Бокштейна. Если $p > 0$, то доказательство получается перебором всех вариантов для типов высших групп p -факторов множителей с помощью формулы для фактора произведения.

Неравенства Бокштейна для полигрупп. Формулы коэффициентных высот позволяют определить коэффициентные высоты полигруппы относительно бокштейновских групп и проверить выполнение *неравенств Бокштейна*. Другой способ получения этих неравенств – вывод их из групповых неравенств Бокштейна, которые были рассмотрены в конце параграфа о тензорной классификации абелевых групп. Так, очевидно, что неравенство факторных сил групп $B \ll C$ влечет неравенства $\text{alt}_B \mathcal{G} \leq \text{alt}_C \mathcal{G}$ для любой полигруппы $\mathcal{G}$, что для любой полигруппы $\mathcal{G}$ дает неравенства

$$\text{alt}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G} \leq \text{alt}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G} \leq \text{alt}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{G} \geq \text{alt}_{\mathbb{Q}} \mathcal{G} \geq \text{alt}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G}.$$

Остальные два неравенства Бокштейна –

$$\begin{aligned} \text{alt}_{\mathbb{Q}_p} X &\leq \max\{\text{alt}_{\mathbb{Q}} X, \text{alt}_{\mathbb{Z}_{(p)}} X - 1\}, \\ \text{alt}_{\mathbb{Z}_{(p)}} X &\leq \max\{\text{alt}_{\mathbb{Q}} X, \text{alt}_{\mathbb{Q}_p} X + 1\}. \end{aligned}$$

Эти неравенства вытекают из групповых неравенств Бокштейна благодаря следующему замечанию, доказательство которого мы оставляем читателю.

ЛЕММА О ФУНКЦИЯХ КОФАКТОРНОСТИ. Если группы C и D таковы, что для их функций кофакторности выполнено одно из неравенств $D_C \leq D_B + 1$ или $D_C \leq D_B - 1$, то аналогичные неравенства выполнены для относительных высот: $\text{alt}_C \leq \text{alt}_B + 1$ и $\text{alt}_C \leq \text{alt}_B - 1$.

Заметим, что именно ради справедливости этого утверждения индекс кофакторности определен как $\max\{3 \text{triv}(G \otimes H), 2 \text{triv}(G * H)\}$, а не как $\max\{2 \text{triv}(G \otimes H), \text{triv}(G * H)\}$.

Нижняя алгебра Кюннета

Полигруппу $\mathcal{G}$ мы называем *нижней*, если $G_0 = 0$. *Нижние* полигруппы отличаются от верхних начальным условием и отсутствием требования конечности высоты. Полигрупп, нижних и верхних одновременно, не существует. В этом разделе полигруппы по умолчанию нижние.

Сумма нижних полигрупп определяется почленно так же, как и для верхних. Произведение их определяется так:

$$\mathcal{G} \langle \times \rangle \mathcal{H} = \left\{ \bigoplus_{i+j=n} (G_i \otimes H_j) \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} (G_i * H_j) \right\}_{n \geq 0},$$

и называется *нижним произведением Кюннета* полигрупп. Мы, однако, как и в случае верхних полигрупп, будем обычно опускать знак произведения.

Глубиной нижней полигруппы $\mathcal{G}$ называется размерность наименьшего нетривиального члена этой полигруппы; обозначение: $\text{dep } \mathcal{G}$. Таким образом, $\text{dep } \mathcal{G} > 0$ для любой нижней полигруппы, а равенство $\text{dep } \mathcal{G} = \infty$ характеризует нулевую полигруппу, т.е. полигруппу, все члены которой тривиальны. Для нижнего произведения и суммы очевидны следующие соотношения:

$$\text{dep } \mathcal{G} \mathcal{H} \geq \text{dep } \mathcal{G} + \text{dep } \mathcal{H}, \quad \text{dep}(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) = \min\{\text{dep } \mathcal{G}, \text{dep } \mathcal{H}\}.$$

Нижние полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называются *взаимно простыми*, если $\text{dep } \mathcal{G} \mathcal{H} = \infty$, что означает взаимную простоту всех их членов.

Очевидно, что сумма и нижнее произведение нижних полигрупп является нижней полигруппой. Подобно тому как верхнее произведение определяет высотность для верхних полигрупп, нижнее произведение определяет *глубинный тип*, или *глубинность*, для нижних полигрупп.

Теория глубинных типов строится аналогично теории высотных типов. Через $\mathfrak{K}_*$ обозначается *нижняя алгебра Кюннета* – решетка глубинных типов с операциями сложения и умножения. Нулевая полигруппа является наибольшим элементом этой алгебры, а наименьшим является тип, представленный полигруппой $\mathbb{Z}^{(1)}$.

Для нижней полигруппы $\mathcal{G}$ через $|\mathcal{G}|$ обозначается ее низшая (т.е. наименьшей размерности) нетривиальная группа, а через $[\mathcal{G}]$ – низшая моногруппа, определяемая как $|G|^{(\text{dep } G)}$.

Для тривиальной полигруппы $\mathcal{G}$ считаем $|\mathcal{G}| = 0$. Нижняя полигруппа называется *моногруппой*, если у нее есть только одна нетривиальная группа. Для группы G полигруппа $G^{(n)}$ является нижней моногруппой глубины n , для которой $|G^{(n)}| = G$.

Следующие результаты для нижних полигрупп доказываются аналогично соответствующим результатам для верхних.

КРИТЕРИЙ РАВНОГЛУБИННОСТИ МОНОГРУПП. Для нижних моногрупп равенство $\text{DER } \mathcal{G} = \text{DER } \mathcal{H}$ равносильно равенству $|\mathcal{G}| \approx |\mathcal{H}|$.

ИЗОФАКТОРНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ГЛУБИННОСТИ. $\mathcal{G} \approx \mathcal{H}$ влечет $\text{DER } \mathcal{G} = \text{DER } \mathcal{H}$ для любых нижних полигрупп.

НИЖНЯЯ ФОРМУЛА СМЕЩЕНИЯ. Если $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ – моногруппы и $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$, то

$$\text{dep } \mathcal{B}' \mathcal{G} = \text{dep } \mathcal{B} \mathcal{G} + \text{dep } \mathcal{B}' - \text{dep } \mathcal{B}.$$

Нижняя формула смещения проще верхней. Это приводит к упрощению доказательства леммы о тестировании. Результат же остается без изменений. Бокштейновский полигрупповой фактор $\Sigma_p \mathcal{G}$ для нижней полигруппы $\mathcal{G}$ определяется так же,

как для верхней. Бокштейновский моногрупповой фактор $\sigma_p \mathcal{G}$ для нижней полигруппы определяется как $[\Sigma_p \mathcal{G}]$. Для нижних полигрупп, в отличие от верхних, p -фактор Бокштейна может оказаться тривиальным.

При этом формулы умножения на нижние бокштейновские моногруппы останутся такими же, как и для верхних, за исключением четвертой, где максимум заменится на минимум. Доказательства при этом не меняются.

НИЖНИЕ ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ. Для любой нижней полигруппы $\mathcal{G}$ справедливы следующие формулы:

- (1) $\text{der } \mathcal{G} \mathbb{Q}^{(n)} = \text{der } \sigma_0 \mathcal{G} + n$;
- (2) $\text{der } \mathcal{G} \mathbb{Q}_p^{(n)} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + n + (\mathbb{Q}_p, |\sigma_p \mathcal{G}|) - 3$;
- (3) $\text{der } \mathcal{G} \mathbb{Z}_p^{(n)} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + n + (\mathbb{Z}_p, |\sigma_p \mathcal{G}|) - 3$;
- (4) $\text{der } \mathcal{G} \mathbb{Z}_{(p)}^{(n)} = \min\{\text{der } \sigma_0 \mathcal{G} + n, \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + n\}$.

МЕТАРАЦИОНАЛЬНАЯ АЛЬТЕРНАТИВА. Для любого $k \geq 0$ справедливо равенство $\text{DER}(\mathbb{Q}^{(n)} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{[n+k+1]}) = \text{DER}(\mathbb{Q}^{(n)} \oplus \mathbb{Q}_p^{(n+k)})$.

Из-за метарациональной альтернативы бокштейновские факторы не являются инвариантами глубинного типа и их также приходится унифицировать.

Нижний унифицированный моногрупповой p -фактор $\sigma_p^- \mathcal{G}$ определяется как $\sigma_p \mathcal{G}$ в случае, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\text{der } \sigma_p \mathcal{G} \leq \text{der } \sigma_0 \mathcal{G}$, и как $\mathbb{Q}_p^{(\text{der } \sigma_p \mathcal{G} - 1)}$ в противном случае. Нижние унифицированные факторы Бокштейна оказываются полной системой инвариантов глубинного типа.

Разложение Бокштейна в нижней алгебре выглядит так же, как в верхней:

$$\text{DER} \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p \mathcal{G} = \text{DER} \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p^- \mathcal{G} = \text{DER } \mathcal{G}.$$

Факторы Бокштейна для нижних полигрупп, как и для верхних имеют свойства аддитивности и мультипликативности:

$$\sigma_p(\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) = \sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \oplus \sigma_p \mathcal{H}), \quad \sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = \sigma_p(\sigma_p \mathcal{G} \sigma_p \mathcal{H}).$$

ФОРМУЛА ФАКТОРА ПРОИЗВЕДЕНИЯ. Пусть $n = \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + \text{der } \sigma_p \mathcal{H}$, тогда если $|\sigma_p \mathcal{G}| \otimes |\sigma_p \mathcal{H}| \neq 0$, то $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = (|\sigma_p \mathcal{G}| \otimes |\sigma_p \mathcal{H}|)^{(n)}$, иначе $\sigma_p \mathcal{G} \mathcal{H} = (|\sigma_p \mathcal{G}| * |\sigma_p \mathcal{H}|)^{(n+1)}$.

Глубина полигруппы $\mathcal{G}$ относительно группы коэффициентов C определяется как $\text{der}_C \mathcal{G} = \mathcal{G} \langle \times \rangle C^{(0)}$. И, очевидно, $\text{der}_C = \{\text{der } \mathcal{G} C^{(n)} - n\}$ для любого n . Коэффициентная аддитивность, монотонность, коэффициентный критерий равноглубинности, критерий равносильности коэффициентов и теорема о базисности системы Бокштейна для нижних полигрупп формулируются и доказываются так же, как для верхних.

ФОРМУЛЫ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ГЛУБИН.

- (1) $\text{der}_{\mathbb{Q}} \mathcal{G} = \text{der } \sigma_0 \mathcal{G}$;
- (2) $\text{der}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + 1$, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Z}_{(p)}$, иначе $\text{der}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G}$;
- (3) $\text{der}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G}$, если $|\sigma_p \mathcal{G}| \neq \mathbb{Q}_p$, иначе $\text{der}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G} = \text{der } \sigma_p \mathcal{G} + 1$;
- (4) $\text{der}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{G} = \min\{\text{der } \sigma_0 \mathcal{G}, \text{der } \sigma_p \mathcal{G}\}$.

Коэффициентная глубина относительно $\mathbb{Z}_p$ называется p -глубиной или глубиной по модулю p и обозначается dep_p . Через dep_0 обозначается *рациональная глубина*. И так же, как в верхнем случае, доказывается для любого простого $p \geq 0$ логарифмический закон

$$\text{dep}_p \mathcal{G} \mathcal{H} = \text{dep}_p \mathcal{G} + \text{dep}_p \mathcal{H}.$$

Отношение совместимости

Будем говорить, что пара $\mathcal{G}, \mathcal{H}$, состоящая из верхней полигруппы $\mathcal{G}$ и нижней полигруппы $\mathcal{H}$, *совместима*, и писать $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$, если $G_n \otimes H_m = 0$ при $n > m$ и $G_n * H_m = 0$ при $n > m + 1$. Как нетрудно видеть, условие совместимости можно выразить эквивалентным образом следующими двумя способами

ВЫСОТНЫЙ КРИТЕРИЙ СОВМЕСТИМОСТИ. *Следующие три условия равносильны для пары $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ из верхней и нижней полигрупп:*

- (1) $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$;
- (2) $\text{alt } \mathcal{G} H_n^{[n+1]} \leq 2n + 1$ для любого $n > 0$;
- (3) $\text{alt}_{H_n} \mathcal{G} \leq n$ для любого $n > 0$.

ГЛУБИННЫЙ КРИТЕРИЙ СОВМЕСТИМОСТИ. *Следующие три условия равносильны для пары $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ из верхней и нижней полигрупп:*

- (1) $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$;
- (2) $\text{dep } G_n^{(n-1)} \mathcal{H} \geq 2n - 1$ для любого $n > 0$;
- (3) $\text{dep}_{G_n} \mathcal{H} \geq n$ для любого $n > 0$.

Из высотного критерия вытекает, что при замене $\mathcal{G}$ на равновысотную полигруппу $\mathcal{G}'$ условие совместимости сохраняется. Из глубинного критерия вытекает, что при замене полигруппы $\mathcal{H}$ на равноглубинную условие совместимости также сохраняется. Таким образом, получаем следующее утверждение.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СОВМЕСТИМОСТИ. *Если $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \mathcal{G}'$, $\text{DEP } \mathcal{H} = \text{DEP } \mathcal{H}'$ и $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$, то $\mathcal{G}' \tau \mathcal{H}'$.*

Таким образом, отношение совместимости является, по существу, отношением между высотными и глубинными типами полигрупп.

Если $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$ и $\text{ALT } \mathcal{G}' \leq \text{ALT } \mathcal{G}$, то для любого n имеем неравенства $\text{alt } \mathcal{G} H_n^{[n]} \leq n$ и $\text{alt } \mathcal{G}' H_n^{[n]} \leq \text{alt } \mathcal{G} H_n^{[n]}$, откуда $\text{alt } \mathcal{G}' H_n^{[n]} \leq n$, и, следовательно, $\mathcal{G}' \tau \mathcal{H}$. Аналогично доказывается, что отношение совместимости сохраняется при увеличении типа $\mathcal{H}$. Таким образом, справедливо следующее предложение.

МОНОТОННОСТЬ СОВМЕСТИМОСТИ. *Если $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$ и $\text{ALT } \mathcal{G}' \leq \text{ALT } \mathcal{G}$, а $\text{DEP } \mathcal{H}' \geq \text{DEP } \mathcal{H}$, то $\mathcal{G}' \tau \mathcal{H}'$.*

Отметим такие свойства аддитивности отношения совместимости:

НИЖНЯЯ АДДИТИВНОСТЬ. *Пусть $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}_i$ для любой нижней полигруппы из некоторого индексированного $i \in I$ семейства, тогда $\mathcal{G} \tau \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$.*

ВЕРХНЯЯ АДДИТИВНОСТЬ. Пусть $\mathcal{G}_i \tau \mathcal{H}$ для любой верхней полигруппы из некоторого индексированного $i \in I$ семейства, тогда $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i \tau \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством верхней аддитивности. Воспользуемся высотным критерием совместимости. При любом $i \in I$ и любом натуральном n имеем $\text{alt } \mathcal{G}_i H_n^{[n]} \leq n$. А поскольку $\text{alt } \bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i H_n^{[n]} = \max \text{alt } \mathcal{G}_i H_n^{[n]}$, постольку $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i H_n^{[n]} \leq n$, и согласно тому же критерию получаем $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i \tau \mathcal{H}$.

ФАКТОРНЫЙ КРИТЕРИЙ СОВМЕСТИМОСТИ. Полигруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ совместимы $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$, если и только если при любом простом $p \geq 0$ совместимы их унифицированные факторы Бокштейна $\sigma_p^+ \mathcal{G} \tau \sigma_p^- \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$, то неравенства $\text{ALT } \sigma_p^+ \mathcal{G} \leq \text{ALT } \mathcal{G}$ и $\text{DEP } \mathcal{H} \leq \text{DEP } \sigma_p^- \mathcal{H}$ влекут за собой отношение $\sigma_p^+ \mathcal{G} \tau \sigma_p^- \mathcal{H}$ в силу монотонности отношения совместимости. Доказательство обратного утверждения, ввиду разложений $\text{ALT } \mathcal{G} = \text{ALT } \bigoplus_p \sigma_p^+ \mathcal{G}$ и $\text{DEP } \mathcal{H} = \text{DEP } \bigoplus_p \sigma_p^- \mathcal{H}$, сводится благодаря свойствам верхней и нижней аддитивности отношения совместимости к проверке выполнения соотношений $\sigma_p^+ \mathcal{G} \tau \sigma_q^- \mathcal{H}$ при всевозможных парах p, q . При этом нам известно, что при $p = q$ соотношения выполняются. Но при $p \neq q$ любой p -фактор взаимно прост с q -фактором, поэтому отношение $\sigma_p^+ \mathcal{G} \tau \sigma_q^- \mathcal{H}$ выполняется для любых полигрупп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$.

Верхняя полигруппа $\mathcal{G}$ и нижняя полигруппа $\mathcal{H}$ называются n -двойственными, если $H_k = G_{n-k-1}$ при $k < n$ и $G_k = H_k = 0$ при $k \geq n$.

КРИТЕРИЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ. Пусть верхняя полигруппа $\mathcal{G}$ и нижняя $\mathcal{H}$ являются n -двойственными, тогда для любой верхней полигруппы $\mathcal{F}$ неравенство $\text{alt } \mathcal{F}\mathcal{G} < n$ равносильно отношению $\mathcal{F} \tau \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое условие для тензорных произведений расшифровывается так: $F_i \otimes G_j = 0$ при $i + j > n - 1$. Пусть $k = n - j - 1$, тогда это неравенство можно преобразовать в следующее: $i > k$, что как раз и является тензорным условием отношения $\mathcal{F} \tau \mathcal{H}$ ввиду того, что $H_k = G_j$. Аналогично проверяется равносильность периодических условий.

§ 3. Кодовая решетка

Биаддитивные решетки

Биаддитивной решеткой называется множество L с заданным на нем отношением частичного порядка $\leq$ и парой аддитивно записываемых операций, обозначаемых $\langle + \rangle$ и $[+]$ и называемых соответственно *мажорным* и *минорным* сложением, если для любых $x, y, z \in L$ выполнены следующие условия.

- (1) Существуют $\sup\{x, y\}$ и $\inf\{x, y\}$.
- (2) Операции $[+]$ и $\langle + \rangle$ коммутативны и ассоциативны.
- (3) Обе операции имеют общий нейтральный элемент.
- (4) $x \langle + \rangle \inf\{y, z\} = \inf\{xy\} \langle + \rangle \inf\{x, z\}$, $x [+] \sup\{y, z\} = \sup\{xy\} [+] \sup\{x, z\}$.
- (5) $x \langle + \rangle (y [+] z) \geq (x \langle + \rangle y) [+] z$.

Первое условие означает решеточную упорядоченность L . Второе означает, что L является абелевой полугруппой по отношению к обеим операциям. Общий нейтральный элемент операций обозначаем как 0 и называем *аддитивным нулем* решетки. Четвертое условие выражает согласованность сложений с порядком и называется *парной дистрибутивностью* сложений по отношению к порядку. Последнее условие называется *парной ассоциативностью*. При подстановке $y = 0$ из неравенства парной ассоциативности получается неравенство между суммами $x \langle + \rangle z \geq x [+] z$, оправдывающее их названия.

Биаддитивная решетка называется *полной*, если каждое подмножество в ней имеет точную верхнюю и нижнюю грань и, кроме того, выполнено следующее усиленное свойство парной дистрибутивности сложений по отношению к порядку:

$$x \langle + \rangle \inf A = \inf \{x \langle + \rangle a \mid a \in A\} \quad x [+] \sup A = \sup \{x [+] a \mid a \in A\}.$$

В полной решетке есть наибольший и наименьший элементы. В дальнейшем мы будем иметь дело, в основном, с полными решетками, и потому по умолчанию считаем решетки полными.

Бесконечный элемент. Элемент решетки мы будем называть *бесконечным* относительно какой-то операции сложения, если его сумма относительно этой операции с любым элементом решетки равна ему самому.

Ясно, что бесконечный элемент для каждой операции один. Если бесконечный элемент положителен (т.е. больше нуля), то он совпадает с наибольшим элементом решетки. Действительно, пусть i – бесконечный элемент относительно операции $+$, а M – наибольший элемент решетки. Тогда $i = i + M \geq 0 + M = M$. Аналогично, отрицательный бесконечный элемент обязательно является наименьшим элементом решетки.

Сигнатурная триада. Простейшим примером биаддитивной решетки является *сигнатурная триада*. Она состоит всего из трех элементов $\mathfrak{S} = \{-, 0, +\}$, записанных в порядке возрастания и называемых соответственно *минусом* или *отрицательной сигнатурой*, *нулем* и *плюсом* или *положительной сигнатурой*. Операции на сигнатурной триаде определяются согласно следующим правилам:

- (1) $x \langle + \rangle x = x [+] x = x$ (идемпотентность);
- (2) $x \langle + \rangle 0 = x [+] 0 = x$ (нейтральность нуля);
- (3) $- \langle + \rangle + = +$ и $- [+] + = -$.

Плюс является *мажорно-бесконечным* элементом сигнатурной триады, а минус – *минорно-бесконечным*. Проверим парную ассоциативность сигнатур. Если $x = -$, то левая часть отрицательна, и потому неравенство выполнено при любой правой части. Если $z = +$, то правая часть положительна, что и обеспечивает справедливость неравенства.

Пусть теперь $x \geq 0 \geq z$. Тогда если $y = -$, то $y \langle + \rangle z = -$, и левая часть отрицательна и неравенство справедливо. Если $y = +$, то аналогичным образом получаем, что правая часть положительна и неравенство выполнено. Наконец, если $\text{sgn } y = 0$, то выражение слева равняется $x [+] z$, так же как и выражение справа.

Двухскобочные знаки. В дальнейшем, чтобы не дублировать одни и те же формулы, мы будем использовать *двухскобочные знаки*: $\llbracket + \rrbracket$, $\llbracket + \rrbracket$, $\llbracket \pm \rrbracket$, $\llbracket \mp \rrbracket$, $\llbracket \pm \rrbracket$, $\llbracket \mp \rrbracket$.

Всякое арифметическое выражение, содержащее двухскобочные знаки, представляет собой запись двух выражений. Одно получается, если во всех двухскобочных знаках оставить внешнюю скобку, убрав внутреннюю, а другое – если убрать внешнюю, оставив внутреннюю. При этом мы считаем, что $\langle \pm \rangle = [\mp] = +$ и $[\pm] = \langle \mp \rangle = -$.

Так, правила сложения сигнатур могут быть выражены следующими тремя формулами: $x [\langle + \rangle] x = x$, $x [\langle + \rangle] 0 = x$, $+ [\langle + \rangle] - = [\langle \pm \rangle]$. А формула $\pm [\langle + \rangle] 0 = \pm$ представляет собой сокращенную запись сразу четырех выражений, которые получаются, когда мы независимо расшифровываем двойные и двухскобочные знаки.

Разности. На всякой полной решетке L можно ввести операции *мажорной*, обозначаемой $\langle - \rangle$, и *минорной*, обозначаемой $[-]$, разностей следующим образом:

$$\alpha [-] \beta = \sup\{\gamma \mid \gamma [+]\beta \leq \alpha\}, \quad \alpha \langle - \rangle \beta = \inf\{\gamma \mid \gamma \langle + \rangle \beta \geq \alpha\}.$$

Если $\beta \langle + \rangle \gamma \not\geq \alpha$ при любом $\gamma \in L$, мы считаем мажорную разность $\alpha \langle - \rangle \beta$ неопределенной. Аналогично, если $\beta [+]\gamma \not\leq \alpha$ при любом $\gamma \in L$, то мы считаем неопределенной минорную разность $\alpha [-] \beta$.

Если решетка содержит положительный бесконечный элемент $+\infty$, то мажорная разность существует для любых операндов, а если содержит $-\infty$, то минорная разность всегда определена.

Следующая таблица содержит все результаты, касающиеся вычисления минорной и мажорной разностей в сигнатурной триаде. Уменьшаемое берется из левого столбца таблицы, а вычитаемое – из верхней строки. Разность находится на пересечении строки уменьшаемого со столбцом вычитаемого. Результат минорного вычитания получается при выборе квадратных скобок в соответствующем двухскобочном выражении, а результат мажорного – при выборе круглых.

Таблица вычитания сигнатур

$\langle [-] \rangle$	+	0	–
+	$\langle [+]\rangle$	+	+
0	–	0	+
–	–	–	$\langle [-]\rangle$

Пополненный натуральный ряд. Множество, получающееся при добавлении к натуральному ряду нуля и $+\infty$, называется *пополненным натуральным рядом* и обозначается $\tilde{\mathbb{N}}$. Ноль является наименьшим элементом $\tilde{\mathbb{N}}$, а $+\infty$ – наибольшим. Порядок на конечных натуральных числах обычный. На пополненном натуральном ряде определяется операция сложения так, что для конечных слагаемых она совпадает с обычной арифметической. А $+\infty$ является бесконечным элементом этой операции. Минорная и мажорная разности натуральных чисел совпадают с арифметической, если уменьшаемое не меньше чем вычитаемое, иначе мажорная разность равна нулю, а минорная не существует.

Основные неравенства

Непосредственно из определения разностей вытекают такие их свойства:

ПРИНЦИПЫ ПЕРЕНОСА. $x [+] y \leq z \iff x \leq z [-] y$, $x \langle + \rangle y \geq z \iff x \geq z \langle - \rangle y$.

Если $x \geq y$, то $\sup\{x, y\} = x$ и $\inf\{x, y\} = y$. Поэтому условие парной дистрибутивности позволяют получить такой результат.

КОВАРИАНТНОСТЬ СЛОЖЕНИЯ. $x \leq y$ влечет $x \langle + \rangle z \leq y \langle + \rangle z$ и $x [+] z \leq y [+] z$.

Ясно, что любая разность не убывает при увеличении уменьшаемого (*ковариантна* уменьшаемому) и не возрастает при увеличении вычитаемого (*контравариантна* вычитаемому).

ВАРИАНТНОСТЬ ВЫЧИТАНИЯ. $z \geq x$ влечет $z \langle [-] \rangle y \geq x \langle [-] \rangle y$ и $y \langle [-] \rangle x \geq y \langle [-] \rangle z$.

Следующие неравенства будут часто применяться далее.

КОМПЕНСАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА. Для любых элементов биаддитивной решетки выполняются следующие неравенства:

$$(x \langle - \rangle y) \langle + \rangle y \geq x \geq (x [-] y) [+] y, \quad (x \langle + \rangle y) \langle - \rangle y \leq x \leq (x \langle + \rangle y) [-] y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для любого z из некоторого множества Z выполнено неравенство $z \langle + \rangle y \geq x$, то в силу дистрибутивности будет $\inf Z \langle + \rangle y \geq x$. Это доказывает неравенство $(x \langle - \rangle y) \langle + \rangle y \geq x$. Аналогично доказывается неравенство $(x [-] y) \langle + \rangle y \leq x$. Если в неравенстве $x \langle + \rangle y \leq x \langle + \rangle y$ перенести согласно правилам переноса y справа налево, то получится неравенство $(x \langle + \rangle y) \langle - \rangle y \leq x$, а если в неравенстве $x [+] y \leq x [+] y$ перенести y направо, то получится $x \leq (x [+] y) [-] y$.

ТРАНСПОЗИЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА. При любых x, y, z справедливы неравенства

$$(x \langle [+] \rangle z) \langle - \rangle y \leq (x \langle - \rangle y) \langle [+] \rangle z, \quad (x \langle [+] \rangle z) [-] y \geq (x [-] y) \langle [+] \rangle z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое неравенство. В силу общих принципов переноса оно равносильно следующему: $((x \langle - \rangle y) \langle [+] \rangle z) \langle + \rangle y \geq x \langle [+] \rangle z$. А последнее доказывается цепочкой неравенств, используя парную ассоциативность и компенсационные неравенства $((x \langle - \rangle y) \langle [+] \rangle z) \langle + \rangle y \geq ((x \langle - \rangle y) \langle + \rangle y) \langle [+] \rangle z \geq x \langle [+] \rangle z$. Второе неравенство доказывается аналогично.

Двухсторонние операции и регулярные элементы. В случае, когда минорная сумма совпадает с мажорной: $x [+] y = x \langle + \rangle y$, мы будем говорить, что определена *двухсторонняя* сумма. И будем в этом случае опускать скобочки и записывать эту сумму как $x + y$. Аналогичное соглашение мы применяем к разности, используя запись $x - y$ в случае, если совпадают *односторонние* разности $x [-] y = x \langle - \rangle y$, и называя такую разность *односторонней*. Элемент n называется *регулярным*, если справедливость любого из неравенств $x \langle [+] \rangle n \leq y \langle [+] \rangle n$ влечет неравенство $x \leq y$. Непосредственно из определения регулярного элемента вытекает такой

ПРИНЦИП СОКРАЩЕНИЯ. Если n регулярный, то при любых x, y имеем:

$$(x \llcorner (+) n) \langle - \rangle (y \llcorner (+) n) = x \langle - \rangle y, \quad (x \llcorner (+) n) \llcorner (-) (y \llcorner (+) n) = x \llcorner (-) y.$$

Односторонние порядки. Две операции разности индуцируют на аддитивной решетке в дополнение к основному отношению порядка $\leq$ еще два: *мажорный* $\langle \leq \rangle$ и *минорный* $\llcorner \leq \lrcorner$. Отношение $x \llcorner \geq \rceil y$ расшифровывается так: $x = y \llcorner (-) z$ для некоторого $z \geq 0$. Транзитивность отношений $\llcorner \geq \rceil$ вытекает из следующего предложения.

ФОРМУЛЫ ПОВТОРНОГО ВЫЧИТАНИЯ. $(x \llcorner (-) y) \llcorner (-) z = x \llcorner (-) (y \llcorner (+) z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть мажорной формулы определяется как нижняя грань множества $A = \{w \mid w \langle + \rangle z \geq x \langle - \rangle y\}$. Переносим y влево и группируя z и y , получаем $A = \{w \mid w \langle + \rangle (z \langle + \rangle y) \geq x\}$, но это уже множество, нижняя грань которого определяет $x \langle - \rangle (y + z)$. Таким образом, мажорное равенство доказано. Минорное доказывается аналогично.

Отношение $x \langle \leq \rangle y$ мы будем выражать словами, говоря, что x *мажорно подчинен* y . Аналогично, x *минорно подчинен* y , если $x \llcorner \leq \lrcorner y$.

УРАВНЕНИЕ ПОДЧИНЕНИЯ. $x \llcorner \geq \rceil y \iff x = y \llcorner (-) (y \llcorner (-) x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = y \llcorner (-) (y \llcorner (-) x)$, то, полагая $z = y \llcorner (-) x$, получаем $x \llcorner \geq \rceil y$. Доказательство в другую сторону поведем лишь для мажорного случая, оставив минорный читателю. Если $x \langle \leq \rangle y$, то $x = y \langle - \rangle z$ для некоторого z . Тогда $z + x \geq y$, откуда $z \geq y \langle - \rangle x$. И в силу контравариантности разности вычитаемому отсюда следует неравенство $x = y \langle - \rangle z \leq y \langle - \rangle (y \langle - \rangle x)$. Но обратное неравенство $x \geq y \langle - \rangle (y \langle - \rangle x)$ также верно, ибо равносильно верному неравенству $x + (y \langle - \rangle x) \geq y$. Что и требовалось доказать.

Будем говорить, что сумма $x \langle + \rangle y$ представляет собой *минимальное разложение* элемента z , и писать $z \langle = \rangle x \langle + \rangle y$, если $z \leq x \langle + \rangle y$ и для любых $x' < x$ и $y' < y$ будет $x' \langle + \rangle y \not\geq z$ и $x \langle + \rangle y' \not\geq z$. Непосредственно из определений мажорной разности вытекает

КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОСТИ. $z \langle = \rangle x + y \iff x = z \langle - \rangle y$ и $y = z \langle - \rangle x$.

Из этого критерия получаем

СЛЕДСТВИЕ. Если $z \langle = \rangle x + y$, то $x \langle \leq \rangle z$ и $y \langle \leq \rangle z$.

Формулировку и доказательство аналогичных результатов про *максимальные разложения* мы оставляем читателю.

Опираясь на таблицу вычитания сигнатур, нетрудно получить таблицы сравнения для односторонних порядков.

$$- \langle < \rangle + \langle < \rangle 0, \quad + \llcorner < \lrcorner - \llcorner < \lrcorner 0.$$

Триплеты

Множество триплетов, обозначаемое $\mathbb{N}^\pm$, является подмножеством прямого произведения $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}$, содержащим все элементы этого произведения, за исключением следующих пяти: $(+\infty, +)$, $(+\infty, -)$, $(1, -)$, $(0, +)$, $(0, -)$, называемых *некорректными* триплетами.

Для триплета $\alpha = (a, b)$ его первая координата a называется *основой*, а вторая координата b – *сигнатурой*. Основа триплета α обозначается $|\alpha|$, а сигнатура $\operatorname{sgn} \alpha$. Для триплетов определяются две *односторонние* операции сложения: мажорная и минорная, обозначаемые $\langle + \rangle$ и $[+]$ соответственно. Формулы, задающие эти операции для конечных триплетов, таковы:

$$|x \langle + \rangle y| = |x| + |y|, \quad \operatorname{sgn} x \langle + \rangle y = \operatorname{sgn} x \langle + \rangle \operatorname{sgn} y.$$

$A + \infty$ является бесконечным элементом относительно обеих операций, т.е. $+ \infty \langle + \rangle x = + \infty$ для любого триплета x . Триплеты с конечной основой $(n, +)$ и $(n, -)$ записываются как n^+ и n^- соответственно.

Множество триплетов с описанными выше отношением порядка и парой операций сложения является биаддитивной решеткой. Парная ассоциативность триплетов следует из парной ассоциативности сигнатур.

КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ. $x \in \mathbb{N}^\pm$ является *регулярным элементом*, если и только если $x < +\infty$ и $\operatorname{sgn} x = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность натуральных чисел очевидна. Если $\operatorname{sgn} x \neq 0$, то $2 \langle + \rangle x = 2^{\operatorname{sgn} x} \langle + \rangle x$, что демонстрирует нерегулярность x .

В силу этого критерия мы отождествляем натуральные числа с регулярными триплетом. Триплеты ненулевой сигнатуры называются *сингулярными*. Триплеты отрицательной сигнатуры называются *минорными*, а положительной – *мажорными*.

Триплеты мы обозначаем малыми греческими α, β, γ или малыми латинскими x, y, z буквами. Буквами k, m, n обозначаются натуральные числа.

Неособое вычитание. *Вычитанием* мы будем называть тройку, образованную двумя операндами (уменьшаемым и вычитаемым) и операцией вычитания. А разностью называется результат вычитания. Вычитание $x \langle - \rangle y$ будем называть *неособым*, если оба операнда конечны и разность определяется по следующим *формулам неособого вычитания*:

$$|x \langle - \rangle y| = |x| - |y|, \quad \operatorname{sgn} x \langle - \rangle y = \operatorname{sgn} x \langle - \rangle \operatorname{sgn} y.$$

Всегда, когда формулы неособого вычитания задают триплет, этот триплет является искомой разностью. Однако эти формулы не задают триплета при $x < y$ или когда они определяют один из следующих трех *некорректных триплетов*: $1^-, 0^+, 0^-$. В этих случаях для получения значения разности нужно провести *коррекцию* результата. Положим $\operatorname{corr}^+ 1^- = 1 = \operatorname{corr}^+ 0^+$, $\operatorname{corr}^+ 0^- = 0$ и $\operatorname{corr}^- 0^+ = 0 = \operatorname{corr}^- 1^-$.

В таком случае односторонние разности можно было бы выразить формулой

$$x \langle - \rangle y = \operatorname{corr}^{[\langle \pm \rangle]}(|x| - |y|, \operatorname{sgn} x \langle - \rangle \operatorname{sgn} y).$$

Самое большее, что может дать плюс-коррекция из некорректного кода, – это единицу. Поэтому, если мажорная разность превышает единицу, то вычитание неособо. И самое большее, что может дать минус-коррекция из некорректного кода, – это ноль. В результате получаем следующее предложение.

НЕОСОБОСТЬ НЕМАЛЫХ РАЗНОСТЕЙ. Если $x \geq y$, то неособо минорное вычитание $x [-] y$, а если $x > y + 1$, то неособо мажорное $x \langle - \rangle y$.

Мажорную разность мы будем называть *малой*, если она не превосходит единицы, а минорную, если она не превосходит нуля. В случае, если разность не мала, она, как показано выше, получается неособым вычитанием. Следующее предложение доказывается непосредственной проверкой.

ФОРМУЛЫ МАЛЫХ РАЗНОСТЕЙ.

- (1) $\alpha \langle - \rangle \beta = 0$, если и только если $\alpha \leq \beta$;
- (2) $\alpha \langle - \rangle \beta = 1$, если и только если $\beta < \alpha \leq \beta + 1$;
- (3) $\alpha [-] \beta = 0$, если и только если $\beta \leq \alpha < \beta + 1$.

Будем говорить, что вычитание *линейно*, если основа разности равна разности основ уменьшаемого и вычитаемого. Мы также будем употреблять термин *линейная разность* для обозначения результата линейного вычитания. В случае малых разностей линейность может нарушаться, но всегда выполнены следующие неравенства.

НЕРАВЕНСТВА ПОЛУЛИНЕЙНОСТИ.

$$|x \langle - \rangle y| \geq |x| - |y| \text{ (мажорная суперлинейность)},$$

$$|x [-] y| \leq |x| - |y| \text{ (минорная сублинейность)}.$$

Из этих неравенств вытекает такое соотношение между основами односторонних разностей:

$$|x \langle - \rangle y| \geq |x [-] y|.$$

Из неравенств полулинейности получаем

СЛЕДСТВИЕ. Двухстороннее вычитание линейно.

КРИТЕРИЙ ДВУХСТОРОННОСТИ. Если n натуральное и $x \neq n$, то $x \langle - \rangle n = x [-] n$, если и только если $x \geq (n + 1)$, и $n \langle - \rangle x = n [-] x$, если и только если $x \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x > n + 1$, то разности $x \langle - \rangle n$ не малые, а потому неособые, а потому совпадают. Если $x = n + 1$, то обе разности равны единице. Если $n < x < n + 1$, то $x [-] n = 0$ и $x \langle - \rangle n = 1$. Так, доказано первое утверждение. Второе мы оставляем читателю.

Отметим, что из проведенного анализа вытекает такое следствие:

НЕОСОБОСТЬ ДВУХСТОРОННЕЙ РАЗНОСТИ. Если один из операндов вычитания натурален, то разность является двухсторонней в том и только том случае, когда минорное и мажорное вычитания неособы.

КРИТЕРИЙ МАЖОРНОГО ПОДЧИНЕНИЯ. Для любого $y > 1$ будет $0, 1, y \langle - \rangle 1 \langle < \rangle y$. Если $1 < x < y$, то $x \langle < \rangle y$, если и только если $x \leq y - 1$ и $\operatorname{sgn} x \langle \leq \rangle \operatorname{sgn} y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ноль и y мажорно подчинены y ввиду минимальности разложения $y \langle = \rangle y \langle + \rangle 0$. Подчиненность единицы вытекает из разложения $y \langle = \rangle (y \langle - \rangle 1) \langle + \rangle 1$.

Пусть теперь $1 < x < y$ и $x = y \langle - \rangle z$. Тогда разность немала, вычитание $y \langle - \rangle z$ неособо, и потому $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y \langle - \rangle \operatorname{sgn} z$ и $\operatorname{sgn} y \langle < \rangle \operatorname{sgn} z$. Поскольку $x \neq y$, постольку

$z \geq 1$. Следовательно, $x \leq y - 1$. И необходимость сформулированного условия доказана.

Пусть теперь $1 < x \leq y - 1$ и $\operatorname{sgn} x \langle \leq \rangle \operatorname{sgn} y$. Тогда $y > 2$. Если $x = y - 1$, то $x \langle < \rangle y$. Если $x < y - 1$, то $x + 1 < y$, и в этом случае вычитание $y \langle - \rangle x$ является неособым. В таком случае $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y \langle - \rangle \operatorname{sgn}(y \langle - \rangle x)$ и $|x| = |y \langle - \rangle (y \langle - \rangle x)|$. Откуда $x = y \langle - \rangle (y \langle - \rangle x)$. Что и требовалось доказать.

Целые части. Для конечного триплета x определим его *надцелую часть* $\lceil x \rceil$ как наименьшее целое число, не уступающее x , и определим *подцелую часть* $\lfloor x \rfloor$ как наибольшее целое число, не превосходящее x . И полагаем $\lceil \infty \rceil = \lfloor \infty \rfloor = \infty$.

ФОРМУЛА ЦЕЛОЙ ЧАСТИ. Если $\operatorname{sgn} x = 0$, то $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = |x|$; если $\operatorname{sgn} x = +$, то $\lceil x \rceil = |x| + 1$ и $\lfloor x \rfloor = |x|$; если $\operatorname{sgn} x = -$, то $\lfloor x \rfloor = |x| - 1$ и $\lceil x \rceil = |x|$.

Таким образом, тройка чисел $\lceil x \rceil$, $|x|$ и $\lfloor x \rfloor$ однозначно определяет триплет.

ФОРМУЛЫ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ СУММЫ. Для любого триплета x и любого натурального n справедливы следующие соотношения:

- (1) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
- (2) $\lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil = |x| + n$, $\lfloor x \langle + \rangle n^+ \rfloor = |x| + n$;
- (3) $\lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil = \lfloor x \rfloor + n + 1$, $\lfloor x \langle + \rangle n^+ \rfloor = \lceil x \rceil + n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством первого равенства третьего пункта. Если x не минорен, то $|x| = \lfloor x \rfloor$ и мажорна сумма $x \lceil + \rceil n^+$. Откуда $\lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil = |x \lceil + \rceil n^+| + 1 = |x| + n + 1 = \lfloor x \rfloor + n + 1$. Если x минорен, то минорна сумма $x \lceil + \rceil n^+$ и $\lfloor x \rfloor = |x| - 1$, откуда $\lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil = |x \lceil + \rceil n^+| = |x| + n = n + \lfloor x \rfloor + 1$.

ПРИНЦИПЫ ТЕСТИРОВАНИЯ. Для любой триплет x однозначно определяется любой из следующих двух четверок натуральных чисел:

- (1) n , $\lceil x + n \rceil$, $\lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil$, $\lceil x \lceil + \rceil n^- \rceil$;
- (2) n , $\lfloor x + n \rfloor$, $\lfloor x \langle + \rangle n^+ \rfloor$, $\lfloor x \langle + \rangle n^- \rfloor$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу формул целой части суммы имеем $\lceil x \rceil = \lceil x + n \rceil - n$, $|x| = \lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil - n$, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \lceil + \rceil n^+ \rceil - n - 1$. Поэтому первая четверка определяет x . Аналогично доказывается, что вторая тоже.

При любых x, y справедливы такие *неравенства целой части*

$$\lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x \langle + \rangle y \rfloor \leq \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor \leq \lceil x \lceil + \rceil y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil.$$

Триплетные кодировки

Триплетными последовательностями мы будем называть функции из $\mathfrak{P}_0$ в $\mathbb{N}^\pm$, принимающие в нуле регулярное или бесконечное значение. Обозначать триплетные последовательности будем большими латинскими буквами $A, B, C, D \dots$. Триплетная последовательность называется *знакопостоянной*, если либо все ее члены положительны (положительная последовательность), либо нулевые (нулевая последовательность). Триплетная последовательность D называется *унирегулярной*, если регулярность $D(p)$ влечет равенство $D(p) = D(0)$.

Знакопостоянная унирегулярная триплетная последовательность называется *корректной*. Корректные триплетные последовательности будем кратко называть *кодировками*. Совокупность кодировок обозначается $\mathfrak{CD}$ и называется *кодовой алгеброй*.

Отношение порядка на триплетах порождает отношение частичного порядка на кодировках (почленный порядок). А именно, считаем, что $D \geq C$, если $D(p) \geq C(p)$ для любого простого $p \geq 0$.

Операции на триплетах порождают аналогичные операции на триплетных кодировках. Для двух триплетных последовательностей C, D определим их односторонние суммы $C \llcorner (+) D$ почленно. Так что $(C \llcorner (+) D)(p) = C(p) \llcorner (+) D(p)$. Тогда сумма знакопостоянных последовательностей – знакопостоянна, а сумма унирегулярных – унирегулярна. Следовательно, эти операции, совершаемые над кодировками, дают кодировки.

Постоянная триплетная последовательность корректна в том и только том случае, когда она принимает регулярное значение. Постоянную последовательность, принимающую натуральное значение n , мы также обозначаем как n и называем *натуральной кодировкой*.

Для произвольной положительной триплетной последовательности C определим две корректные последовательности C^+ и C^- , называемые соответственно *плюс-коррекцией* и *минус-коррекцией* триплетной последовательности C , следующим образом: $C^+(p) = C(p) = C^-(p)$, если $C(p)$ нерегулярно или $C(p) = C(0)$, иначе $C^+(p) = C(p)^+$, а $C^-(p) = C(p)^-$. Ясно, что для корректной последовательности C обе ее коррекции совпадают с C . Операции коррекции применяются при определении точных граней.

ФОРМУЛЫ ТОЧНЫХ ГРАНЕЙ. Для любой пары кодировок C, D *плюс-коррекция последовательности $\max\{C(p), D(p)\}$ является их точной верхней гранью в $\mathfrak{CD}$, а минус-коррекция последовательности $\min\{C(p), D(p)\}$ является точной нижней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C(0) = D(0)$, то формулы $E(p) = \max\{C(p), D(p)\}$ и $F(p) = \min\{C(p), D(p)\}$ задают корректные кодировки, которые, очевидно, являются точными гранями. В случае, если $C(0) \neq D(0)$, эти формулы могут дать последовательности, принимающие два регулярных значения – $E(0)$ и $F(0)$. Плюс-коррекция E^+ , как следует из ее определения, почленно превосходит как C , так и D . Если же B – кодировка, превосходящая C и D , то при любом p будет $B(p) \geq E(p)$. Если же мы предположим, что $B(p) < E^+(p)$, то $B(p) = E(p)$ регулярно и $E(p) \neq E(0)$, поэтому $E(p) = F(0) < E(0)$. В силу унирегулярности B имеем $B(p) = B(0)$, откуда $B(0) < E(0)$, что противоречит условию $B \geq E$. Аналогично разбирается случай нижней грани.

ЛЕММА О ДИСТРИБУТИВНОСТИ. Для любых трех кодировок имеем:

$$C \llcorner (+) \sup\{A, B\} = \sup\{C \llcorner (+) A, C \llcorner (+) B\}, \quad C \llcorner (+) \inf\{A, B\} = \inf\{C \llcorner (+) A, C \llcorner (+) B\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E(p) = \max\{A(p), B(p)\}$ – почленный максимум кодировок A, B . Тогда левая часть равна $C \llcorner (+) E^+$, а правая равна $(C \llcorner (+) E)^+$. Если для некоторого p имеем $E^+(p) = E(p)$, то или $E(p)$ нерегулярно и тогда нерегулярно

$E(p) \Vdash C(p)$, или $E(p) \neq E(0)$ и тогда $E(p) \Vdash C(p) \neq E(0) + C(0)$, т.е. в обоих случаях имеем $(C \Vdash E)^+(p) = (C \Vdash E)(p)$. И потому левая часть равна правой. В противном случае $E(p)$ регулярно и отлично от $E(0)$. Тогда слева получается $E(p)^+ \Vdash C(p)$. Если $C(p)$ регулярно, то $C(p) \Vdash E(p)$ также регулярно и отлично от $C(0) + E(0)$, поэтому значение правой части будет $(E(p) + C(p))^+$, что совпадает со значением левой. Если же $C(p)$ нерегулярно, то получим $E(p)^+ \Vdash C(p) = E(p) \Vdash C(p) = (E \Vdash C)^+(p)$, что и требовалось доказать. Доказательство мажорной дистрибутивности аналогично.

ЛЕММА О НАПРАВЛЕННОСТИ. Пусть D_i – направленное множество кодировок. Тогда если D_i направленно по возрастанию, то $D(p) = \sup D_i(p)$ является корректной кодировкой и $D = \sup D_i$, а если по убыванию, то $D(p) = \inf D_i(p)$ является корректной кодировкой и $D = \inf D_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_i направленно по возрастанию. Если одно из D_i положительно, то $D(p)$ также положительно. Пусть $D(p) \neq D(0)$ конечны, тогда найдется i , для которого $D_i(0) = D(0)$, и найдется j , для которого $D_j(p) = D(p)$. Пусть k такое, что $D_k \geq D_i, D_j$. Тогда $D_k(p) = D(p)$ и $D_k(0) = D(0)$. Ввиду унирегулярности D_k получаем, что $D_k(p) = D(p)$ нерегулярно, что доказывает унирегулярность D . Случай убывающей направленности разбирается аналогично.

ТЕОРЕМА. Множество кодировок с определенной выше парой сумм является полной биаддитивной решеткой, ненулевыми регулярными элементами которой являются натуральные кодировки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_i, i \in I$, – произвольное множество кодировок. Тогда для любого конечного $J \subset I$ положим $C_J = \sup_{i \in J} C_i$ (супремум существует в соответствии с формулой точных граней). Тогда множество супремумов конечных подмножеств, будучи направленным по возрастанию, имеет супремум, согласно лемме о направленности. И этот супремум и будет супремумом множества C_i . Тем самым установлено, что $\mathfrak{CD}$ является полной решеткой.

Коммутативность и ассоциативность операций сложения кодировок вытекает из аналогичных свойств триплетов, ведь эти операции выполняются почленно. Ковариантность операций порядку очевидна по этой же причине. Дистрибутивность мажорного сложения по отношению к супремуму для конечных множеств вытекает из леммы о дистрибутивности, а для бесконечных выводится из конечного результата с помощью леммы о направленности в духе проведенного выше доказательства полноты.

Нейтральной по отношению к обеим операциям является нулевая кодировка. А свойство парной ассоциативности кодировок вытекает из этого свойства триплетов в силу почленной определенности операций сложения и неравенств.

Регулярность натуральных кодировок очевидна. Проверку того, что никакая ненатуральная кодировка регулярной не является, мы оставляем читателю и в дальнейшем этот факт не используем.

В дальнейшем нам потребуются еще такое свойство кодовой решетки, которое мы будем называть *счетной теснотой*.

СЧЕТНАЯ ТЕСНОТА КОДИРОВОК. Всякое множество кодировок содержит счетное подмножество, которое имеет такой же супремум и инфимум.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество имеет такой же супремум (инфимум) как направленное множество, образованное супремумами (инфимумами) его конечных подмножеств, доказательство достаточно провести для направленных множеств. Пусть Δ – некоторое несчетное направленное множество кодировок, тогда его верхняя и нижняя грани согласно лемме о направленности вычисляются почленно. Для всякого p существует счетное множество $\Delta_p \subset \Delta$, для которого супремум и инфимум множества значений в p такие же, как у всего Δ . В таком случае $\bigcup_{p \in \mathfrak{P}_0} \Delta_p$ будет счетным множеством с такими же супремумом и инфимумом, что и Δ .

Разности кодировок

Разности кодировок, в отличие от сумм, не всегда определяются *почленно*. Справедливы лишь следующие сравнения.

ПОЧЛЕННЫЕ СРАВНЕНИЯ. Для любых кодировок C, D при любом простом p справедливы неравенства $(D \langle \rightarrow C \rangle)(p) \geq D(p) \langle \rightarrow C(p) \rangle$, $(D \langle \vdash C \rangle)(p) \leq D(p) \langle \vdash C(p) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C \langle + \rangle (D \langle \rightarrow C \rangle) \geq D$, постольку при любом p имеем $C(p) \langle + \rangle (D \langle \rightarrow C \rangle)(p) \geq D(p)$. Переносим $C(p)$ в правую часть, получаем нужное мажорное неравенство. Минорное доказывается аналогично.

Почленная разность $D(p) \langle \dashv \rangle C(p)$ нередко оказывается некорректной последовательностью. В тех же случаях, когда она корректна, она и является разностью $C \langle \dashv \rangle D$.

ЛЕММА О КОРРЕКТНОЙ РАЗНОСТИ. Пусть C и D – две кодировки. Тогда если $B(p) = D(p) \langle \dashv \rangle C(p)$ является кодировкой, то $B = D \langle \dashv \rangle C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением мажорного случая. Очевидно неравенство $B \langle + \rangle C \geq D$. Откуда $B \geq D \langle \rightarrow C$. Обратное неравенство доказано выше.

Важный частный случай, когда почленная разность корректна, представлен следующим предложением.

ПОЧЛЕННОСТЬ НЕМАЛОЙ РАЗНОСТИ. Если разность $C(p) \langle \dashv \rangle D(p)$ не является малой ни для какого p , то $(C \langle \dashv \rangle D)(p) = C(p) \langle \dashv \rangle D(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C(p) \langle \dashv \rangle D(p)$ не является малой, то она неособа и ее регулярность означает одновременную регулярность $C(p)$ и $D(p)$. Поскольку C и D унирегулярны, отсюда следует, что $C(p) = C(0)$ и $D(p) = D(0)$. Откуда $C(p) - D(p) = C(0) - D(0)$. Тем самым и доказано, что почленная разность дает корректную кодировку.

ПОЧЛЕННОСТЬ ДВУХСТОРОННЕЙ РАЗНОСТИ. Если $D \langle \rightarrow C = D \langle \vdash C$, то $(D - C)(p) = D(p) - C(p)$ для всякого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $D \langle \rightarrow C \geq 0$, постольку и $D \langle \vdash C \geq 0$, а следовательно, $D \geq C$. Если $D = C$, то обе разности нулевые и почленные. Если $D > C$, то $D \langle \rightarrow C > 0$, и потому $D \langle \rightarrow C \geq 1$. Откуда $D \langle \vdash C \geq 1$. Следовательно, $D \geq C + 1$. Но в таком случае минорное вычитание $D(p) \langle \vdash C(p)$ немалое при любом p , и, следовательно, минорная разность $D \langle \vdash C$ почленна. Поэтому $D \langle \rightarrow C$ совпадает с почленной

минорной разностью. Но почленная мажорная разность, с одной стороны, не меньше почленной минорной, а с другой – не больше мажорной. Откуда получаем почленность мажорной разности. Что и требовалось доказать.

КРИТЕРИЙ ДВУХСТОРОННОСТИ. Пусть n – натуральная кодировка. Если $D \geq n + 1$, и только в этом случае, $D \langle \rightarrow \rangle n = D [-] n$. Если $D \leq n - 1$, и только в этом случае, $n \langle \rightarrow \rangle D = n [-] D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством первого утверждения. Если $D \geq n + 1$, то согласно доказанному в параграфе о триплетях критерию двухсторонности разности при любом p разность $D(p) - n$ двухсторонняя и неособая. Поэтому ее регулярность влечет регулярность $D(p)$, а потому и равенство $D(p) - n = D(0) - n$. Поэтому $D(p) - n$ унирегулярна и корректна. Поэтому двухсторонность разности $D - n$ вытекает из леммы о корректной разности. Если же разность $D - n$ двухсторонняя, то она почленная. И неравенство $D(p) \geq n + 1$ следует теперь из триплетного критерия двухсторонности разности.

КРИТЕРИЙ ПОДЧИНЕНИЯ. Кодировка D мажорно подчинена натуральной n , если и только если $D \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $D \leq n - 1$, то $n \langle \rightarrow \rangle D = n [-] D$ и $(n - D)(p) = n - D(p)$ согласно вышесказанному. Если $D = 0$, то $n \langle \rightarrow \rangle (n - D) = n \langle \rightarrow \rangle n = 0 = D$. Если $D > 0$, то $n - D \leq n - 1$, и потому разность между n и $n - D$ двухсторонняя и почленно определенная. Поэтому $(n - (n - D))(p) = n - (n - D(p)) = D(p)$ в силу критерия подчинения триплетов. Итак, если $D \leq n - 1$, то $D \langle \rightarrow \rangle n$. Если же $D = n \langle \rightarrow \rangle (n \langle \rightarrow \rangle D)$, и $D \neq n$, то $(n \langle \rightarrow \rangle D) \geq 1$, и потому $D \leq n \langle \rightarrow \rangle 1 = n - 1$. Что и требовалось доказать.

Тестирование

Нормы кодировок. Наименьшее натуральное число n , для которого $n \geq D$, называется *верхней нормой* триплетной последовательности D или ее *размерностью* и обозначается $\|D\|$. Отметим, что существует единственная кодировка единичной размерности, и она тождественно равна единице.

Наибольшее целое число n , для которого $n \leq D$, называется *нижней нормой* триплетной последовательности D или ее *связностью* и обозначается $\langle\langle D \rangle\rangle$. Таким образом, равенство $\|D\| = \langle\langle D \rangle\rangle$ характеризует постоянную последовательность. Верхняя и нижняя норма могут быть выражены соотношениями:

$$\|D\| = \max[D(p)], \quad \langle\langle D \rangle\rangle = \min[D(p)].$$

Следующие оценки норм суммы триплетных последовательностей вытекают из триплетных неравенств для целых частей

$$\begin{aligned} \langle\langle D \rangle\rangle_1 + \|D_2\| &\leq \|D_1 + D_2\| \leq \|D_1\| + \|D_2\|, \\ \langle\langle D \rangle\rangle_1 + \langle\langle D \rangle\rangle_2 &\leq \langle\langle D_1 + D_2 \rangle\rangle \leq \|D_1\| + \langle\langle D \rangle\rangle_2. \end{aligned}$$

Экстремальные кодировки. Ввиду полноты решетки кодировок среди всех кодировок, принимающих при данном p значение α , найдутся как наименьшая, так и наибольшая. Наименьшую называем (α, p) -минимальной и обозначаем $M^{(\alpha, p)}$, наибольшую называем (α, p) -максимальной и обозначаем $M_{(\alpha, p)}$. Непосредственно из определения экстремальных кодировок вытекают такие *формулы разложения*

$$D = \sup_{p \geq 0} M^{(D(p), p)} = \inf_{p \geq 0} M_{(D(p), p)}.$$

Свойства минимального кода. Пусть $M = M^{(n, p)}$, тогда:

- (1) $|M(q)| = 1$ для любого $q \neq p, 0$;
- (2) если α сингулярно, то $M(q) = 1$ для всех $q \neq p$;
- (3) если α регулярно, то $M(0) = M(p)$.

Доказательство. Если $|M(q)| > 1$, то, изменив значение $M(q)$ на 1^+ в случае $q \neq p, 0$, получим корректную кодировку, опровергающую минимальность $M(q)$. Таким образом, первый пункт доказан. Если α сингулярно, то корректной является кодировка, равная единице всюду, за исключением p , где она равна α , поэтому M не может иметь больших значений. А меньше – только нули. Наконец, если α регулярно, то $M(0) = \alpha$ в силу корректности кода.

Свойства максимального кода. Пусть $M = M_{(n, p)}$, тогда:

- (1) $|M(q)| = +\infty$ для любого $q \neq p, 0$;
- (2) если α сингулярно, то $M(q) = +\infty$ для всех $q \neq p$;
- (3) если α регулярно, то $M(0) = M(p)$.

Доказательство предоставляется читателю.

ФОРМУЛЫ ДОБАВЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ КОДИРОВОК. Если $\|D\| < n$, то:

- (1) $\|D \uplus M^{(n, p)}\| = \max\{\lceil D(p) \rceil, D(0)\} + n$;
- (2) $\|D \uplus M^{(n^+, p)}\| = \lfloor D(p) \rfloor + n + 1$;
- (3) $\|D \uplus M^{(n^-, p)}\| = |D(p)| + n$.

Доказательство. Если $\|D\| < n$, то $n \geq |D(q)| + 1 = |D(q) \uplus M^{(n, p)}(q)|$ при любом $q \neq p, 0$. И, с другой стороны, если $\|D\| > 0$, то $|D(p) \uplus M^{(n, p)}(p)| \geq 1 + n$. Поэтому $D \uplus M^{(n, p)}$ принимает максимальное значение в p или нуле, а в остальных случаях в p , и нужные нам равенства вытекают из триплетных формул для целой части суммы.

ФОРМУЛЫ ДОБАВЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ КОДИРОВОК. Для любой D имеем:

- (1) $\langle\langle D \uplus M_{(n, p)} \rangle\rangle = \min\{\lfloor D(p) \rfloor, D(0)\} + n$;
- (2) $\langle\langle D \uplus M_{(n^-, p)} \rangle\rangle = \lceil D(p) \rceil + n - 1$;
- (3) $\langle\langle D \uplus M_{(n^+, p)} \rangle\rangle = |D(p)| + n$.

Доказательство предоставляется читателю.

Итог нашим рассмотрениям подводит пара теорем.

ТЕОРЕМА О РАЗМЕРНОСТНОМ ТЕСТИРОВАНИИ. *Для совпадения конечномерных кодировок C и D необходимо и достаточно, чтобы равенство $\|C \dot{+} B\| = \|D \dot{+} B\|$ выполнялось для любой кодировки B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия очевидна, докажем достаточность. Равенство $\|C \dot{+} M^{(n,0)}\| = \|D \dot{+} M^{(n,0)}\|$ позволяет, в силу формул добавления минимальных кодировок, получить $C(0) = D(0)$. Если $C(p) > C(0)$, то $\lceil C(p) \rceil > C(0)$, и потому $\|C \dot{+} M^{(n,p)}\| > n + C(0)$, поэтому и $\|D \dot{+} M^{(n,p)}\| > n + D(0)$, откуда $D(p) > D(0)$ и $\lceil D(p) \rceil = \lceil C(p) \rceil$. Сложение с минимальными кодировками других типов дает равенства $|D(p)| = |C(p)|$ и $\lfloor D(p) \rfloor = \lfloor C(p) \rfloor$. Поэтому $C(p) = D(p)$, если одно из них больше чем $C(0) = D(0)$. Пусть теперь $C(p), D(p) < C(0)$. В этом случае $C(p)$ и $D(p)$ сингулярны. Их основы совпадают и для заключения о совпадении их сигнатур достаточно равенства подцелых частей. Если $C(p) = C(0)$, то $D(p) \leq D(0)$ и $|D(p)| = |C(p)| = \lfloor C(p) \rfloor = \lfloor D(p) \rfloor$, откуда следует неминорность $D(p)$ и вместе с ней равенство $D(p) = D(0) = C(p)$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА О СВЯЗНОСТНОМ ТЕСТИРОВАНИИ. *Для совпадения кодировок C и D необходимо и достаточно, чтобы при любом B выполнялось равенство $\langle\langle C \dot{+} B \rangle\rangle = \langle\langle D \dot{+} B \rangle\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предоставляется читателю.

Кодирование

Прежде чем кодировать полигруппы, кодируем бокштейновские группы. Положим $\text{sgn}(\mathbb{Z}_p) = 0$, $\text{sgn}(\mathbb{Z}_p) = +$ и $\text{sgn}(\mathbb{Q}_p) = -$.

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая верхняя полигруппа. Поставим ей в соответствие кодировку $\text{Alt } \mathcal{G} \in \mathfrak{CD}$, полагая $|\text{Alt } \mathcal{G}(p)| = \text{alt}_p \mathcal{G}$ и $\text{sgn } \text{Alt } \mathcal{G}(p) = -\text{sgn}(|\sigma_p^+ \mathcal{G}|)$ для любого простого $p \geq 0$.

Всякой нижней полигруппе $\mathcal{G}$ поставим в соответствие кодировку $\text{Der } \mathcal{G} \in \mathfrak{CD}$, полагая $|\text{Der } \mathcal{G}(n)| = \text{der}_p \mathcal{G}$ и $\text{sgn } \text{Der } \mathcal{G}(p) = \text{sgn}(|\sigma_p^- \mathcal{G}|)$ для любого простого $p \geq 0$. Кодировкой нулевой полигруппы считается постоянная, принимающая значение $+\infty$. Кодировки $\text{Alt } \mathcal{G}$ и $\text{Der } \mathcal{G}$ называются *факторными кодировками полигрупп*.

Отображение f частично упорядоченных множеств называется *изотонным*, если оно инъективно и неравенство $x \leq y$ равносильно неравенству $f(x) \leq f(y)$ для любых x, y .

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА О КОДИРОВАНИИ ПОЛИГРУПП.

- (1) $\text{Alt}: \mathfrak{K}^* \rightarrow \mathfrak{CD}$ изотонно отображает $\mathfrak{K}^*$ на множество кодировок конечной размерности.
- (2) $\text{Der}: \mathfrak{K}_* \rightarrow \mathfrak{CD}$ изотонно отображает $\mathfrak{K}_*$ на множество ненулевых кодировок.
- (3) $\text{Alt } \mathcal{G} [\times] \mathcal{H} = \text{Alt } \mathcal{G} \dot{+} \text{Alt } \mathcal{H}$ для любых верхних полигрупп.
- (4) $\text{Der } \mathcal{G} \langle \times \rangle \mathcal{H} = \text{Der } \mathcal{G} \dot{+} \text{Der } \mathcal{H}$ для любых нижних полигрупп.
- (5) $\text{alt } \mathcal{G} = \|\text{Alt } \mathcal{G}\|$ для любой верхней полигруппы $\mathcal{G}$.
- (6) $\text{der } \mathcal{H} = \langle\langle \text{Der } \mathcal{H} \rangle\rangle$ для любой нижней полигруппы $\mathcal{H}$.
- (7) $\mathcal{G} \tau \mathcal{H} \iff \text{Alt } \mathcal{G} \leq \text{Der } \mathcal{H}$ для любых верхней $\mathcal{G}$ и нижней $\mathcal{H}$ полигрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для конечномерной кодировки D определим верхнюю полигруппу $\sigma(D)$ как сумму $\sigma(D) = \bigoplus_{p \geq 0} \sigma_p(D)$, где $\sigma_p(D) = \mathbb{Z}_{(p)}^{[|D(p)|]}$, если $\text{sgn } D(p) = 0$, $\sigma_p(D) = \mathbb{Z}_p^{[|D(p)|]}$, если $\text{sgn } D(p) = -$, и $\sigma_p(D) = \mathbb{Q}_p^{[|D(p)|+1]}$, если $\text{sgn } D(p) = +$.

Тогда, как нетрудно проверить с помощью формулы для p -высоты, имеет место равенство $\sigma_p(\sigma \text{ Alt } \mathcal{G}) = \sigma_p^+ \mathcal{G}$. Откуда следует, что $\text{ALT}(\sigma \text{ Alt } \mathcal{G}) = \text{ALT } \mathcal{G}$. И нетрудно проверить также, что $\text{Alt } \sigma D = D$ для любой кодировки. Таким образом, отображения $\mathcal{G} \rightarrow \text{Alt } \mathcal{G}$ и $D \rightarrow \sigma D$ являются взаимно обратными биекциями между верхней алгеброй Кюннета и конечномерной кодовой решеткой.

Условие сохранения порядка, в силу критерия факторов, достаточно проверить для бокштейновских моногрупп. Все возможные значения p -фактора Бокштейна представляют собой линейно упорядоченное множество моногрупп, которое в порядке возрастания выстраивается в следующую последовательность: $\mathbb{Z}_{(p)}^{[0]}, \mathbb{Z}_{(p)}^{[1]}, \mathbb{Q}_p^{[2]}, \mathbb{Z}_p^{[2]}, \mathbb{Z}_{(p)}^{[2]}, \mathbb{Q}_p^{[3]}, \mathbb{Z}_p^{[3]}, \mathbb{Z}_{(p)}^{[3]}, \dots$. Эта последовательность посредством Alt переводится в выстроенную в порядке возрастания последовательность триплетов $0, 1, 1^+, 2^-, 2, 2^+, 3^-, 3, \dots$. То есть порядок сохраняется. Таким образом, доказан первый пункт теоремы.

Второй доказывается аналогично. При этом формула для отображения, обратного к Der , такая же, как для обратного к Alt , только иначе определяется значение $\sigma_p D$ в случае, если $\text{sgn } D(p) \neq 0$, а именно, $\sigma_p D = \mathbb{Z}_p^{[|D(p)|]}$, если $\text{sgn } D(p) = +$, и $\sigma_p(D) = \mathbb{Q}_p^{[|D(p)|-1]}$, если $\text{sgn } D(p) = -$.

Равенство $\text{Alt } \mathcal{G} \mathcal{H} = \text{Alt } \mathcal{G} [+] \text{Alt } \mathcal{H}$ выводится из теоремы о факторе произведения перебором всех вариантов факторов сомножителей. То же самое относится к равенству $\text{Der } \mathcal{G} \mathcal{H} = \text{Der } \mathcal{G} [+) \text{Der } \mathcal{H}$.

Докажем теперь последний пункт теоремы – триплетный критерий совместимости. Пусть $\text{Alt } \mathcal{G} \leq \text{Der } \mathcal{H}$. Согласно факторному критерию совместимости нужный результат вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА. *Верхняя и нижняя бокштейновские моногруппы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ одинаковой факторности совместимы тогда и только тогда, когда $\text{Alt } \mathcal{G} \leq \text{Der } \mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все возможные случаи. *Первый случай.* Пусть $\text{Alt } \mathcal{G}(p) = n$ регулярно, тогда $G_n = \mathbb{Z}_{(p)}$. Если $\text{Der } \mathcal{H}(p) = n$, то $H_m = 0$ при $m < n$, и условие совместимости выполняется. Если же $\text{Der } \mathcal{H}(p) = n^-$, то $H_{n-1} = \mathbb{Q}_p$ и $G_n \otimes H_{n-1} \neq 0$, т.е. совместимости нет. Таким образом, минимальное значение $\text{Der } \mathcal{H}$, при котором имеется совместимость $\mathcal{G} \tau \mathcal{H}$, равно в этом случае n , т.е. совпадает с $\text{Alt } \mathcal{G}(p)$.

Второй случай. Пусть теперь $\text{Alt } \mathcal{G}(p) = n^-$. Тогда $G_n = \mathbb{Z}_p$. Если $\text{Der } \mathcal{H}(p) = n^-$, то $H_{n-1} = \mathbb{Q}_p$. Тогда условия совместимости выполнены, ибо $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Q}_p = 0$. Если же $\text{Der } \mathcal{H}(p) = (n-1)^-$, то $H_{n-1} = \mathbb{Z}_p$, и условие совместимости не выполнено, ибо $G_n \otimes H_{n-1} \neq 0$.

Последний случай $\text{Alt } \mathcal{G}(p) = n^+$. Тогда $G_{n+1} = \mathbb{Q}_p$. Если $\text{Der } \mathcal{H}(p) = n^+$, то $H_n = \mathbb{Z}_p$. Здесь совместимость имеется. Если же $\text{Der } \mathcal{H}(p) = n$, то $H_n = \mathbb{Z}_{(p)}$, и неравенство нулю произведения $G_{n+1} \otimes H_n$ приводит к несовместимости $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$. Что и завершает доказательство леммы.

Коэффициентные нормы

Пусть теперь G – некоторая абелева группа. Определим *верхнюю G -норму* $\|D\|_G$ кодировки D как G -высоту полигруппы, факторная кодировка которой совпадает с D . Непосредственно из этого определения, в силу коэффициентной монотонности, получаем следующее свойство:

Монотонность G -нормы. Если $C \leq D$, то $\|C\|_G \leq \|D\|_G$.

Сопоставление правил кодирования с формулами коэффициентных высот из второго параграфа дает следующие результаты.

ФОРМУЛЫ ОСНОВНЫХ G -НОРМ. Для любой D справедливы равенства:

- (1) $\|D\|_{\mathbb{Q}} = D(0)$;
- (2) $\|D\|_{\mathbb{Z}_p} = |D(p)|$;
- (3) $\|D\|_{\mathbb{Q}_p} = \lfloor D(p) \rfloor$;
- (4) $\|D\|_{\mathbb{Z}_{(p)}} = \max\{\lceil D(p) \rceil, D(0)\}$.

ТЕОРЕМА КУЗЬМИНОВА. Для всякой абелевой группы G и всякого натурального $n > 1$ существует такая кодировка T_G^n размерности n (называемая *пробной*), что для любой кодировки D положительной размерности $\leq n$ выполнено равенство:

$$\|D \{+ \} T_G^n\| = n + \|D\|_G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала G принадлежит системе Бокштейна. Из формул сложения с минимальными кодами и приведенных выше формул основных G -норм получаются следующие результаты. $T_{\mathbb{Z}_{(p)}}^n = M^{(n,p)}$, $T_{\mathbb{Z}_p}^n = M^{(n^-,p)}$, $T_{\mathbb{Q}_p}^n = M^{((n-1)^+,p)}$ и $T_{\mathbb{Q}}^n = M^{(n,0)}$.

Наконец, для произвольной группы G пробная кодировка T_G^n определяется как $\sup\{T_{\sigma_p G}^n \mid p \geq 0\}$. Тогда при любом $p \geq 0$ имеем $T_G^n(p) \{+ \} D(p) = T_{\sigma_p G}^n \{+ \} D(p) = n + \|D\|_{\sigma_p G}$, и потому $\|D + T_G^n\| = n + \max_{p \geq 0} \|D\|_{\sigma_p G} = n + \|D\|_G$, что и требовалось доказать.

Глава 2. Топология

§ 4. Теория экстмерности

В этом параграфе пространства по умолчанию сепарабельны и метризуемы, а комплексы счетны и метризуемы. Поскольку всякий счетный CW-комплекс гомотопически эквивалентен метризуемому, а возможность продолжения отображений определяется гомотопическим типом, постольку предположение метризуемости рассматриваемых комплексов не уменьшает общности полученных результатов.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКСТМЕРНОСТИ КОМПОНЕНТ. Если любая компонента связности компакта X экстенсивна по отношению к комплексу K , то и сам компакт также K -экстенсивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано частичное отображение f компакта X в K . Для любой компоненты C зафиксируем продолжение f_C отображения f на окрестность OC этой компоненты. Не ограничивая общности, можем предполагать OC открыто-замкнутой. Пусть $OC_1, OC_2, \dots, OC_n$ образуют покрытие X . Тогда искомое продолжение f на X можно построить, полагая $f(x)$ равной $f_{C_i}(x)$, где i – наименьшее, для которого $x \in OC_i$.

ТЕОРЕМА СЧЕТНОЙ СУММЫ [20]. Если пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых подпространств X_i , экстенсивных по отношению к некоторому полиэдру L , то и $X \tau L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано отображение $f: A \rightarrow L$ замкнутого подмножества $A \subset X$. Тогда в силу свойства $X_1 \tau L$ его можно распространить на X_1 . Ввиду того, что L является абсолютным окрестностным ретрактом, отображение можно распространить также на некоторую замкнутую окрестность объединения, обозначаемую Y_1 . Тогда Y_1 содержит во внутренности объединение $A \cup X_1$, и имеется отображение $f_1: Y_1 \rightarrow L$, продолжающее f . Применяя ту же процедуру к f_1 и X_2 , строим замкнутую окрестность Y_2 объединения $Y_1 \cup X_2$ и отображение $f_2: Y_2 \rightarrow L$, продолжающее f_1 . Продолжая процесс далее, строим последовательность замкнутых множеств Y_i и их отображений f_i так, что $Y_{i+1} \supset Y_i \cup X_i$ и f_{i+1} продолжает f_i . Тогда совокупность f_i определяет некоторое отображение F из X в L , продолжающее f , а его непрерывность доказывается так. Если $x \in X$, то $x \in X_k$ для некоторого k . Следовательно, некоторая окрестность Ox принадлежит Y_{k+1} . Но в таком случае F совпадает на Ox с f_{k+1} , которое непрерывно. Значит и F непрерывно в x .

ε -непрерывность. Для отображения f его колебание в точке x обозначается $\text{osc}_x f$ и определяется как предел диаметров образов ε -окрестностей точки x при ε , стремящемся к нулю. Через $\text{osc } f$ обозначается верхняя грань колебаний функции f по всем точкам ее области определения.

Функция, имеющая колебание $< \varepsilon$, называется ε -непрерывной.

Гомотопическим диаметром метрики на некотором пространстве M назовем нижнюю грань тех ε , для которых существуют ε -близкие негомотопные отображения в M какого-либо пространства. **Гомотопическим радиусом** метрики, имеющей положительный гомотопический диаметр, назовем верхнюю грань таких ε , что любое ε -непрерывное отображение в пространство M находится на расстоянии, меньшем трети гомотопического диаметра M , от некоторого непрерывного отображения.

ЛЕММА О МЕТРИКЕ. На всяком локально-компактном метризуемом ANR-пространстве K существует согласованная с топологией метрика ρ положительного гомотопического радиуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем вложение K в гильбертово пространство и ретракцию $r: OK \rightarrow K$ некоторой его окрестности. Выберем столь мелкое локально конечное открытое покрытие $\omega = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства K , чтобы всякий его элемент U_i содержался в OK вместе со своей выпуклой оболочкой и имел компактное замыкание. Пусть φ_i – подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Пусть dist – метрика, индуцированная из гильбертова пространства. Рассмотрим метрику ρ , определяемую формулой $\rho(x, y) = \text{dist}(x, y) + \sum_{i \in I} |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|$. Гомотопический

диаметр этой метрики не меньше единицы. Действительно, если две точки находятся на ρ -расстоянии меньше чем 1, то они принадлежат одному и тому же элементу покрытия, и потому отрезок, соединяющий их, лежит в OK , и, ретрагируя его на K , получаем путь, соединяющий эти точки и непрерывно от них зависящий. Для выполнения второго условия выберем столь мелкое локально конечное покрытие $\omega' = \{V_a\}_{a \in A}$, звездно вписанное в ω , чтобы образ выпуклой оболочки любой звезды $St(x, \omega')$ при ретракции r имел ρ -диаметр меньше чем $1/4$. Пусть ψ_a подчиненное ω' разбиение единицы. Определим метрику ρ' , полагая $\rho'(x, y) = \rho(x, y) + \frac{1}{4} \sum_{a \in A} |\psi_a(x) - \psi_a(y)|$. Тогда гомотопический диаметр ρ' также больше единицы и всякое множество ρ' -диаметра меньшего $1/4$ содержится в какой-то ω' -звезде.

Пусть $f: X \rightarrow M$ – какое-то $1/6$ -непрерывное отображение относительно ρ' . Для точки $x \in X$ обозначим через $[f](x)$ пересечение замыканий образов $\bigcap [f(U)]$, где U пробегает все окрестности точки x . Мнозначное отображение $[f]$ полунепрерывно сверху, и образы точек y этого отображения компактны и имеют диаметр $< 1/6$. Выпуклую оболочку компакта $[f](x)$ обозначим через $\langle f \rangle(x)$. Тогда выпуклозначное отображение $\langle f \rangle$ также полунепрерывно сверху, имеет диаметры r -образов меньше чем $1/6$ и по теореме фон Неймана как угодно близко аппроксимируется непрерывными однозначными отображениями. Пусть F – столь близкая его аппроксимация, что $rF(x)$ лежит на ρ' -расстоянии от $r(\langle f \rangle(x))$, меньшем $1/6$. Тогда $\rho'(F(x), f(x)) < 1/6 + 1/6 = 1/3$. Таким образом, гомотопический радиус ρ' больше либо равен $1/4$. И лемма полностью доказана.

ЛЕММА ВОЛША [36]. Пусть $f: A \rightarrow K$ – отображение произвольного подмножества пространства X в метризуемый локально компактный ANR. Тогда найдется такое отображение $g: U \rightarrow K$ открытого множества $U \subset X$, ограничение которого на A гомотопно f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем на K метрику положительного гомотопического радиуса r и диаметра d . Множество $F = \{x \in X \mid \text{osc}_x f \geq r\}$ замкнуто. Пусть A' представляет собой разность замыкания A и F . Доопределим f в точках $x \in A'$, выбирая $f(x)$ из множества $[f](x)$ на основании аксиомы произвольного выбора. При таком доопределении отображения f его колебания не меняются, оставаясь меньше гомотопического радиуса. Поэтому найдется непрерывное отображение $g': A' \rightarrow K$, которое $d/3$ -близко к f , и потому ему гомотопно. Множество A' замкнуто в XF , и потому найдется некоторое открытое в XF , а значит, и в X , множество U , на которое непрерывно продолжается g' . Это продолжение и является искомым g .

Следующая теорема, по существу, содержится у Волша [36].

ТЕОРЕМА О МОНОТОННОСТИ ЭКСТМЕРНОСТИ. Если сепарабельное метрическое пространство X экстенсивно по отношению к комплексу L и $X' \subset X$, то и $X' \tau L$, если или X' открыто, или L метризуем и локально компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X' замкнуто, то это очевидно. Если X' открыто, то оно является объединением счетного числа замкнутых, и L -экстенсивность его вытекает из теоремы счетной суммы. Пусть теперь X' – любое подмножество и дано отображение $f: A \rightarrow L$ некоторого его замкнутого подмножества. По лемме Волша найдется такая открытая окрестность OA , на которую продолжается отображение, гомотопное отображению f . Пусть A' является пересечением замыкания A с дополнением к

ОА. Тогда разность замыкания A и множества A' замкнута в открытом множестве $X \setminus A'$. В силу монотонности экстерности по открытым множествам отсюда вытекает возможность продолжить отображение, гомотопное f , на множество $X \setminus A'$, которое содержит X' . Что и требовалось.

Джойн. Через $M * N$ обозначается джойн комплексов M и N . То есть фактор-пространство произведения $M \times [0, 1] \times N$ по отношению $(x, t, y) \simeq (x', t, y')$, если $t = 0$ и $y = y'$ или если $t = 1$ и $x = x'$. Таким образом, нижнее основание джойна $t = 0$ гомеоморфно M , а верхнее — N . Мы в дальнейшем нередко будем отождествлять M и N с его основаниями. Имеются естественные отображения $\pi: M * N \rightarrow [0, 1]$ — *уровневая проекция*, $\pi_M: M * N \rightarrow M$ — *нижняя проекция* и $\pi_N: M * N \rightarrow N$ — *верхняя проекция*.

ТЕОРЕМА УРЫСОНА–ДЫДАКА [24]. Если сепарабельное метрическое пространство X представлено в виде объединения двух подпространств $X = X_1 \cup X_2$, из которых первое экстенсивно относительно комплекса M , а второе относительно N , то $X \tau M * N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны замкнутое множество $A \subset X$ и отображение $f: A \rightarrow M * N$. Пусть $X'_1 = X_1 f^{-1}N$ и $X'_2 = X_2 f^{-1}M$. Обозначим через f_1 отображение, непрерывно продолжающее на X'_1 композицию $\pi_M f$, а через f_2 — продолжающее $\pi_N f$ на X'_2 . Такие существуют в силу монотонности экстерности. Лемма Волша позволяет считать отображения f_i определенными на открытых окрестностях $O_i \supset X'_i \cup A$. Тогда $O_1 \cup O_2 = X$ и дополнения до множеств O_i являются замкнутыми непересекающимися множествами. Пусть $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ — функция Урысона, принимающая значение 0 на дополнении к O_2 и 1 на дополнении к O_1 , которая на A совпадает с πf . Тогда искомое продолжение задается формулой $x \rightarrow (f_1(x), \varphi(x), f_2(x))$.

Частичным отображением пространства мы называем отображение его замкнутого подмножества. Последовательность частичных отображений f_n компакта X в комплекс L называем *представительной*, если для любого подкомпакта $X' \subset X$, на который продолжимы все частичные отображения этого семейства, выполнено условие $X' \tau L$.

ЛЕММА О ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Для любых компакта X и комплекса L существует представительная последовательность $\{f_n: X \rightarrow L\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какую-то аддитивную (т.е. замкнутую по конечным объединениям) счетную базу открытых множеств $\{U_i\}$ компакта X . Для i -го элемента базы выберем последовательность отображений $f_{ij}: [U_i] \rightarrow L$, представляющую все гомотопические классы отображений из его замыкания в рассматриваемый комплекс. Тогда совокупность всех $\{f_{ij}\}$ будет представительной. Действительно, для любого компакта $X' \subset X$, любого его частичного отображения $g: X'' \rightarrow L$ это отображение продолжится на окрестность, а всякая окрестность компакта содержит в себе меньшую, принадлежащую аддитивной базе, поэтому g окажется продолженным на некоторое U_i и, значит, гомотопным некоторому f_{ij} , а раз последнее продолжается на X' , то и g туда продолжается по лемме Борсука.

Пусть $f: A \rightarrow L$ и $g: B \rightarrow K$ – два частичных отображения компакта X . Назовем *соединяющим* всякое отображение $\varphi: A \cup B \rightarrow L * K$, которое удовлетворяет условиям $f = \pi_L \varphi$ и $g = \pi_K \varphi$.

ЛЕММА О СОЕДИНЯЮЩЕМ ОТОБРАЖЕНИИ. *Для любых двух частичных отображений $f: A \rightarrow L$ и $g: B \rightarrow K$ компакта X существует соединяющее отображение, и любые два соединяющих отображения гомотопны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, можем предполагать отображения f и g определенными на открытых окрестностях OA и OB множеств A и B . Зафиксируем функцию Урысона $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ для пары $A \setminus OB$ и $B \setminus OA$, принимающую на первом значении 0, а на втором 1. Тогда соединяющее отображение может быть задано формулой $x \rightarrow (f(x), \varphi(x), g(x))$. Эта формула корректно определяет отображение в джойн, ибо там, где не определено $f(x)$, будет $\varphi(x) = 1$, и потому значение отображения определяется уже одним $g(x)$. Аналогичное имеет место в случае, когда не определено $g(x)$. Если имеются два соединяющих отображения α_0 и α_1 , то гомотопия α_t между ними проходит также через соединяющие отображения, а потому для ее задания достаточно указать уровневую проекцию, которая задается формулой $\pi \alpha_t = t \alpha_1 + (1 - t) \alpha_0$.

Следующая теорема, доказанная Дранишниковым [37], является экстерным аналогом теоремы Эйленберга.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕНБЕРГА–ДРАНИШНИКОВА. *Если джойн комплексов $K * L$ ко-экстенсивен пространству X , то любое отображение $f: X' \rightarrow K$ замкнутого в X множества может быть продолжено на дополнение к некоторому замкнутому L -экстенсивному $X'' \subset X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_i: X_i \rightarrow L$ – представительная последовательность частичных отображений компакта X в комплекс L . Пусть $f * g_1: X \rightarrow K * L$ – какое-то соединяющее отображение для f и g_1 . Тогда композиция $f_1 = \pi_K f * g_1$ определена на $X_1 = X' \cup (f * g_1)^{-1}(K)$, продолжает f и отображение g_1 продолжается на XX'_1 (а именно, продолжается посредством $\pi_L f * g_1$). Пусть OX_1 – некоторая замкнутая окрестность множества X_1 , на которую можно продолжить f_1 . Зафиксируем такое продолжение и будем его также обозначать f_1 .

Продолжаем по индукции строить растущую последовательность замкнутых множеств X_i и их замкнутых окрестностей OX_i так, чтобы $OX_{i+1} \supset X_{i+1} \supset OX_i$, и такую согласованную (т.е. значения отображений совпадают там, где они определены) систему отображений $f_i: OX_i \rightarrow K$, чтобы все отображения g_j при $j \leq i$ продолжались на XX_i .

Очередной шаг индукции подобен первому шагу. Если уже построено $f_n: X_n \rightarrow K$, то полагаем $X_{n+1} = OX_n \cup (f * g_{n+1})^{-1}(K)$ и $f_{n+1} = \pi_K f * g_{n+1}$ и после доопределяем f_{n+1} на некоторой замкнутой окрестности OX_{n+1} .

Теперь согласованная система отображений f_i определяет нам некоторое отображение F , продолжающее f , заданное на объединении окрестностей $\cup OX_i$ и непрерывное на объединении их внутренностей, обозначаемом U . Тогда $U \supset \cup X_i$, и дополнение к U экстенсивно по отношению к L , ибо на него по построению продолжают все отображения представляющей последовательности. Что и требовалось доказать.

УТОЧНЕНИЕ. При тех же предположениях, что имеются в теореме Эйленберга–Дранишникова, можно дополнительно добиться, чтобы X'' не пересекало любого наперед заданного K -экстенсивного сигма-компактного множества Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Z = \bigcup Z_i$, где Z_i компактны, то можно при построении очередного X_i к нему добавлять Z_i , ведь нет препятствий для продолжения f_i на Z_i .

В случае, когда один из комплексов в теореме Эйленберга–Дранишникова является нульмерной сферой, получаем следствие, которое позволяет доказать, что экстраординарная теория, порожденная комплексом, удовлетворяет аксиоме границы.

ТЕОРЕМА О ПЕРЕГОРОДКЕ. Если компакт X экстенсивен по отношению к надстройке ΣK некоторого комплекса, то для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ найдется такое открытое множество U , что $A \subset U$, B лежит в дополнении замыкания множества U и граница U является K -экстенсивной.

Экстмерная теорема о пополнении, доказанная Ольшевским [26], существенно труднее теоремы Л. А. Тумаркина для обычной размерности и играет в теории экстмерности большую роль.

ТЕОРЕМА ОЛЬШЕВСКОГО. Для любого сепарабельного метрического пространства X , экстенсивного по отношению к счетному комплексу K , найдется такое пополнение $\tilde{X}$, что $\tilde{X} \tau K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображения f через $D(f)$ обозначаем область его определения. Нам придется здесь иметь дело с отображениями, имеющими различные области определения. В связи с этим уточним, что никакие отображения, имеющие различные области определения, не будут считаться гомотопными.

Считаем, что X является подпространством гильбертова куба Q . Зафиксируем на Q аддитивную счетную базу открытых множеств $\mathcal{B}$. Пару множеств из $\mathcal{B}$ мы будем называть *допустимой*, если замыкание меньшего множества содержится во внутренности большего.

Для каждого элемента базы зафиксируем по представителю из каждого гомотопического класса отображений этого элемента в K . Для каждого такого представителя $f: B \rightarrow K$ зафиксируем некоторую окрестность пространства X , на которую можно продолжить отображение f , и само продолжение f' . Так что $D(f') \supset B$ и $X \subset \text{int } D(f')$. Счетное множество всех таких продолжений обозначим через $K^{\mathcal{B}}$.

Отображение, определенное на некоторой окрестности пространства X , будем называть *надотображением* пространства X .

Пусть дано надотображение $f: OX \rightarrow K$ нашего пространства и две допустимые пары множеств $V \subset U$ и $C \subset D$. Мы будем говорить, что f *совместимо* с этой парой пар, если $D \cap V \subset OX$. И, наконец, скажем, что отображение $g: C \cap U \rightarrow K$ *согласовано* с f , если его ограничение на $C \cap V$ совпадает с f .

Для отображения $f: OX \rightarrow K$ и совместимой с ним пары допустимых пар множеств $V \subset U, C \subset D$ и согласованного отображения $g: C \cap U \rightarrow K$ определим *перестройку* отображения f посредством пятерки V, U, C, D, g как любое отображение $f': O'X \rightarrow K$ некоторой окрестности пространства X , которое на $C \cap U$ совпадает с g ,

а на $(OX \cap V) \cup (OX \text{ int } D)$ совпадает с f . Возможность перестройки доказывается ввиду замкнутости $(V \cap OX) \cup (OX \text{ int } D) \cup (U \cap C)$ в $OX \cup \text{int } D$, которая в свою очередь вытекает из условия совместимости.

Систему надотображений $\mathcal{F}$ пространства X в комплекс K назовем *перестраиваемой*, если для любого ее элемента $f: OX \rightarrow K$, любой совместимой с ним пары допустимых пар $V \subset U, C \subset D$ и любого отображения $g: C \cap U \rightarrow K$ найдется отображение $f' \in \mathcal{F}$, которое является перестройкой отображения f относительно пятерки V, U, C, D, g' , где $g': C \cap U \rightarrow K$ – отображение, гомотопное g .

Докажем, что всякая счетная система надотображений содержится в счетной перестраиваемой системе надотображений. Действительно, для любой данной счетной системы $\mathcal{F}$ надотображений пространства X множество всех перестроек ее элементов счетно, поэтому по индукции можно построить растущую последовательность $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$ счетных систем надотображений так, чтобы $\mathcal{F}_{i+1}$ содержало перестройки всех элементов из $\mathcal{F}_i$. Тогда объединение элементов этой последовательности является, очевидно, счетной перестраиваемой системой.

Итак, пусть $\mathcal{F} = \{f_i: O_i X \rightarrow K\}$ – некоторая перестраиваемая счетная система надотображений пространства X в комплекс K , содержащая $K^{\mathcal{B}}$. Пусть $X' = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i X$. Тогда X' и будет пополнением пространства X , экстенсивным относительно K . Докажем это. Пусть дано $f: A \rightarrow K$ – частичное отображение из X' в K . В силу леммы Волша мы не ограничим общности рассуждений, если будем считать, что f определено на некотором открытом множестве U гильбертова куба. Для построения продолжения этого отображения на X фиксируем две последовательности U_i и A_i элементов базы $\mathcal{B}$ так, чтобы при любом i пары $U_i U_{i+1}$ и A_i, A_{i+1} были допустимыми, последовательность U_i была возрастающей и имела объединением U , а последовательность A_i была убывающей и имела пересечением A .

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех надотображений из X в K , которые гомотопны отображениям из $\mathcal{F}$.

По индукции строим последовательность g_i отображений из $\mathcal{G}$ так, чтобы:

- (1) $D(g_i) \supset U_i \cap A_i$,
- (2) $g_n(x) = g_{n+1}(x)$, если $x \in X' \cap ((Q \text{ int } A_n) \cup U_n)$,
- (3) $g_n(x) = f(x)$ для $x \in A_n \cap U_n$.

В качестве первого отображения g_1 возьмем любое продолжение отображения f , ограниченного на U_1 , гомотопное отображению из $K^{\mathcal{B}}$.

Если отображение g_n , удовлетворяющее перечисленным условиям, уже построено, то пара пар $U_n, U_{n+1}, A_{n+1}, A_n$ является совместимой с g_n ввиду первого условия. Ограничение отображения f на $U_{n+1} \cap A_{n+1}$ в силу третьего условия согласовано с g_n , и потому можем определить g_{n+1} как перестройку отображения g_n по пятерке $U_n, U_{n+1}, A_{n+1}, A_n, f|_{U_{n+1} \cap A_{n+1}}$. Тогда все условия выполняются и индукция продолжается. В результате последовательность g_n определяет отображение из X' в K , являющееся продолжением отображения $f|_A$. Что и требовалось доказать.

Следующая теорема Дранишникова обращает теорему Урысона–Дыдака и усиливает теорему Эйленберга–Дранишникова.

ТЕОРЕМА УРЫСОНА–ДРАНИШНИКОВА. *Если компакт X экстенсивен по отношению к джойну комплексов $K * L$, то существуют такие G_δ -множества G_1 и G_2 , что $X = G_1 \cup G_2$ и $G_1 \tau K, G_2 \tau L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_i\}$ – представительная последовательность частичных отображений из X в L . Для каждого такого отображения в силу теоремы Эйленберга–Дранишникова найдется замкнутое K -экстенсивное множество X_i , на дополнение к которому продолжается отображение f_i . Тогда объединение X_i является K -экстенсивным F_σ -множеством, а на дополнение к этому объединению продолжаются все отображения g_i , и потому все компактные (а значит, и F_σ -) подмножества в нем будут L -экстенсивны. Теперь в силу теоремы Ольшевского найдется G_δ -множество G_1 , содержащее объединение $\cup X_i$ и также K -экстенсивное. Тогда дополнение к нему согласно сделанному выше замечанию будет L -экстенсивно. Применяя к этому дополнению теорему Ольшевского, получаем искомое G_2 .

УТОЧНЕНИЕ. При условиях теоремы о разложении можно дополнительно добиться, чтобы G_1 содержало любое наперед заданное сигма-компактное K -экстенсивное множество Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все f_i можно считать содержащими Z в силу уточнения к теореме Эйленберга–Дранишникова.

§ 5. Критерий экстенсивности

Следующая теорема Дранишникова, представляющая собой половину сформулированного во введении критерия экстенсивности, играет в теории размерности роль аналогичную той, которую играет в теории гомотопий теорема Гуревича об изоморфизме первых нетривиальных групп гомотопий и гомотопий. Абелевыми мы, следуя М. М. Постникову [32], называем *гомотопически простые* пространства, т.е. пространства с тривиальным действием фундаментальной группы на гомотопиях.

ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА–ДРАНИШНИКОВА. Для абелева комплекса K полигруппа гомотопий $\pi_* K$ изофакторна полигруппе гомотопий $H_* K$, т.е. $\sigma_p \pi_* K = \sigma_p H_* K$ для любого $p \geq 0$.

Для доказательства нам потребуется как теорема Гуревича по модулю класса Серра абелевых групп, которую мы будем называть теоремой Гуревича–Серра, так и теория локализации и пополнения Сулливана [38].

Применение теоремы Гуревича–Серра по модулю класса Серра групп G , для которых $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = 0$, позволяет доказать совпадение всех гомотопических и гомологических p -факторов абелева комплекса, за исключением метарациональных. Для метарационального случая приходится применять теорию Сулливана локализации и пополнения гомотопического типа. Из этой теории получается заодно и доказательство в дорациональном случае. Поэтому перейдем к изложению результатов Сулливана.

Напомним понятие локализации гомотопического типа. Будем считать далее, что $\mathbb{Z}_{(0)} = \mathbb{Q}$, чтобы не говорить отдельно о локализации в нуле. p -локализирующим гомоморфизмом группы G называется ее гомоморфизм в $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, переводящий g в $g \otimes 1$. Группа называется p -локальной, если этот гомоморфизм является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА СУЛЛИВАНА О ЛОКАЛИЗАЦИИ. Для любых абелева комплекса K и простого $p \geq 0$ существуют комплекс $K_{(p)}$, называемый p -локализацией комплекса K , и такое отображение $l_p: K \rightarrow K_{(p)}$ (локализирующее отображение), для

которого все индуцированные гомоморфизмы всех гомотопических и гомологических групп положительных размерностей являются p -локализирующими.

Этой теоремы хватает для доказательства теоремы Гуревича–Дранишникова для дорациональных факторов. Так, для доказательства совпадения бокштейновских 0-факторов π_*K и H_*K рассмотрим 0-локализацию $l_0: K \rightarrow K_{(0)}$. Согласно теореме Гуревича первая нетривиальная гомотопическая группа у $K_{(p)}$ встречается в той же размерности n , что и гомологическая. То есть $\pi_k \otimes \mathbb{Q} = H_k \otimes \mathbb{Q} = 0$ при $k < n$ и $\pi_n \otimes \mathbb{Q} = H_n \otimes \mathbb{Q} \neq 0$. Но это означает, что $\sigma_0 H_k = \sigma_0 \pi_k = 0$ при $k < n$ и $\sigma_0 H_k = \sigma_0 \pi_k = \mathbb{Q}$ при $k = n$, что и означает равенство $\sigma_0 H_* = \sigma_0 \pi_*$. Аналогично доказывается совпадение дорациональных p -факторов. Потому что для группы G наличие ненулевого p -фактора равносильно нетривиальности произведения $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, и для любой периодической группы $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = G_p$ имеет такой же p -фактор, что и G . В случае, когда первый p -фактор Бокштейна встречается в той же размерности, что и рациональный, ибо $\sigma_p G = \sigma_p(G \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$ (лемма о факторе локализации).

Для выявления метарациональных факторов нам потребуется следующая теорема, уточняющая теорему Сулливана о том, что локальность всех гомологических групп абелева комплекса равносильна локальности всех его гомотопических групп.

ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА–СУЛЛИВАНА. *Для абелева комплекса K первая размерность n , в которой встречается не p -локальная гомотопическая группа, совпадает с первой размерностью m , в которой встречается первая не p -локальная гомологическая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть, например, $n < m$. Возьмем m -мерный остов комплекса K и добавим к нему $(m+1)$ -мерные клетки так, чтобы убить m -мерные гомологии. Полученное пространство K' имеет p -локальными все гомологии, ибо его гомологии совпадают с гомологиями K в размерностях $< m$ и равны нулю в остальных размерностях. А гомотопии этого пространства совпадают с гомотопиями комплекса K в размерностях меньше m и, в частности, в размерности n и не являются p -локальными вопреки теореме Сулливана о равносильности локальности. Если $n > m$, то мы заклеиваем все гомотопии комплекса K начиная с размерности n и получаем аналогичное противоречие.

Применение теоремы Гуревича–Сулливана позволяет доказать, что размерности появления нетривиальных p -факторов у гомотопических и гомологических групп комплекса K совпадают даже в метарациональном случае, но не позволяет определить тип этих факторов. А именно, рассмотрим p -локализованный комплекс $K_{(p)}$. Пусть q – простое число, отличное от p , тогда размерность появления первого нетривиального p -фактора совпадает с размерностью первой не q -локальной группы (ведь $\mathbb{Q}$ локальна для любого простого), и поэтому теорема Гуревича–Сулливана позволяет утверждать совпадение размерностей гомологического и гомотопического p -факторов. Для определения их типа потребуется следующая теорема Сулливана о пополнении. p -пополнение группы G – это обратный предел из факторгрупп $G/p^n G$; обозначение: $G_{[p]}$. Важно, что пополнение рациональных чисел, как и любой p -делимой группы, тривиально. В частности, тривиально оно и для $\mathbb{Q}_p$. Для $\mathbb{Z}_{(p)}$ пополнением является кольцо целых p -адических чисел, которое ему факторно эквивалентно, ибо кручения не имеет и делится на все простые числа кроме p .

ЛЕММА О ФАКТОРАХ ПОПОЛНЕНИЯ. $\sigma_q G_{[p]} = 0$ при $q \neq p$, $\sigma_p G_{[p]} = \sigma_p G$, если $\sigma_p G$ равняется $\mathbb{Z}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$, иначе $\sigma_p G_{[p]} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякий элемент $g \in G$, не делящийся на p^n для какого-то n , переходит при пополюющем гомоморфизме не в нуль, ибо не нули его образы в $G/p^m G$ при $m > n$. Порядок элемента при переходе к пополнению не меняется. Поэтому если в G наличествовали элементы бесконечного порядка, не делящиеся на p , то таковые будут и в пополнении. То есть, если $\sigma_p G = \mathbb{Z}_{(p)}$, то и $\sigma_p G_{[p]} = \mathbb{Z}_{(p)}$. Если же таковых элементов бесконечного порядка не было, а были конечного, то есть, в случае $\sigma_p G = \mathbb{Z}_p$, то тоже будет для $\sigma_p G_{[p]}$. При любом n группа $G/p^n G$ является p -группой и однозначно делима на q , поэтому и предел делим на q . В то же время в пределе нет элементов порядка q . Этого хватает для доказательства равенства $\sigma_q G_{[p]} = 0$.

ТЕОРЕМА СУЛЛИВАНА О ПОПОЛНЕНИИ. Для любого простого p и любого абелева комплекса K существует такой комплекс $K_{[p]}$, называемый p -пополнением комплекса K , все гомотопические и гомологические группы которого являются p -пополнениями соответствующих групп комплекса K .

Итак, рассмотрим p -пополнение нашего комплекса K ; применим к нему теорему Гуревича. Ввиду доказанной леммы о факторах пополнения мы получим такой результат. Первые p -факторы гомотопий и гомологий, отличные от $\mathbb{Q}_p$, совпадают как по типу, так и по месту появления. Эта информация, дополненная ранее добытой информацией о совпадении первых мест появления гомологических p -факторов, позволяет восстановить как тип, так и место появления первых гомотопических и гомологических факторов и убедиться в их совпадении.

А именно, определение типа первого p -фактора происходит по следующему алгоритму. Если места его появления в группах комплекса K и его p -пополнения не совпадают, то этот фактор есть $\mathbb{Q}_p$, иначе он совпадает с первым p -фактором пополнения.

Итак, теорема Гуревича–Дранишникова полностью доказана. Доказанная выше теорема несколько точнее доказанной Дранишниковым в [21]. То, что доказано там, в нашей терминологии соответствует совпадению высотностей гомотопической и гомологической полигрупп, т.е. их унифицированных p -факторов Бокштейна. Отметим такое следствие этой теоремы:

О ГОМОЛОГИЯХ КОМПЛЕКСОВ ЭЙЛЕНБЕРГА–МАКЛЕЙНА. Группа G факторно доминирует любую группу гомологий $H_m(K(G, n))$ комплекса Эйленберга–Маклейна.

Действительно, все нетривиальные факторы Бокштейна в группах гомотопий у комплекса Эйленберга–Маклейна появляются одновременно, ибо у него единственная нетривиальная группа гомотопий. Значит, и для гомологий это так. Что как раз и означает то, что утверждается.

ГОМОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ЭКСТЕНСИВНОСТИ. Для экстенсивности конечномерного компакта X к связному абелеву комплексу K необходимо и достаточно, чтобы при любом $n > 0$ были выполнены неравенства $\dim_{H_n(K)} X \leq n$.

Сформулированное условие равносильно, как мы знаем, совместимости полигрупп $\mathcal{H}^*(X)$ и $H_*(K)$, а в силу теоремы Гуревича–Дранишникова полигруппу гомологий можно заменить здесь на полигруппу гомотопий. Совместимость же полигрупп

$\mathcal{H}^*(X)$ и $\pi_*(K)$ расщепляется как цепочка неравенств $\dim_{\pi_n K} X \leq n$ для любого n . Поэтому достаточность гомологического условия экстенсивности следует из гомотопического.

ГОМОТОПИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТЕНСИВНОСТИ. *Если для конечномерного компакта X при любом натуральном n выполнены неравенства $\dim_{\pi_n K} X \leq n$, то $X \tau K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано отображение $f: A \rightarrow K$ какого-то замкнутого множества $A \subset X$. Рассмотрим систему Постникова комплекса K и будем по индукции строить продолжения отображений $i_n f$ (где $i_n: K \rightarrow K^{(n)}$ – канонические отображения) в комплексы $K^{(n)}$ – элементы этой системы. Для $n = 1$ имеем: $K^{(1)}$ имеет тип комплекса Эйленберга–Маклейна $K(\pi_1(K), 1)$, и продолжение возможно в силу того, что $\dim_{\pi_1} X \leq 1$. Если уже построено отображение $f_n: X \rightarrow K^{(n)}$, продолжающее $i_n f$, то рассмотрим расслоение Серра $p_n: K^{(n+1)} \rightarrow K^{(n)}$. У нас уже имеется отображение $i_{n+1} f: A \rightarrow K^{(n+1)}$, накрывающее отображение $i_n f: A \rightarrow K^{(n)}$ так, что $p_n i_{n+1} f = i_n f$. Попробуем продолжить это поднятие до отображения f_{n+1} такого, что $p_n f_{n+1} = f_n$. Слое отображения p_n служит комплекс Эйленберга–Маклейна $K(\pi_{n+1} K, n+1)$. Единственное возникающее при этом препятствие лежит в когомологиях $H^{n+2}(X, A, \pi_{n+1} K)$. Но эта группа нулевая ввиду условия $\dim_{\pi_{n+1} K} X \leq n+1$. Таким образом, отображение f_{n+1} можно построить. Так, построим отображение f_N для $N > \dim X$. Но отображение i_N является гомотопической эквивалентностью до размерности N , и потому найдется отображение $F: X \rightarrow K$, ограничение которого на A совпадает с f , а композиция $i_N F$ гомотопна F . Это F и есть то, что надо было построить.

Доказательство необходимости. Перейдем к доказательству необходимости гомологического условия в критерии экстенсивности. Для пространства X через $\mathrm{SP}^n X$ обозначается его n -я *симметрическая степень*, т.е. факторпространство его n -й степени по действию группы перестановок координат. Элементы SP^n – такие наборы точек пространства X с кратностями, что сумма кратностей равна n . Если в X отмечена точка, то SP^n можно вложить в SP^{n+1} отображением, которое увеличивает на единицу кратность отмеченной точки. Возникающий при этом прямой предел из SP^n называется *бесконечной симметрической степенью* $\mathrm{SP}^\infty X$ пространства X .

Следующее рассуждение принадлежит Дранишникову [21].

ЛЕММА О СИММЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ. *Если компакт X экстенсивен по отношению к комплексу K , то $X \tau \mathrm{SP}^\infty K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: A \rightarrow \mathrm{SP}^\infty K$ – какое-то частичное отображение компакта X . Тогда образ $f(A)$, будучи компактом, лежит в некотором $\mathrm{SP}^n K$. Зафиксируем вложение K в гильбертов куб Q . Воспользовавшись тем фактом, что $\mathrm{SP}^n Q$ является абсолютным ретрактом, продолжим отображение f до отображения $F: X \rightarrow \mathrm{SP}^n Q$. Пусть $G(F) = \{(x, y) \in X \times Q \mid y \in F(x)\}$ (здесь принадлежность точки из Q к элементу из $\mathrm{SP}^n Q$ трактуется как ее ненулевая кратность). Проекция произведения конечнократно отображает $G(F)$ на X и в силу леммы о конечнократных отображениях из § 7 получаем, что $G(F) \tau K$. Обозначим через $G(A)$ пересечение $G(F)$ и $A \times Q$. Тогда $G(A)$ при проектировании на Q попадает в K . Продолжим это

отображение до отображения $\Phi: G(F) \rightarrow K$. Через $SP^n \Phi$ обозначим индуцированное им отображение симметрических степеней. Тогда композиция $SP^n \Phi F$ является искомым продолжением.

Следующая неэлементарная теорема представляет основной аргумент в доказательстве критерия экстенсивности в части необходимости.

ТЕОРЕМА ДОЛЬДА–ТОМА [39]. *Для любого комплекса K его бесконечная симметрическая степень $SP^\infty K$ имеет слабый гомотопический тип произведения комплексов Эйленберга–Маклейна $\prod K(H_n(K), n)$.*

Пусть компакт X экстенсивен к комплексу K . Тогда в силу леммы о симметрической степени $X \tau SP^\infty K$. В силу теоремы Дольда–Тома получаем, что $X \tau \prod K(H_n(K), n)$. Откуда получаем, что $X \tau K(H_n(K), n)$ при любом n . Следовательно, $\dim_{H_n(K)} X \leq n$ для любого n . Что и требовалось доказать.

§ 6. Размерность и связность

Кюннетовское представление связностной алгебры. *Комплекс по умолчанию означает связный пунктированный, счетный клеточный комплекс с топологией Уайтхеда. Гомологии – приведенные гомологии. Через $K \vee L$ обозначается букет комплексов, а через $K \wedge L$ – приведенное произведение (smash-product), т.е. $K \wedge L = K \times L / K \vee L$.*

Полигруппа целочисленных сингулярных приведенных гомологий комплекса K обозначается $H_*(K)$. Она является нижней полигруппой для связного комплекса. Обозначим через $\text{Cin } K$ триплетную последовательность $\text{Der } H_*(K)$ и назовем ее *связностным кодом* комплекса K .

ТЕОРЕМА. *Отображение, сопоставляющее связному абелеву комплексу полигруппу его приведенных гомологий, индуцирует изоморфизм между связностной алгеброй и нижней алгеброй Кюннета.*

Доказательство основано на трех соображениях:

- (1) $H_*(K \wedge L) = H_*K \langle \times \rangle H_*L$;
- (2) $\text{cin } K = \text{der } H_*K$;
- (3) для всякой нижней полигруппы $\mathcal{G}$ глубины больше единицы найдется такой односвязный K , что $H_*K = \mathcal{G}$.

Первое утверждение представляет собой формулу Кюннета для гомологий, а второе – определение. В качестве K для третьего утверждения годится букет комплексов Мура $M(G_k, k)$.

Пусть $\text{DER } H_*K \neq \text{DER } H_*L$, тогда $\text{Der } H_*K \neq \text{Der } H_*L$. В силу теоремы о тестировании найдется такая кодировка C , что $\langle\langle \text{Der } H_*K \langle + \rangle C \rangle\rangle \neq \langle\langle \text{Der } H_*L \langle + \rangle C \rangle\rangle$. Причем C можно считать имеющей связность больше единицы, просто увеличив ее на 1, если необходимо. В силу теоремы кодирования полигрупп $C = \text{Der } \mathcal{G}$ для некоторой полигруппы G . Пусть M – такой комплекс, что $H_*M = \mathcal{G}$. Тогда $\text{cin } M \wedge K \neq \text{cin } M \wedge L$, и, следовательно, $\text{CIN } K \neq \text{CIN } L$.

Обратно, пусть $\text{CIN } K \neq \text{CIN } L$. Тогда $\text{cin } M \wedge K \neq \text{cin } M \wedge L$ для некоторого M . Откуда $\text{der}(H_*M \langle \times \rangle H_*K) \neq \text{der}(H_*M \langle \times \rangle H_*L)$, и, следовательно, $\text{DER } H_*K \neq \text{DER } H_*L$.

Изотонность отображения H_* вытекает из формулы $H_*(K \wedge L) = H_*K \oplus H_*(L)$. Если комплекс L односвязен, то произведение $L \times K(G_1, 1)$ абелево и имеет гомотопии $G_1^{(1)} \oplus \pi_*(L)$. Но $\text{Alt } \pi_*(L) = \text{Alt } H_*(L)$ в силу теоремы Гуревича–Дранишникова. Поэтому $\text{Alt}(G_1^{(1)} \oplus \pi_*(L)) = \text{Alt}(G_1^{(1)} \oplus H_*(L))$. А так как $H_*(L)$ по доказанному выше может представлять любую полигруппу глубины > 1 , то $G_1^{(1)} \oplus H_*(L)$ может представлять любую нижнюю полигруппу. Таким образом, установлена сюръективность гомотопий.

Итак, гомотопии индуцируют биективное изотонное соответствие между $\mathfrak{K}_*$ и $\mathfrak{EN}$, сохраняющее операцию. Теорема доказана.

Кодирование размерности. Когомологический размерностный тип компакта X кодируется высотным типом его тотальных когомологий, который по теореме о триплетном представлении представляется триплетной последовательностью, обозначаемой $\text{Dim } X$ и называемой *размерным кодом* компакта X .

Прежде всего, отметим, что для непустого конечномерного компакта полигруппа его тотальных когомологий является верхней полигруппой. Если компакт нульмерен, то никаких когомологий в положительных размерностях у него нет и его полигруппа тотальных когомологий тривиальна. Для общего случая нужно нам утверждение вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА ОБ ОДНОМЕРНЫХ КОГОМОЛОГИЯХ. *Для любого компакта X положительной размерности и любого замкнутого $A \subset X$ группа $H^1(X, A)$ факторно эквивалентна $\mathbb{Z}$ и не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, $H^1(X, A)$ не имеет кручения. Действительно, пусть $z \in H^1(X, A)$ имеет порядок n . Пусть $f: X \rightarrow S^1$ – отображение, представляющее z (для которого $f(A)$ одноточечно). Пусть $g: S^1 \rightarrow S^1$ – возведение в степень n . Тогда по предположению композиция gf гомотопна нулю гомотопией, фиксированной на A . Но g – накрытие и гомотопию можно поднять. Что и даст стягивание в точку для f .

Итак, $H^1(X, A)$ не имеет кручения. Обозначим через $C(A)$ конус над A и будем считать, что $C(A) \cup X = A$ является основанием этого конуса. Напишем отрезок точной последовательности пары $C(A) \cup X, X$, заменяя $H^1(C(A) \cup X, X)$ на эквивалентное ему $H^1(\Sigma A) = H^0(A)$ и $H^1(C(A) \cup X)$ на $H^1(X, A)$:

$$H^0(A) \rightarrow H^1(X, A) \rightarrow H^1 X \rightarrow 0.$$

Так как группа $H^0(A)$ свободна, а $H^1(X)$ не имеет кручения при тензорном умножении на любую группу G , точность последовательности сохранится, и мы получаем, что нетривиальность $G \otimes H^0(A)$ влечет нетривиальность $G \otimes H^1(X, A)$. То есть $H^1(X, A)$ тензорно эквивалентна $\mathbb{Z}$ и, не имея кручения, будет и факторно эквивалентна $\mathbb{Z}$.

КОДИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ ЭКСТЕНСИВНОСТИ. *Для любого конечномерного компакта X и абелева комплекса K условие $X \tau K$ равносильно неравенству $\text{Dim } X \leq \text{Cin } K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\text{Dim } X \leq \text{Cin } K$, как мы знаем из теоремы о кодировании полигрупп, равносильно совместимости $\mathcal{H}^*(X)$ и $H_*(K)$. А это условие расшифровывается, в силу высотного критерия совместимости, как совокупность неравенств $\text{alt}_{H_n(K)} \mathcal{H}^*(X) \leq n$, которая, в свою очередь, равносильна цепочке $\dim_{H_n(K)} X \leq n$, что равносильно экстенсивности X и K согласно критерию Дранишникова.

Теорема реализации

Минимальные компакты. Первые компакты с непостоянным размерностным кодом – знаменитые понтрягинские поверхности [6] – имели коды типа $D(q) = 1$ при $q \neq p$ и $D(p) = 2^-$. Их n -мерными аналогами естественно считать компакты (n^-, p) -минимального размерностного кода ($n > 1, p > 0$). Поэтому мы будем называть их *компактами Понтрягина*.

Следующий тип кода был реализован В. Г. Болтянским [8]: $D(q) = 1$ при $q \neq p$ и $D(p) = 1^+$. Компакты, размерностный код которых (n^+, p) -минимален ($n > 0, p > 0$), мы будем называть *компактами Болтянского*.

Ю. Кодама [12] построил компакты с кодом $D(q) = 1^+$ при $q \neq p, 0$ и $D(p) = D(0) = 2$. Компакты (n, p) -минимального размерностного кода ($n = |n| > 1, p \geq 0$) будем называть *компактами Кодама*. Причем компакты, реализующие $(n, 0)$ -минимальный код, называем *рациональными компактными Кодама*.

Простое число, фигурирующее в определениях этих компактов, называется их *факторностью*.

Перечисленными типами компактов исчерпываются все *минимальные* компакты. Кузьминов называл такие компакты *основными*. Он доказал [14], что через суммы этих компактов можно реализовать компакты любой кодировки. Все минимальные компакты были построены А. Н. Дранишниковым [15].

Компакт X называется *размерно-однородным*, если $\text{Dim } X' = \text{Dim } X$ для любого подкомпакта с непустой внутренностью.

Следующее предложение уточняет теорему Дранишникова о реализации размерностных типов в $\mathbb{R}^n$. Другая теорема о промежуточных экстенсивностях содержится в статье [40].

ТЕОРЕМА О ПРОМЕЖУТОЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ. *Размерно-однородный компакт X с $\langle \text{Dim } X \rangle \geq 2$ содержит подкомпакт $X(C)$ любого размерностного кода C , мажорно подчиненного $\text{Dim } X - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что условие $\langle \text{Dim } X \rangle \geq 2$ влечет двухсторонность вычитания $\text{Dim } X - 1$, в силу критерия двухсторонности из §3.

Положим $D = (\text{Dim } X - 1) \langle - \rangle C$. Пусть N, M – комплексы связностей $\text{Cin } N = D$ и $\text{Cin } M = C$. Поскольку $D \langle + \rangle C + 1 \geq \text{Dim } X$ в силу критерия экстенсивности получаем $X \tau M * N$. В силу теоремы о разложении имеем $X = Y \cup Z$, где $Y \tau N, Z \tau M$ и $Y = \bigcup Y_i$, где все Y_i – компакты. Пусть $B = \sup \text{Dim } Y_i$. Тогда $B = C$. Действительно, мы знаем, что $X_i \tau N$, и потому в силу критерия экстенсивности имеем неравенство $\text{Dim } X_i \leq C$ при любом i . Откуда $B \leq D$. Если же предположить, что $B < D$, то в силу экстенсивной теоремы счетной суммы получим $Y \tau K$ для абелева комплекса K связности $\text{Cin } K = B$. Но тогда в силу теоремы Урысона–Дыдака получим $X \tau K * M$, и в силу критерия экстенсивности $\text{Dim } X \leq B \langle + \rangle D + 1$. Откуда $B \langle + \rangle D \geq \text{Dim } X - 1$,

что противоречит минимальности разложения $\text{Dim } X - 1 \langle \Rightarrow \rangle C \langle + \rangle D$, вытекающего из условия $C \langle \leq \rangle \text{Dim } X - 1$.

Далее, заметим, что ввиду размерной однородности X то же рассуждение, примененное к X' с непустой внутренностью, показывает, что $\sup \text{Dim}(X' \cap Y_i) = C$. Фиксируем точку $x \in X$ и компакт $X(C)$ определяем как объединение последовательности компактов, индексированных простыми числами X_p , где X_p лежит в пересечении Y с $1/i$ -окрестностью точки x и $\text{Dim}_p X_p = C(p)$. При этом можем считать все X_p содержащими x . Тогда их объединение компактно и имеет нужную размерность.

В силу доказанной теоремы и критерия подчинения из §3 получаем:

РЕАЛИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДРАНИШНИКОВА. *Всякая ограниченная кодировка N является размерностным кодом некоторого компакта X , лежащего в $\mathbb{R}^n$, если $\|N\| < n - 1$.*

Компакт без промежуточной размерности

Проанализируем теперь существенность требования подчиненности в теореме о промежуточных размерностях.

Объединение n -мерного рационального компакта Кодама K_0^n с n -мерным компактом Понтрягина P_p^n факторности p ни при каком n не содержит двумерного компакта компакта Кодама K_p^2 . Действительно, предположим, что $K_p^2 \subset K_0^n \cup P_p^n$. Тогда $\text{Dim}_p(K_p^2 \cap P_p^n) \leq 2^-$, ибо рациональная размерность этого пересечения не превосходит единицы. И $\text{Dim}_p(K_p^2 \cap K_0^n) \leq 1$, ибо единична размерность $\dim_p K_0^n$. В результате получаем, что $\text{Dim}_p K_p^2 \leq 2^-$, а она должна равняться двум.

Правда, построенный пример не является размерно-однородным, но на его основе можно получить и размерно-однородный пример. Будем говорить, что компакт Z является *смесью* компактов Y и X , если любая его неодноточечная компонента связности гомеоморфна или какой-то компоненте связности компакта X , или какой-то компоненте связности компакта Y .

Мы построим ниже размерно-однородную смесь для любых компактов. Доказательство того факта, что двумерный p -факторный компакт Кодама не содержится также в рационально-понтрягинской смеси, опирается на теорему о размерности компонент и использует те же аргументы, которые были приведены выше при доказательстве того, что он не содержится в объединении понтрягинского компакта и рационального компакта Кодама.

ТЕОРЕМА О СМЕШИВАНИИ. *Для любых двух компактов X, Y существует размерно-однородный компакт Z размерности $\text{Dim } Z = \sup\{\text{Dim } X, \text{Dim } Y\}$, являющийся их смесью.*

Доказательство основано на следующей лемме.

ЛЕММА О σ -РАСШИРЕНИИ. *Для любого компакта X и любого компакта Y существует такой компакт $Z \supset X$ (его Y^σ -расширение), что $Z \setminus X$ всюду плотно в Z и является объединением последовательности непересекающихся компактов, гомеоморфных Y , с диаметрами, стремящимися к нулю, и существует ретракция $r: Z \rightarrow X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Урысона мы можем считать X лежащим в гильбертовом кубе Q в качестве нигде не плотного подмножества. Выберем в Q последовательность точек y_n , не принадлежащих X , множество частичных пределов которой совпадает с X . У каждой точки последовательности выберем столь малую окрестность Oy_n , чтобы эти окрестности не пересекались ни с X , ни между собой, а диаметры их стремились к нулю. Теперь, выбрав в каждой окрестности компакт Y_n , гомотопный Y , что возможно в силу той же теоремы Урысона, в качестве искомого Z можем взять объединение X и последовательности Y_n . Ретракцию r можно определить, отображая каждое Y_n в одну (произвольно выбранную) из ближайших к y_n точек компакта X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СМЕШИВАНИИ. По индукции строится последовательность компактов Z_n и ретракций $r_n: Z_n \rightarrow Z_{n-1}$. Полагаем $Z_0 = X$, в качестве Z_1 берем Y^σ -расширение компакта X и в качестве r_1 – ретракцию этого расширения на X . При нечетном n определяем Z_n как Y^σ -расширение, а при четном – как X^σ -расширение компакта Z_{n-1} , а в качестве r_n берем ретракцию расширения. Искомый компакт Z получается теперь как обратный предел построенной последовательности. Доказательство того, что Z является смесью компактов X и Y , основано на следующем свойстве ретракции σ -расширения $r: Z \rightarrow X$: для любого континуума $C \subset Z$ либо $r(C)$ одноточечно, либо $C \subset X$ и ограничение r на C тождественно.

Есть два случая, когда триплет с малой основой не подчиняется триплету с большой основой. Первый случай – когда большой сингулярен, а малый регулярен, и второй – когда большой имеет отрицательную сигнатуру, в то время как малый положительную.

Первому случаю соответствует разобранный нами вопрос о компактах Кодама. Второй касается нахождения компактов Болтянского в компактах Понтрягина. В связи с последним интересно было бы выяснить следующее:

ПРОБЛЕМА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ. *Существует ли компакт Понтрягина размерности 3, не содержащий никакой поверхности Болтянского?*

Теорема кодирования размерности–связности

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ ТОТАЛЬНЫХ КОГОМОЛОГИЙ. *Для любой группы G и любых компактов X, Y полигруппа $\mathcal{H}^*(X \times Y)$ почленно изофакторна верхнему произведению Кюннета $\mathcal{H}^*(X) [\times] \mathcal{H}^*(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{H}^{*'}(X)$ и $\mathcal{H}^{*'}(Y)$ полигруппы, полученные из $\mathcal{H}^*(X)$ и $\mathcal{H}^*(Y)$ сдвигом градуировки на единицу вниз. Тогда $\text{ALT } \mathcal{H}^{*'}(X) \leq \text{ALT } \mathcal{H}^*(X)$ и $\text{ALT } \mathcal{H}^{*'}(Y) \leq \text{ALT } \mathcal{H}^*(Y)$. Множество $A \subset X \times Y$ назовем *доминированным*, если полигруппа $H^*(X \times Y, A)$ почленно факторно доминируется суммой полигрупп $\mathcal{H}^*(X) \oplus \mathcal{H}^*(Y) \oplus \mathcal{H}^{*'}(X) \oplus \mathcal{H}^{*'}(Y)$.

И мы будем доказывать, что вся полигруппа $\mathcal{H}^*(X \times Y)$ почленно факторно доминируется этой же суммой полигрупп. Мы докажем для этого, что все подмножества произведения доминированы. Из этого будет вытекать неравенство $\text{ALT } \mathcal{H}^*(X \times Y) \leq \text{ALT } (\mathcal{H}^*(X) [\times] \mathcal{H}^*(Y))$. Противоположное неравенство вытекает из формулы Кюннета, так как при любом $A \subset X$ и $B \subset Y$ в силу формулы

Кюннета $H^*(X, A)H^*(Y, B) = H^*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$. То есть все слагаемые у $\mathcal{H}^*(X) [\times] \mathcal{H}^*(Y)$ являются также слагаемыми у $\mathcal{H}^*(X \times Y)$.

Основной шаг заключается в доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть даны два замкнутых подмножества A, B компакта X . Тогда $H^n(X, A \cap B)$ факторно доминируется суммой пяти групп $H^n(X, A) \oplus H^n(X, B) \oplus H^n(X, A \cup B) \oplus H^{n+1}(X, A) \oplus H^{n+1}(X, B)$.

Доказательство получается рассмотрением отрезка точной последовательности Майера–Вьеториса в силу факторного неравенства среднего члена

$$\begin{aligned} H^n(X, A \cup B) &\rightarrow H^n(X, B) \oplus H^n(X, A) \\ &\rightarrow H^n(X, A \cap B) \rightarrow H^{n+1}(X, A \cup B) \rightarrow H^{n+1}(X, A) \oplus H^{n+1}(X, B). \end{aligned}$$

Назовем n -элементарным подмножество произведения $X \times Y$, если оно представляется пересечением n множеств вида $(X \times B_i) \cup (A_i \times Y)$. Индукцией по “индексу элементарности”, основываясь на доказанной лемме, получаем, что всякое элементарное множество доминируемо. Далее, произвольное множество является пересечением последовательности элементарных, и его когомологии, являясь прямым пределом доминируемых когомологий, сами доминируемы в силу неравенства $\bigoplus_{i \in I} G_i \gg \varinjlim G_i$, вытекающего из перестановочности тензорного и периодического произведений с прямым пределом. Итак, мультипликативность тотальных когомологий доказана.

ТЕОРЕМА. Отображение, ставящее в соответствие произвольному конечномерному компакту полигруппу его тотальных когомологий, индуцирует изоморфизм между размерностной алгеброй и верхней алгеброй Кюннета.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{ALT } \mathcal{H}^*(X) \neq \text{ALT } \mathcal{H}^*(Y)$. Тогда $\text{Alt } \mathcal{H}^*(X) \neq \text{Alt } \mathcal{H}^*(Y)$ и по теореме о тестировании найдется такая кодировка C , что $\|C \vdash \text{Alt } \mathcal{H}^*(X)\| \neq \|C \vdash \text{Alt } \mathcal{H}^*(Y)\|$. В силу теоремы реализации найдется компакт Z , для которого $\text{Dim } Z = C$. Тогда в силу мультипликативности тотальных когомологий имеем $\dim(X \times Z) = \text{alt } \mathcal{H}^*(X \times Z) \neq \text{alt } \mathcal{H}^*(Y \times Z) = \dim(Y \times Z)$, и потому $\text{DIM } X \neq \text{DIM } Y$.

Обратно, если $\text{DIM } X \neq \text{DIM } Y$, то для некоторого компакта Z будет $\dim(X \times Z) \neq \dim(Y \times Z)$, откуда $\text{alt } \mathcal{H}^*(X \times Z) \neq \text{alt } \mathcal{H}^*(Y \times Z)$, а значит, и $\text{ALT } \mathcal{H}^*(X) \neq \text{ALT } \mathcal{H}^*(Y)$. Изотонность отображения $\mathcal{H}^*$ вытекает из аддитивности тотальных когомологий, т.е. равенства $\mathcal{H}^*(X \cup Y) = \mathcal{H}^*(X) \oplus \mathcal{H}^*(Y)$, справедливого, если $X \cap Y = \emptyset$. Это завершает доказательство теоремы.

Итог нашим рассмотрениям подводит следующая теорема.

ТЕОРЕМА О КОДИРОВАНИИ РАЗМЕРНОСТИ–СВЯЗНОСТИ.

- (1) $\text{Dim}: \mathfrak{DM} \rightarrow \mathfrak{CD}$ изотонно отображает $\mathfrak{DM}$ на множество кодировок конечной размерности.
- (2) $\text{Cin}: \mathfrak{CN} \rightarrow \mathfrak{CD}$ изотонно отображает $\mathfrak{CN}$ на множество ненулевых кодировок.
- (3) $\text{Dim}(X \times Y) = \text{Dim } X \vdash \text{Dim } Y$ для любых компактов.
- (4) $\text{Cin}(K \wedge L) = \text{Cin } K \langle + \rangle \text{Dep } L$ для любых комплексов.
- (5) $\dim X = \|\text{Dim } X\|$ для любого компакта X .

- (6) $\text{cin } K = \langle\langle \text{Cin } K \rangle\rangle$ для любого комплекса K .
 (7) $X \tau K \iff \text{Dim } X \leq \text{Cin } K$ для любых компакта X и комплекса K .

Глава 3. Геометрия

§ 7. Теоремы об устойчивых пересечениях

Конечнократные отображения

Классом компактов называется множество компактных подмножеств некоторого пространства. В качестве объемлющего пространства, как правило, выступает гильбертов куб.

Класс компактов называется *монотонным*, если всякое замкнутое подмножество компакта из класса принадлежит классу. Класс называется *аддитивным*, если он монотонен и содержит конечные объединения своих элементов.

Пусть $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение полиэдра P с фиксированной на нем триангуляцией. *Линеаризацией* отображения f называем отображение, совпадающее с f на нульмерном остове и линейное на каждом симплексе.

Мы будем говорить, что два пространства X, Y имеют одинаковую *классность* по отношению к классу пространств $\mathfrak{X}$, если они либо оба принадлежат, либо оба не принадлежат этому классу. Класс компактов в $\mathbb{R}^n$ называется *линейно инвариантным*, если для любого элемента класса его образ при линейном гомеоморфизме пространства также принадлежит этому классу.

Через $\mathfrak{F}(X, Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений компакта X в пространство Y с компактно-открытой топологией.

АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЛЕММА [7]. Для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ и любого аддитивного, линейно инвариантного класса $\mathfrak{X}$ в пространстве $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R}^n)$ всюду плотно множество отображений, образы которых имеют с X одинаковую $\mathfrak{X}$ -классность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — какое-то непрерывное отображение и дано $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности, мы можем предполагать, что f определено на некоторой компактной полиэдральной окрестности OX компакта X в $\mathbb{R}^n$. Причем OX является замыканием своей внутренности, т.е. размерно однородным полиэдром. Берем столь мелкую триангуляцию окрестности, чтобы линеаризация f' отображения f по отношению к этой триангуляции была $\varepsilon/2$ -близка к f . Пошевелив отображение f , можно получить $\varepsilon/2$ -близкое отображение f_1 , ограничение которого на нульмерном остове в образе дает множество общего положения. Тогда линеаризация отображения f_1 , обозначаемая f'_1 , будет ε -близка к f , и ограничение ее на любой n -мерный симплекс триангуляции будет гомеоморфизмом. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — все n -мерные симплексы нашей триангуляции. Тогда их объединение дает OX . Обозначим через X_k пересечение $X \cap T_k$. Тогда если $X \in \mathfrak{X}$, то в силу монотонности $X_k \in \mathfrak{X}$ при любом k . Но $Y_k = f'_1(X_k)$ гомеоморфно X_k , поскольку f'_1 не вырождено на n -мерных симплексах. Поэтому из линейной инвариантности $\mathfrak{X}$ заключаем: $Y_k \in \mathfrak{X}$ при любом k , и теперь на основании аддитивности $\mathfrak{X}$ заключаем: $f'_1(X) \in \mathfrak{X}$. Аналогично доказывается, что если $f'_1(X) \in \mathfrak{X}$, то и $X \in \mathfrak{X}$.

Класс компактов называется *топологически инвариантным*, если со всяким компактом содержит и гомеоморфный ему. Все рассматриваемые в дальнейшем классы компактов по умолчанию предполагаются топологически инвариантными.

Класс компактов называется *замкнутым*, если содержит обратные пределы последовательностей, все члены которых ему принадлежат. Класс компактов называется *полным*, если он имеет тип G_δ в пространстве $\text{exr } Q$ всех компактных подмножеств гильбертова куба, рассматриваемого с топологией, порожденной метрикой Хаусдорфа (топологией Виеториса).

Так, класс компактов, экстенсивных относительно данного комплекса K , является аддитивным, замкнутым и полным. Все эти свойства, за исключением полноты, были доказаны в §4. Докажем полноту. Для комплекса L и пространства S обозначим через $\text{exr}_L S$ подпространство $\text{exr } S$ — пространства компактных подмножеств S , состоящее из L -экстенсивных компактов.

Полнота экспоненты. *Для полного метрического сепарабельного S и счетного комплекса L пространство $\text{exr}_L S$ полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Урысона можем считать S подмножеством гильбертова куба Q . Поскольку $\text{exr}_L S = \text{exr } S \cap \text{exr}_L Q$, достаточно доказать полноту $\text{exr}_L Q$. Для этого рассмотрим представительную последовательность $\{f_i\}$ частичных отображений из Q в L . Для каждого i множество тех компактов в Q , на которые продолжается f_i , открыто. А пересечение последовательности таких множеств как раз и дает $\text{exr}_L Q$. Что и требовалось доказать.

ЛЕММА О ПОЛНОТЕ. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый полный класс. Тогда для любого компакта X и любого замкнутого подмножества гильбертова пространства S в пространстве $\mathfrak{F}(X, S)$ множество отображений, образы которых принадлежат $\mathfrak{X}$, имеет тип G_δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, отображение Im из $\mathfrak{F}(X, S)$ ставящее в соответствие отображению его образ, очевидно, непрерывно. Множество $\mathfrak{X} \cap \text{exr } S$ имеет тип G_δ как пересечение замкнутого и G_δ -множеств, и $\mathfrak{F}(X, S) = \text{Im}^{-1} \mathfrak{X} \cap \text{exr } S$.

ЛЕММА О СОХРАНЕНИИ КЛАССНОСТИ. *Пусть X является компактным подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, принадлежащим аддитивному полному классу $\mathfrak{X}$. Тогда в $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R}^n)$ полно и всюду плотно множество с образами из $\mathfrak{X}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аппроксимационной леммы в пространстве отображений всюду плотно множество отображений, образы которых принадлежат классу $\mathfrak{X}$. А в силу леммы о полноте это множество имеет тип G_δ . Что и требовалось доказать.

Приведенная ниже лемма является небольшой вариацией соответствующего рассуждения из статьи [41].

ЛЕММА О КОНЕЧНОКРАТНОМ ОТОБРАЖЕНИИ. *Если образ компакта X при конечнократном отображении принадлежит замкнутому аддитивному классу $\mathfrak{X}$, то и сам компакт принадлежит этому классу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть компакт X лежит в n -мерном кубе I^n . Обозначим через $\pi_k: I^n \rightarrow I^k$ проекцию куба на его грань, переводящую точку с координатами $(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ в точку $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Для рассматриваемого конечнократного отображения $f: X \rightarrow Y$ обозначим $X_k = \{(\pi_k x, y) \mid x \in X, y \in Y, f(x) = y\}$. Тогда f разлагается в композиции отображений из X_{k+1} в X_k , если считать, что $X_0 = Y$. Все отображения этой композиции также конечнократны и, кроме того, параллельны отрезку. Поэтому в конечномерном случае задача сведена к отображениям, параллельным отрезку.

В бесконечномерном случае она также сводится к таким отображениям, только к их бесконечной композиции (обратной последовательности). Этот случай мы оставляем читателю.

Итак, считаем $X \subset Y \times I$ и f — ограничением Y -проекции произведения. *Прямоугольником* будем называть подмножество произведения вида $A \times J$, где J — некоторый связный промежуток. Множество, являющееся объединением конечного числа прямоугольников, называем мультипрямоугольником. Выберем последовательность замкнутых мультипрямоугольных окрестностей $\{O_n\}$ у компакта X так, чтобы $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Для каждой такой окрестности определим пространство Y_n как факторпространство от O_n по разбиению, элементами которого служат компоненты связности пересечений $O_n \cap (y \times I)$, $y \in Y$. Тогда имеются естественные отображения из Y_n в Y_m при $n > m$, и само Y естественно гомеоморфно обратному пределу из Y_n . Поэтому достаточно доказать, что любое Y_n принадлежит $\mathfrak{X}$.

Для каждого прямоугольника $Y' \times J$ из O_n имеется естественное отображение из его основания Y' в Y_n . А именно, точке y ставится в соответствие та компонента, которая содержит $y \times J$. Образ этого отображения гомеоморфен основанию. Таким образом, все Y_n оказывается покрытым конечным числом образов оснований, которые принадлежат классу $\mathfrak{X}$, а значит, и само Y_n ему принадлежит.

Следующая теорема является вариацией теоремы Дранишникова–Успенского

ТЕОРЕМА О НУЛЬМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ [41]. *Если образ компакта при нульмерном отображении принадлежит замкнутому аддитивному классу $\mathfrak{X}$, то и сам компакт принадлежит этому классу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — нульмерное отображение компактов. Тогда, как известно, f можно представить в виде обратного предела конечнократных отображений, поэтому теорема вытекает из леммы о конечнократном отображении.

ЛЕММА О КОНЕЧНОКРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ. *В пространстве отображений из компакта X размерности $< n$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ множество отображений кратности $< n$ является всюду плотным типа G_δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скажем, что отображение f является (n, ε) -отображением, если прообраз каждой точки при нем является объединением n дизъюнктивных множеств диаметра $< \varepsilon$. Как легко проверить, множество (n, ε) -отображений открыто в пространстве отображений $C(X, \mathbb{R}^n)$. Оно также всюду плотно. Действительно, всякое отображение компакта в $\mathbb{R}^n$ аппроксимируется композицией ε -отображения из X в полиэдр той же размерности (теорема П. С. Александрова) и кусочно-линейного отображения этого полиэдра в $\mathbb{R}^n$. Но всякое общего положения кусочно-линейное отображение полиэдра размерности $< n$ в $\mathbb{R}^n$ имеет кратность $< n$. А композиция

отображения кратности n и ε -отображения является (n, ε) -отображением. Пересечение множеств (n, ε) -отображений, когда ε пробегает любую стремящуюся к нулю последовательность, совпадает с множеством отображений кратности $\leq n$, что и требовалось доказать.

Эта лемма вместе с теоремой о нульмерных отображениях и леммой о сохранении классности приводит к такому результату.

АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{X}$ – аддитивный, полный, замкнутый класс компактов. Тогда для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ этого класса в пространстве $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R}^n)$ отображения с образами из $\mathfrak{X}$ составляют полное всюду плотное множество.

Теорема об устойчивых пересечениях

В этом разделе через $\mathfrak{F}$ мы обозначаем некоторое множество в пространстве отображений $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R}^n)$ и называем его *классом отображений*. Класс $\mathfrak{F}$ называем *полным*, если он имеет тип G_δ и, согласно теореме Александрова, допускает полную метрику.

Если в классе $\mathfrak{F}$ всюду плотно множество тех отображений, образы которых не пересекают некоторого подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$, тогда мы будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ *устраним* с множества Y . А множество Y мы будем называть в этой ситуации *$\mathfrak{F}$ -пренебрежимым*.

СЧЕТНАЯ АДДИТИВНОСТЬ ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. Объединение последовательности замкнутых множеств, пренебрежимых некоторым полным классом отображений $\mathfrak{F}$, является $\mathfrak{F}$ -пренебрежимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всякое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является объединением последовательности компактных, которые также будут $\mathfrak{F}$ -пренебрежимыми как подмножества $\mathfrak{F}$ -пренебрежимых, постольку утверждение достаточно доказать для компактов. Но множество отображений компакта, образы которых пересекают некоторое компактное множество, замкнуто в пространстве отображений. Поэтому для любого $\mathfrak{F}$ -пренебрежимого компакта в классе $\mathfrak{F}$ множество отображений, не пересекающих его, является открытым и всюду плотным. Теперь ссылка на теорему Бэра завершает доказательство.

Для числа x через $[x]$ обозначим ближайшее к нему целое число. Эта функция однозначно определена для всех чисел, за исключением *полуцелых*, каковыми мы называем половины нечетных целых чисел. И положим $\{x\} = |x - [x]|$ для неполуцелых x и $\{x\} = 1/2$ для полуцелых x . Равенство $\{x\} = 1/2$ характеризует полуцелые числа.

Для набора чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$ через $\min_k x$ обозначим абсолютную величину k -го по абсолютной величине члена этого набора. Так что $\min_1 x = \min\{|x_i|\}$ и $\min_n x = \max\{|x_i|\}$.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ назовем *k -(полу)целой*, если она имеет не менее k (полу)целых координат. Ясно, что топологическая размерность множества k -целых точек равна $n - k$. Через dist_0 обозначаем метрику на $\mathbb{R}^n$, порожденную $\sup$ -нормой (т.е. $\text{dist}_0(x, y) = \max |x_i - y_i|$).

ЛЕММА ОБ ОКРУГЛЕНИИ. *Если компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ не содержит k -полуцелых точек, то он допускает непрерывный сдвиг в $(n - k + 1)$ -целые точки, смещающий его точки в метрике dist_0 не далее чем на половину.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$. Для любой точки $x \in X$ имеем $\min_{n-k+1} \{x\} < 1/2$. Действительно, предположение противного означало бы, что $\{x_i\} = 1/2$ для k координат, что означало бы k -полуцелость x . Определим теперь “округляющее” отображение $s: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом. Если $x_i \leq \min_k \{x\}$, то $s(x)_i = [x_i]$ (определение корректно в силу только что доказанного), иначе $s(x)_i = (2 \min_k \{x\})x_i + (1 - 2 \min_k \{x\})[x_i]$. Последнее определение корректно и для полуцелых x_i , потому что в этом случае обращается в нуль коэффициент при $[x_i]$. Тогда покоординатное различие между $s(x)$ и x не превосходит половины, а образ $s(X)$ состоит из $(n - k + 1)$ -целых точек.

Доказательство следующего утверждения, по существу, принадлежит Г. С. Чогошвили [42].⁵

ЛЕММА ЧОГОШВИЛИ. *Если полный класс отображений $\mathfrak{F}$ компакта X в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ устраним со всякой плоскости размерности k , то почти все отображения этого класса имеют образ размерности меньше чем $n - k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $R(n, k)$ множество k -полуцелых точек пространства $\mathbb{R}^n$. Для положительного c положим $cR(n, k) = \{cx \mid x \in R(n, k)\}$. Тогда объединение множеств $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} R(n, k)$ является $\mathfrak{F}$ -пренебрежимым как объединение счетного числа k -мерных плоскостей.

Таким образом, для доказательства леммы достаточно убедиться, что всякий компакт, лежащий в дополнении к этому объединению, имеет размерность $< n - k$. А для этого достаточно убедиться в том, что он допускает сколь угодно малые сдвиги в компакты размерности $\leq n - k - 1$. Но всякий компакт, лежащий в дополнении к $cR(n, k)$, допускает c -сдвиг (в метрике dist_0) в $(n - k - 1)$ -мерный полиэдр, как это следует из леммы об округлении.

Гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, задаваемая уравнением $x_i = 0$, называется *координатной*. И *координатной плоскостью* называется пересечение координатных гиперплоскостей. Как заметил Понтрягин, при доказательстве леммы Чогошвили используется лишь устранимость с плоскостей, параллельных координатным.

Поэтому если некоторое семейство k -мерных плоскостей $\mathfrak{L}$ *параллельно инвариантно*, т.е. со всякой плоскостью содержит все ей параллельные и содержит все координатные плоскости, то в силу замечания Понтрягина $\mathfrak{L}$ -устранимости достаточно для справедливости заключения леммы Чогошвили.

А так как набор плоскостей, достаточно близкий к координатному, сам является координатным в некоторой системе координат, то замечание Понтрягина позволяет доказать следующее уточнение леммы Чогошвили.

⁵ Сам Чогошвили в цитированной работе формулировал и пытался доказать неверное утверждение, что компакт, устранимый с любой плоскости размерности k в $\mathbb{R}^n$, имеет размерность $< (n - k)$. Контрпример к этому утверждению построен А. Н. Дранишниковым [43].

УТОЧНЕННАЯ ЛЕММА ЧОГОШВИЛИ. Если полный класс отображений $\mathfrak{F}$ некоторого компакта в $\mathbb{R}^n$ устраним со всякой плоскости, принадлежащей некоторому параллельно инвариантному и плотному множеству k -мерных плоскостей, то почти все отображения класса имеют размерность образа меньше чем $n - k$.

Устойчивые пересечения. Пусть даны классы отображений $\mathfrak{F}_i: X_i \rightarrow S$. Набор отображений $\{f_i: X_i \rightarrow S\}$ называется *устойчиво пересекающимся* относительно классов $\mathfrak{F}_i$, если $f_i \in \mathfrak{F}_i$ и для всяких достаточно близких к ним отображений $f'_i \in \mathfrak{F}_i$ непусто пересечение $\bigcap_i f'_i(X_i)$.

И мы говорим, что отображение $f \in \mathfrak{F}$ устойчиво по отношению к $\mathfrak{F}$ пересекает некоторое множество, если всякое достаточно близкое к f отображение этого класса также пересекает это множество.

Пусть дан набор классов $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \leq k}$ отображений компактов $X_1, X_2, \dots, X_k$ в $\mathbb{R}^n$. Их произведением $\prod \mathfrak{F}_i$ называется класс непрерывных отображений из произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ в пространство $\mathbb{R}^{nk}$ с фиксированной на нем структурой произведения $\mathbb{R}^{nk} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, имеющих вид прямых произведений $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k$. Очевидно, что произведение полных классов полно.

Плоскость L размерности n в произведении $\mathbb{R}^{nk}$ будем называть *косой*, если ее проекция покрывает любой из множителей этого произведения. Всякая косая плоскость при любой паре $i, j \leq k$ определяет линейный гомеоморфизм $L_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемый следующим способом: для $x \in \mathbb{R}^n$ выбираем точку $y \in L$, проекция которой на i -ю координату равна x , и в качестве $L_{ij}(x)$ берем проекцию y на j -ю координату. Набор классов отображений называют устойчиво пересекающимся, если из каждого класса можно выбрать по представителю и получить устойчиво пересекающийся по отношению к этим классам набор отображений. И мы говорим, что класс отображений устойчиво пересекает множество, если хотя бы один представитель этого класса устойчиво пересекает это множество.

ЛЕММА О КОСОЙ ПЛОСКОСТИ. Продуктивный класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_n$ устойчиво пересекает некоторую косую плоскость L в том и только том случае, когда устойчиво пересекаются классы отображений $L_{i1} \circ \mathfrak{F}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение образа отображения $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k$ с L , как нетрудно понять, проектируется на первый множитель как раз на пересечение образов композиций $L_{i1} f_i$. Поэтому эти множества пусты или непусты одновременно. Откуда и следует нужное нам утверждение.

ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ. Пусть дан набор компактов $X_1, \dots, X_k$ размерностей $< n$, размерность произведения которых $\dim \prod X_i \geq nk - n$, тогда найдутся такие отображения $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые в совокупности устойчиво пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{F}_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ полный класс непрерывных отображений из X_i в $\mathbb{R}^n$, имеющих кратность $< n$ (см. лемму о конечнократных отображениях). Продуктивный класс $\prod \mathfrak{F}_i$ отображений в $\mathbb{R}^{nk}$ обозначим $\mathfrak{F}$. Так как

размерность образа при нульмерных отображениях не понижается (теорема о нульмерных отображениях), то образы всех отображений класса $\mathfrak{F}$ имеют размерность $\geq nk - n$. Поскольку множество косых n -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^{nk}$ параллельно инвариантно и всюду плотно, постольку уточненная лемма Чогошвили позволяет заключить, что найдется косая плоскость размерности n , которую класс $\mathfrak{F}$ устойчиво пересекает. Это значит, что найдутся линейные гомеоморфизмы $L_1, \dots, L_n$, для которых устойчиво относительно $\mathfrak{F}_i$ пересекаются отображения $L_i f_i$ (лемма о косой плоскости). Но почти все непрерывные отображения из X_i в $\mathbb{R}^n$ принадлежат $\mathfrak{F}_i$ (лемма о конечнократных отображениях), поэтому устойчивость относительно $\mathfrak{F}_i$ влечет устойчивость относительно класса всех непрерывных отображений. Что и требовалось доказать.

Теорема о пренебрежимости

Поликомпакты. Конечный упорядоченный набор компактов $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ будем называть *поликомпактом*. При этом компакт X_i называем *i -й компонентой* поликомпакта $\mathcal{X}$. Поликомпакты обозначаем рукописными буквами $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, а их компоненты соответствующими печатными X_i, Y_j . Через $\prod \mathcal{X}$ обозначаем произведение $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ компонент поликомпакта.

Число компактов, составляющих данный поликомпакт, называем *длиной* поликомпакта. *Размерностью поликомпакта* $\mathcal{X} = \{X_i\}_{1 \leq i \leq m}$ называется максимум $\dim X_i$; обозначение: $\dim \mathcal{X}$.

Для двух поликомпактов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ через $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ обозначаем *составной поликомпакт*, полученный объединением поликомпактов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, порядок на котором задается так, что любая $\mathcal{X}$ -компонента предшествует любой $\mathcal{Y}$ -компоненте, порядок $\mathcal{X}$ -компонент такой же, как в $\mathcal{X}$, а $\mathcal{Y}$ -компонент – такой же, как в $\mathcal{Y}$.

И будем называть *отображением* $F: \mathcal{X} \rightarrow S$ поликомпакта $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ в пространство S совокупность отображений $F = \{f_i: X_i \rightarrow S\}$.

Пространство отображений поликомпакта $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ естественно отождествляется с произведением $\prod_{i=1}^m \mathfrak{F}(X_i, S)$ и рассматривается с топологией произведения. А расстояние между отображениями определяется как максимум из расстояний между их соответствующими компонентами: $\text{dist}(F, G) = \max \text{dist}(f_i, g_i)$.

Для отображения $F = \{f_i: X_i \rightarrow S\}_{1 \leq i \leq m}$ поликомпакта $\mathcal{X}$ определим его *пересеченный образ* $F^\cap(\mathcal{X})$ как пересечение $F^\cap(\mathcal{X}) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} f_i(X_i)$.

Будем говорить, что поликомпакт $\mathcal{X}$ не имеет устойчивых пересечений в пространстве S , если всякое отображение из $\mathcal{X}$ в S аппроксимируется отображением с пустым пересеченным образом. И будем говорить, что поликомпакты $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ и $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ не имеют устойчивых пересечений в пространстве S , если устойчивых пересечений в S не имеет составной поликомпакт $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. В противном случае мы будем говорить, что поликомпакты $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют устойчивые пересечения в S или что $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ устойчиво пересекаются в S .

И мы называем множество $R \subset S$ *пренебрежимым относительно поликомпакта* $\mathcal{X}$, если всякое отображение $F: \mathcal{X} \rightarrow R$ аппроксимируется отображениями, пересеченный образ которых не пересекает R .

Следующая лемма для компактов была доказана Торуньчиком [7].

ЛЕММА ТОРУНЬЧИКА. Если поликомпакты $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ не имеют устойчивых пересечений в полном метрическом пространстве S , то пересеченный образ почти всех отображений поликомпакта $\mathcal{X}$ является $\mathcal{Y}$ -пренебрежимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{F_i\}$ и $\{G_i\}$ – всюду плотные последовательности отображений из $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ в S . С помощью бесконечного процесса мы “пошевелим” все эти отображения таким образом, чтобы “пошевеленные” отображения F'_i и G'_i обладали следующими свойствами:

- (1) $\text{dist}(F_i, F'_i) \leq 1/2^i$ и $\text{dist}(G_i, G'_i) \leq 1/2^i$ (близость);
- (2) $F'_j \cap (\mathcal{X}) \cap G'_k \cap (\mathcal{Y}) = \emptyset$ при любых j, k (дизъюнктность).

Покажем, как из существования пошевеленной последовательности вытекает утверждение леммы. Прежде всего, заметим, что пошевеленные последовательности ввиду условия близости сохраняют свойства всюду плотности, которыми обладали первоначальные.

Для любого отображения F'_k в пространстве отображений поликомпакта $\mathcal{Y}$ обозначим через C_k множество тех из них, для которых пересеченный образ не пересекается с $F'_k \cap \mathcal{X}$. Множество C_k открыто и всюду плотно, потому что содержит последовательность G'_i . Таким образом, пересечение всех C_k будет всюду плотным G_δ -множеством. Но любой элемент этого пересечения имеет пересеченный образ, дизъюнктивный с пересеченными образами всех F'_k . А всякое множество, лежащее в дополнении ко всем пересеченным образам последовательности G'_k , является $\mathcal{Y}$ -пренебрежимым, ибо последовательность отображений G'_k всюду плотна.

Алгоритм шевеления выглядит так. Введем понятие *текущего* k -го отображения составного поликомпакта $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Первоначально оно совпадает с F_k, G_k . В процессе построения оно меняется. А конечный результат – отображения F', G' , будет получаться как предел последовательности соответствующих текущих отображений.

На первом шаге мы заменяем первое текущее отображение на ε_1 -близкое с пустым пересеченным образом. И запоминаем число δ_1 – меру дизъюнктивной устойчивости этого отображения, которое обладает тем свойством, что всякое δ_1 -близкое к нему отображение также имеет пустой пересеченный образ.

На k -м шаге мы заменяем все текущие отображения с первого по k -е на ε_k -близкие и обладающие тем свойством, что при любых $i, j \leq k$ дизъюнктивны пересеченные образы i -го текущего отображения поликомпакта $\mathcal{X}$ и k -го текущего отображения поликомпакта $\mathcal{Y}$. И запоминаем меру устойчивости δ_k этой ситуации.

Возможность замены любого текущего отображения и даже любой конечной совокупности таких отображений на сколь угодно близкие отображения с дизъюнктивными пересеченными образами вытекает из условия неустойчивости пересечений.

Построение описано. Осталось описать, как выбирать ε_k , чтобы при предельном переходе сохранить свойства дизъюнктивности пересечений, которых мы добились для текущих отображений. Для этого достаточно выбирать ε_k таким образом, чтобы при любом n выполнялось неравенство $\sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \delta_n/2$. Чтобы удовлетворить этому условию, достаточно выбирать ε_k не превосходящим $\delta_{k-i}/3^i$. Лемма Торуньчика доказана.

Условие отсутствия устойчивых пересечений для отображений поликомпактов $\mathcal{X}$

и $\mathcal{U}$ равносильно пренебрежимости пространства S составным поликомпактом $\mathcal{X}, \mathcal{U}$. Такая переформулировка позволяет обобщить лемму Торуньчика следующим образом.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЛЕММА ТОРУНЬЧИКА. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ – два поликомпакта, S – полное метрическое пространство и A – замкнутое подпространство S . Тогда если A является пренебрежимым для составного поликомпакта $\mathcal{X}, \mathcal{U}$, то для почти всех отображений поликомпакта $\mathcal{X}$ пересечение их пересеченных образов с A является $\mathcal{U}$ -пренебрежимым.

Доказательство относительной версии леммы Торуньчика, по существу, не отличается от приведенного выше доказательства абсолютной и предоставляется читателю. Из леммы Торуньчика и аппроксимационной леммы получаем такое следствие.

ТЕОРЕМА О НЕПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. Если поликомпакт $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ имеет в $\mathbb{R}^n$ устойчивые пересечения и $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, то X_0 не пренебрежим поликомпактом $X_1, \dots, X_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс компактов, являющихся пренебрежимыми по отношению к поликомпакту $X_1, \dots, X_n$. Он аддитивен и линейно инвариантен. Предполагая X_0 пренебрежимым поликомпактом $X_1, \dots, X_m$, рассмотрим произвольное отображение $f_0, \dots, f_m: X_0, \dots, X_m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Отображение f_0 имеет аппроксимацию f'_0 с образом, пренебрежимым поликомпактом $X_1, \dots, X_n$ в силу аппроксимационной леммы. Тогда, взяв аппроксимацию $f'_1, \dots, f'_m$, пересечение образов которой минует $f'_0(X_0)$, получим в итоге отображение из $X_0, \dots, X_m$ с пустым пересеченным образом, аппроксимирующее исходное. То есть мы доказали, что устойчивых пересечений у компактов $X_0, \dots, X_m$ в $\mathbb{R}^n$ нет, вопреки предположению.

§8. Верхние оценки размерности пересечения

Леммы о множествах дикости

КРИТЕРИЙ n -ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. Для сигма-компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ и целого $k \in [0, n]$ следующие два условия эквивалентны:

- (1) X пренебрежимо k -шаром;
- (2) X пренебрежимо любым компактом размерности $\leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено первое условие. Докажем, что тогда X пренебрежимо полиэдром P размерности $\leq k$. Действительно, при данных условиях в пространстве отображений $\mathfrak{F}(P, \mathbb{R}^n)$ множество тех, ограничение которых на данный симплекс не пересекает X , всюду плотно (в силу пренебрежимости X шаром размерности k) и полно (так как X – сигма-компактно). Поэтому и пересечение таких множеств по всем симплексам полиэдра также имеет эти свойства. А всюду плотность этого пересечения как раз и означает P -пренебрежимость для X .

Если теперь Y – компакт размерности $\leq k$, то всякое отображение из Y в $\mathbb{R}^n$ приближается, в силу теоремы Александрова, отображением, образом которого служит полиэдр P той же размерности. А последний малым шевелением снимается с X в силу вышедоказанного. Что и позволяет доказать Y -пренебрежимость множества X .

Множества евклидова пространства, удовлетворяющие условиям доказанного выше предложения, называются *пренебрежимыми в размерности n* или, короче, *n -пренебрежимыми*.

Следующее утверждение, по существу, принадлежит Франклю [44].

ТЕОРЕМА ФРАНКЛЯ. *Компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет размерность $\dim X < n - 1$ в том и только том случае, когда является 1-пренебрежимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X \geq n - 1$, то $\dim X \times I \geq n$, и по теореме об устойчивых пересечениях существуют устойчивые пересечения X и I в $\mathbb{R}^n$, а по теореме о непренебрежимости отсюда следует I -непренебрежимость X .

Если же компакт X разбивает пространство, то одна из компонент разбиения ограничена. Обозначим ее C . Тогда параллельными переносами можно устроить счетное покрытие пространства копиями множества C , обозначим это покрытие ω . Тогда сжимающие гомотопии дадут последовательность ε_i -покрытий ω_i для последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Тогда объединение границ элементов покрытий будет иметь размерность такую же, как граница у C , т.е. $< n - 1$, а дополнение будет нульмерно. И мы получим противоречие с неравенством Урысона.

ЛЕММА О НУЛЬМЕРНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ С ДИСКОМ. *Если сигма-компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет размерность $\dim X < n - 1$ и $n > 3$, то почти все отображения двумерного диска $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеют нульмерное и 2-пренебрежимое пересечение $f(D) \cap X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с замечания, что случай сигма-компактного X вытекает из случая компактного X . Действительно, пусть X_i — последовательность компактов, дающая в объединении X . Обозначим через $\mathfrak{F}_i$ множество отображений из D в $\mathbb{R}^n$, для которых пересечение с X_i нульмерно и 2-пренебрежимо. Если мы знаем, что дополнение к $\mathfrak{F}_i$ первой категории, то почти все отображения из $\mathfrak{F}(D, \mathbb{R}^n)$ принадлежат пересечению $\mathfrak{F}_i$. Но отображения из этого пересечения имеют нульмерное пересечение с X , ибо объединение последовательности нульмерных компактов нульмерно, и имеют 2-пренебрежимые пересечения с X , ибо объединение последовательности 2-пренебрежимых компактов 2-пренебрежимо. Итак, в дальнейшем считаем X компактом.

В пространстве отображений диска в $\mathbb{R}^n$ множество $\mathfrak{F}_\varepsilon$ отображений, имеющих компоненту связности у пересечения образа с X , диаметра не больше некоторого ε , замкнуто. Докажем нигде не плотность этого множества. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Зафиксируем столь мелкую триангуляцию на диске, чтобы образы симплексов при f имели диаметр меньше чем ε . Тогда в силу 1-пренебрежимости X найдется ε -близкое отображение f' , при котором образ одномерного остова триангуляции не пересекает X . Если $n > 4$, то дальше мы, просто приводя в общее положение отображение f' , получаем вложение. Но тогда пересечения образов различных симплексов триангуляции с X дизъюнкты и имеют диаметр не больше 3ε .

Если же $n = 4$, то приведенное в общее положение отображение f' имеет конечное число двойных точек. Тогда малой изотопией всего пространства мы сдвигаем двойные точки с X . В результате получаем, что пересечения образов симплексов у произотопированного отображения с X дизъюнкты.

В силу теоремы Бэра получаем, что множество $\mathfrak{F}_0$, состоящее из отображений, не принадлежащих $\mathfrak{F}_\varepsilon$ ни при каком $\varepsilon > 0$, является всюду плотным G_δ -множеством в пространстве отображений, а его элементами как раз являются отображения с нульмерным пересечением.

Для почти всех пар отображений диска в $\mathbb{R}^n$ их пересечение с X пусто. Действительно, поскольку множество пар с пустым пересечением открыто, достаточно доказать его всюду плотность. Для этого можно ограничиться рассмотрением кусочно-линейных отображений. Но кусочно-линейные отображения в общем положении пересекаются по конечному числу точек (если $n = 4$), и эти точки в общем положении не лежат на X , ввиду нигде не плотности последнего. Далее применяем уточненную лемму Торунчика к отображениям набора D , D в $\mathbb{R}^n$ относительно X и получаем, что для почти всех отображений из D в $\mathbb{R}^n$ пересечение образа с X является 2-пренебрежимым. В таком случае для почти всех отображений мы имеем одновременно 2-пренебрежимость и нульмерность пересечения образа отображения с X .

ЛЕММА ОБ ОДНОМЕРНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ С ДИСКОМ. *Если сигма-компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет размерность $\dim X < n$ и $n > 3$, то почти все отображения двумерного диска $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеют одномерное и 2-пренебрежимое пересечение $f(D) \cap X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Редукция сигма-компактного X к компактному выполняется так же, как и в предыдущей лемме. Поэтому считаем X компактом. Выберем в диске D всюду плотную последовательность $\{x_i\}$. Тогда для любого i множество $\mathfrak{F}_i$ тех отображений из D в $\mathbb{R}^n$, для которых образ x_i не принадлежит X , является открытым и всюду плотным в пространстве отображений $\mathfrak{F}(D, \mathbb{R}^n)$. При $f \in \bigcap \mathfrak{F}_i$ будет $\dim f^{-1}(X) \leq 1$, т.е. это выполняется для почти всех отображений.

Далее, для почти всех отображений из $\mathfrak{F}(D, \mathbb{R}^n)$ $f^{-1}(X)$ содержится в множестве точек однократности. Действительно, пусть D_1 и D_2 — два непересекающихся рациональных (т.е. с рациональными центрами и радиусами) круга в D ; аналогично отмеченному при доказательстве предыдущей леммы, для почти всех отображений из D в $\mathbb{R}^n$ пересечение образов этих дисков с X пусто. Так как рациональных кругов счетное количество, то для почти всех отображений и любых непересекающихся рациональных кругов пересечение их образов с X пусто. Но отображения такого типа не имеют на X точек однократности. Поэтому для почти всех отображений из $\mathfrak{F}(D, \mathbb{R}^n)$ будет $\dim f(D) \cap X \leq 1$. Наконец то, что для почти всех отображений диска их пересечение с X является 2-пренебрежимым, доказывается так же, как в лемме о нульмерном пересечении.

Ручные компакты. Компакт X в $\mathbb{R}^n$ размерности $\leq n - 3$ называется *ручным*, если для всякого односвязного открытого множества U односвязна разность $U \setminus X$.

ЛЕММА О 2-ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. *Всякий 2-пренебрежимый компакт является ручным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U — односвязное открытое множество. Пусть $f: S^1 \rightarrow U \setminus X$ — произвольная петля. Пусть ε столь мало, что всякая ε -близкая к ней петля ей гомотопна. Продолжим f до отображения $F: D \rightarrow U$. Это возможно в силу односвязности U . Пошевелим F и получим ε -близкое отображение F' , для которого

образ не пересекает X , что возможно в силу 2-пренебрежимости последнего. Тогда F' осуществляет гомотопию нулю своего ограничения на край, которое по выбору ε гомотопно f . Односвязность $U \setminus X$ доказана.

ЛЕММА О НУЛЬМЕРНОМ МНОЖЕСТВЕ ДИКОСТИ. *Для всякого сигма-компакта X размерности $\dim X < n - 1$, лежащего в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, найдется такое нульмерное 2-пренебрежимое F_σ -множество Z (множество дикости), что всякий компакт $C \subset X \setminus Z$ является 2-пренебрежимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на лемму о пересечении с диском, в пространстве всех отображений двумерного диска в $\mathbb{R}^n$ выбираем всюду плотную последовательность отображений f_i , образы которых имеют нульмерные и 2-пренебрежимые пересечения с X . Пусть Z является объединением пересечений $f_i(D) \cap X$. Тогда любой компакт из дополнения $X \setminus Z$ является D -пренебрежимым и потому ручным.

ЛЕММА ОБ ОДНОМЕРНОМ МНОЖЕСТВЕ ДИКОСТИ. *Для всякого сигма-компакта X размерности $\dim X < n$, лежащего в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, найдется такое одномерное 2-пренебрежимое F_σ -множество Z (множество дикости), что всякий компакт $C \subset X \setminus Z$ является 2-пренебрежимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма выводится из леммы об одномерном пересечении с диском точно так же, как предыдущая из леммы о нульмерном пересечении.

Верхние оценки парных пересечений

Результаты этого раздела будут усилены в следующем.

ЛЕММА ОБ ЭКСТЕНСИВНОСТИ ДОПОЛНЕНИЯ. *Если X – компакт в шаре B^n размерности $\dim X < n - 2$ – имеет в шаре односвязное дополнение и Y является компактом, для которого $\dim X \times Y < n$, то $Y \cap (B^n \setminus X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}^*(X)$, $\mathcal{H}^*(Y)$ обозначают тотальные когомологии компактов X и Y соответственно. Тогда

$$\text{alt } \mathcal{H}^*(Y) H^*(X, \partial B^n \cap X) \leq \text{alt } \mathcal{H}^*(X) \mathcal{H}^*(Y) = \dim X \times Y < n.$$

Полигруппа гомологий $H_*(B^n \setminus X)$ является n -двойственной полигруппе когомологий $H^*(X, \partial B^n \cap X)$ в силу двойственности Александера. По критерию двойственности для полигрупп отсюда следует совместимость $\mathcal{H}^*(Y) \cap H_*(B^n \setminus X)$. Что означает $\dim Y \leq \text{Cin } B^n \setminus X$ в силу теоремы о кодировании и влечет $Y \cap B^n \setminus X$ в силу критерия экстенсивности Дранишникова.

Следующий результат Дранишникова играет ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

КРИТЕРИЙ ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ КОМПАКТОМ. *Ручной компакт X размерности меньше чем $n - 2$, лежащий в $\mathbb{R}^n$, пренебрежим компактом Y , если и только если $\dim X \times Y < n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X \times Y \geq n$, то в силу теоремы об устойчивом пересечении компакты X и Y устойчиво пересекаются в $\mathbb{R}^n$, а потому X не является Y -пренебрежимым в силу теоремы о непренебрежимости. Необходимость условия на размерность произведения тем самым доказана.

Доказательство достаточности ведется индукцией по размерности компакта X . Пусть $\dim X = k + 1$ и теорема доказана для компактов размерности k . Рассмотрим разложение Урысона $X = X_k \cup X_0$, где X_k типа F_σ и $\dim X_k = k$, $\dim X_0 = 0$. Тогда в силу индукционного предположения и счетной аддитивности пренебрежимости имеем, что для почти всех отображений $f: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ пересечение $f(Y) \cap X$ нульмерно. Далее, как мы знаем, почти все отображения из Y в $\mathbb{R}^n$ конечнократны. Поэтому нам достаточно показать, что конечнократные отображения, нульмерно пересекающие X , аппроксимируются отображениями с пустым пересечением.

Итак, дано конечнократное отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого $\dim f(Y) \cap X = 0$, и дано $\varepsilon > 0$. Обозначим через Y' прообраз $f^{-1}X$. Тогда $\dim Y' = 0$ в силу конечнократности f и найдется такое конечное дизъюнктное покрытие для Y' замкнутыми подмножествами Y_i , что $\text{diam } f(Y_i) < \varepsilon/2$ и граница Y_i , обозначаемая Y'_i , не пересекает Y' ни при каком i .

Пусть B_i — шар радиуса $\varepsilon/2$, содержащий образ $f(Y_i)$. Обозначим через X_i пересечение этого шара с X . Тогда наша задача будет решена, если для любого i мы построим отображение $f_i: Y_i \rightarrow B_i \setminus X_i$, которое совпадает с f на Y'_i . Действительно, в этом случае отображение f' , совпадающее с f_i на B_i и с f на дополнении к их объединению, будет непрерывной ε -аппроксимацией, минующей X .

Итак, мы имеем задачу продолжения. Но такая задача в данном случае разрешима, потому что лемма об экстенсивности позволяет утверждать, что $Y_i \tau B_i \setminus X_i$.

СТАТИЧЕСКАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА. Пусть Y — сигма-компакт размерности $< n$, лежащий в $\mathbb{R}^n$ ($n > 3$), и X — компакт размерности $< n - 1$. Тогда для почти всех отображений $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеем: $\text{Dim}(f(X) \cap Y) \leq (\text{Dim } X \dot{+} \text{Dim } Y) \prec n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой теоремы мы следуем А. Н. Дранишникову [34]. Пусть $D = (\text{Dim } X \dot{+} \text{Dim } Y) \prec n$ и $D' = \text{Dim } Y \prec (D + 1)$, тогда $\text{Dim } Y \leq D' \prec D + 1$. Пусть M и N — абелевы комплексы, для которых $\text{Cin } M = D'$ и $\text{Cin } N = D$. Тогда $\text{Cin } M * N = \text{Cin } M \prec \text{Cin } N + 1$, и по критерию экстенсивности имеем $Y \tau M * N$. Пусть $Y = Y_1 \cup Y_2$ — разложение сигма-компакта Y , поставляемое теоремой Урысона–Дранишникова, так что $Y_1 \tau M$ и $Y_2 \tau N$ и, кроме того, Y_2 можно, в силу уточнения к этой теореме, считать содержащим множество дикости компакта Y .

Действительно, если $\dim Y < n - 1$, то множество дикости нульмерно и ничто не препятствует его включению в Y_2 . Если же $\text{Dim } Y = n - 1$, то множество дикости одномерно и для включения его в Y_2 необходимо, чтобы $D \geq 1$. Последнее выполнено, если $\dim X > 1$. Поэтому теорему в случае $\dim Y = n - 1$ и $\dim X = 1$ нужно доказывать отдельно. Мы оставляем этот случай читателю.

Заменяя Y_1 на дополнение к Y_2 , добиваемся того, что Y_1 имеет тип F_σ и является ручным. Размерностный код у любого компакта в Y_1 не превосходит D' , и если мы докажем, что $D' \dot{+} \text{Dim } X$ не превосходит $n - 1$, то в силу критерия пренебрежимости получим X -пренебрежимость любого компакта в Y_1 , а стало быть, и всего Y_1 как суммы счетного числа X -пренебрежимых. А поскольку множество отображений ком-

пакта, минующих множество типа F_σ , имеет тип G_δ , то мы и докажем, что оценка на размерность пересечения выполнена для почти всех отображений. Таким образом, для доказательства теоремы нам остается убедиться в справедливости неравенства $D' \dot{+} \dim X \leq n - 1$, которое равносильно следующему: $D' \leq (n - 1) \dot{-} \dim X = (n - 1) - \dim X$ (замена минорной разности на двухстороннюю опирается на неравенство $\dim X \leq n - 2$). Подставляя значение D' в левую часть, получаем неравенство $(\dim Y \dot{-} (D + 1)) \leq (n - 1) - \dim X$. Положим $x = \dim X$, $y = \dim Y$ и $m = n - 1$. Тогда неравенство примет такой вид $y \dot{-} (((x \dot{+} y) \dot{-} (m + 1)) + 1) \leq m - x$. Вычитаемое в левой части в силу транспозиционного неравенства оценивается снизу как $(x \dot{+} y + 1) \dot{-} (m + 1)$, что в силу принципа сокращения равно $(x \dot{+} y) \dot{-} m$. Поэтому левая часть оценивается сверху выражением $y \dot{-} ((x \dot{+} y) \dot{-} m)$, и наше неравенство вытекает из следующего: $y \dot{-} ((x \dot{+} y) \dot{-} m) \leq m - x$. Переносим вычитаемое из левой части вправо, получаем такое неравенство: $((x \dot{+} y) \dot{-} m) \dot{+} (m - x) \geq y$. Но, опираясь на неравенства транспозиции, ассоциативности и компенсации, можем написать такую цепочку неравенств: $((x \dot{+} y) \dot{-} m) \dot{+} (m - x) \geq ((x \dot{+} y) \dot{+} (m - x)) \dot{-} m \geq ((x \dot{+} (m - x)) \dot{+} y) \dot{-} m \geq (m + y) \dot{-} m = y$. Что и требовалось доказать.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА. Если X и Y — компакты размерностей $< n - 1$, $n > 3$, тогда для почти всех отображений $f, g: X, Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ пересечение $f(X) \cap g(Y)$ ручное и справедливо неравенство

$$\dim(f(X) \cap g(Y)) \leq \dim X \dot{+} \dim Y \dot{-} n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = (\dim X \dot{+} \dim Y) \dot{-} n$ и $D' = (n - 1) \dot{-} D$, тогда $n \leq D' \dot{+} D + 1$. Пусть M и N — абелевы комплексы, для которых $\text{Cin } M = D'$ и $\text{Cin } N = D$. Тогда $\text{Cin } M * N = \text{Cin } M \dot{+} \text{Cin } N + 1$ и по критерию экстенсивности имеем $\mathbb{R}^n \tau M * N$.

Пусть $\mathbb{R}^n = R_1 \cup R_2$ — разложение пространства Y , поставляемое теоремой Урысона–Дранишникова, так что $R_1 \tau M$ и $R_2 \tau N$.

Заменяя R_1 на дополнение к R_2 , добиваемся того, что R_1 имеет тип F_σ . Пусть $Z \subset R_1$ — произвольный компакт. Тогда $\dim Z \leq D' < n - 1$. Поэтому, в силу только что доказанной теоремы, для почти всех отображений $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ размерность пересечения оценивается сверху как $\dim X \dot{+} \dim Z \dot{-} n$. Кроме того, почти все отображения минуют множество дикости компакта Z (ибо последнее является ручным). Поэтому для почти всех отображений пересечение $f(X) \cap Z$ является ручным. Поэтому можно воспользоваться критерием Дранишникова, чтобы доказать его Y -пренебрежимость. Для этого нужно проверить справедливость неравенства $\dim(f(X) \cap Z) \times Y < n$. То есть достаточно доказать следующее неравенство: $((\dim X \dot{+} \dim Z) \dot{-} n) \dot{+} \dim Y \leq n - 1$. Подставляя вместо $\dim Z$ его верхнюю оценку, получаем:

$$((\dim X \dot{+} ((n - 1) - (\dim X \dot{+} \dim Y) \dot{-} n)) \dot{-} n) \dot{+} \dim Y \leq n - 1.$$

Размерностные коды компактов далее, ради краткости, будем обозначать соответствующими малыми буквами. Переносим $\dim Y = y$ вправо, в соответствии с принятыми сокращениями получаем следующее эквивалентное неравенство:

$$(x \dot{+} ((n - 1) - (x \dot{+} y) \dot{-} n)) \dot{-} n \leq (n - 1) \dot{-} y.$$

Поскольку $y \leq n - 2$, разность справа – двухсторонняя. Поэтому, перенося n из левой части вправо, получаем в правой части $((n - 1) - y) \langle + \rangle n$, что в силу транспозиционного неравенства не уступает $(2n - 1) - y$. Поэтому нужное нам неравенство вытекает из следующего: $(x \langle + \rangle ((n - 1) - (x \langle + \rangle y) \langle - \rangle n)) \leq (2n - 1) - y$. В силу принципа сокращения имеем $(n - 1) - (x \langle + \rangle y) \langle - \rangle n = (2n - 1) - (((x \langle + \rangle y) \langle - \rangle n) + n)$, а так как $((x \langle + \rangle y) \langle - \rangle n) + n \geq (x \langle + \rangle y)$, то левая часть оценивается сверху величиной $x \langle + \rangle ((2n - 1) - (x \langle + \rangle y))$. Поэтому нужное нам неравенство вытекает из следующего: $x \langle + \rangle ((2n - 1) - (x \langle + \rangle y)) \leq (2n - 1) - y$. Так как разность справа двухсторонняя, то, считая ее минорной и перенося y влево, получаем, что последнее неравенство эквивалентно следующему: $(x \langle + \rangle y) \langle + \rangle ((2n - 1) - (x \langle + \rangle y)) \leq 2n - 1$. А это неравенство справедливо в силу принципов компенсации, поскольку $x + y \leq 2n - 4$ и разность слева, будучи двухсторонней, может рассматриваться как минорная.

Итак, пересечение $f(X) \cap Z$ почти для всех f является Y -пренебрежимым. Поэтому для почти всех пар отображений $f, g: X, Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеем: $f(X) \cap f(Y)$ не пересекается ни с каким компактом в R_1 , а значит, и со всем R_1 , ибо оно является счетным объединением компактов. Откуда вытекает, что это пересечение почти всегда содержится в R_2 , и потому имеет размерность $\leq D$, что и требовалось доказать.

Верхние оценки кратных пересечений

КРИТЕРИЙ ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ ПОЛИКОМПАКТОМ. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 3$) является компактом размерности $< n$. Тогда X является пренебрежимым поликомпактом $\mathcal{Y}$ размерности $< n - 1$ и длины $m > 1$ в том и только том случае, когда $\dim X \times \prod \mathcal{Y} < nm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X \times \prod \mathcal{Y} \geq nm$, то непренебрежимость X поликомпактом $\mathcal{Y}$ непосредственно вытекает из теоремы о непренебрежимости.

Пусть теперь $\dim X \times \prod \mathcal{Y} < nm$. Докажем в этом случае $\mathcal{Y}$ -пренебрежимость компакта X . Доказательство ведем индукцией по длине поликомпакта m . Пусть $m = 2$. Тогда множество дикости компакта X ручное и не более чем одномерное и потому является Y_1 -пренебрежимым в силу критерия Дранишникова, так как $\dim Y_1 \leq n - 2$. Значит, для почти всех отображений из Y_1 в $\mathbb{R}^n$ пересечение их с X является ручным. Далее, из доказанной выше теоремы следует, что для почти всех отображений из Y_1 в $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\dim f(Y_1) \cap X \leq \dim X \times Y_1 \langle - \rangle n$, из которого, в частности, следует, что размерность пересечения f с X не превосходит $n - 3$. Поэтому к этому пересечению применим критерий пренебрежимости Дранишникова, и для доказательства Y_2 -пренебрежимости этого пересечения, а с ним и доказательства $\mathcal{Y}$ -пренебрежимости компакта X достаточно проверить неравенство $(\dim X \times Y_1 \langle - \rangle n) \langle + \rangle \dim Y_2 \leq n - 1$. Перенося вправо сначала $\dim Y_2$, а потом n , получаем, что это неравенство равносильно следующему: $\dim X \times Y_1 \leq n \langle + \rangle ((n - 1) \langle - \rangle \dim Y_2)$. Но правая часть равна $(2n - 1) - \dim Y_2$, поскольку $\dim Y_2 \leq n - 2$, и потому разность справа – двухсторонняя. Перенося теперь $\dim Y_2$ влево, получаем неравенство $\dim X \times Y_1 \times Y_2 \leq 2n - 1$, равносильное тому условию на размерность произведения, которое нам дано. Итак, случай $m = 2$ разобран.

Пусть наше утверждение доказано для поликомпактов длины $< m$. Так же как и в случае $m = 2$, заметим, что для почти всех отображений из Y_1 в $\mathbb{R}^n$ пересечение их

образа $X' = X \cap g(Y_1)$ имеет размерностный код $\text{Dim } X' \leq \text{Dim } X \dot{+} \text{Dim } Y_1 \dot{-} n$.

Докажем, что компакт X' с таким кодом является пренебрежимым поликомпактом $\mathcal{Y}' = \{Y_2, \dots, Y_m\}$. Отсюда немедленно вытекает $\mathcal{Y}$ -пренебрежимость компакта X .

Поскольку длина $\mathcal{Y}'$ не меньше двух и меньше m , для него критерий пренебрежимости справедлив в силу предположения индукции. Воспользуемся этим критерием. Согласно этому критерию нам нужно доказать такое неравенство: $\dim(X' \times \prod \mathcal{Y}') < n(m-1)$.

Подставляя вместо $\text{Dim } X'$ его верхнюю оценку, сводим задачу к доказательству следующего неравенства:

$$(\text{Dim } X \times Y_1 \dot{-} n) \dot{+} \text{Dim } \prod \mathcal{Y}' < mn - n.$$

Доказательство этого неравенства получается из рассуждения для $m = 2$, если вместо $\text{Dim } Y_2$ подставить $\text{Dim } \prod \mathcal{Y}'$.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА. Пусть $\mathcal{X}$ — поликомпакт длины $m \geq 2$ и размерности $< n-1$. Тогда всякое отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^n$ можно аппроксимировать таким, размерностный код пересеченного образа которого не превосходит $\text{Dim } \prod \mathcal{X} \dot{-} (mn - n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по m . Если $m = 2$, то соответствующая формула совпадает с полученной ранее для пары отображений. Пусть она доказана для $m = k$. В таком случае произвольный набор отображений компактов $X_1, \dots, X_{k+1}$ аппроксимируется набором, для которого пересечение образов всех, за исключением последнего, компактов оценивается сверху величиной $D = \text{Dim } \prod_{i=1}^k X_i \dot{-} (kn - n)$ и которое к тому же можно предполагать ручным. Обозначим это пересечение через Y и оценим сверху размерность пересечения X_{k+1} с Y согласно статической верхней оценке. Получим: $(D \dot{+} \text{Dim } X_{k+1}) \dot{-} n$. Пусть $y = \text{Dim } \prod_{i=1}^k X_i$, $y' = \text{Dim } X_{k+1}$. Таким образом, нам достаточно доказать справедливость следующего неравенства: $((y \dot{-} (k-1)n) \dot{+} y') \dot{-} n \leq (y + y') \dot{-} kn$. Переносим вправо n , получаем, что нам достаточно доказать такое неравенство: $y \dot{-} (k-1)n \leq (((y \dot{+} y') \dot{-} nk) + n) \dot{-} y'$. По формуле транспозиции правая часть оценивается снизу как $((y \dot{+} y') \dot{-} nk) \dot{+} (n \dot{-} y')$, и вторичное применение транспозиции с учетом неравенства $y' \leq n-1$ дает такую нижнюю оценку правой части: $((y \dot{+} y') \dot{+} (n - y')) \dot{-} nk = (y \dot{+} (y' \dot{+} (n - y'))) \dot{-} nk \geq (y \dot{+} n) \dot{-} nk = y \dot{-} (k-1)n$. Что и требовалось доказать.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ. Пусть $\mathcal{X}$ — поликомпакт размерности $< n-1$, длины $m > 2$, тогда он имеет устойчивые пересечения в $\mathbb{R}^n$ в том и только том случае, когда $\dim \prod \mathcal{X} \geq mn - n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия на размерность произведения вытекает из теоремы об устойчивом пересечении.

В силу формулы пересечения отображений почти все отображения поликомпакта X_1, X_2 имеют ручной пересеченный образ с размерностным кодом, не превосходящим даваемого формулой пересечения. Пересечение образов X_1 и X_2 обозначаем Y . Докажем, что Y является пренебрежимым поликомпактом $X_3, \dots, X_m$, опираясь на доказанный выше критерий. Итак, нам известно, что

$\text{Dim } Y \leq (\text{Dim } X_1 [+]\text{Dim } X_2) \langle - \rangle n$. Обозначим $\text{Dim } X_1 \times X_2 = x$ и $\text{Dim } \prod_{i=3}^m X_i = z$. Тогда $x [+]\ z \leq (m-1)n$, а нам нужно доказать, что $(x \langle - \rangle n) [+]\ z \leq (m-2)n$. Переносим в последнем неравенстве слева направо z и n , получаем эквивалентное неравенство $x \leq ((m-2)n [-]\ z) + n$. Но $z < (m-2)n$, поэтому разность справа двухсторонняя, и, трактуя ее как мажорную, можем на основании транспозиционного неравенства заключить: $((m-2)n [-]\ z) + n \geq (m-1)n - z$. Поэтому нужное нам неравенство следует из неравенства $x \leq (m-1)n - z$, равносильного условию $x [+]\ z \leq (m-1)n$. Что и требовалось доказать.

СТАТИЧЕСКАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА. Пусть X — является сигма-компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim X < n$, пусть $n > 3$, и пусть дан поликомпакт $\mathcal{Y}$ длины $m \geq 1$ и размерности $< n-1$. Тогда для почти всех отображений $F: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\text{Dim}_X F^\cap(\mathcal{Y}) \leq \text{Dim}\left(X \times \prod \mathcal{Y}\right) \langle - \rangle nm.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство ведем индукцией по m . В соответствии со статической теоремой для пар, почти всякое отображение из Y_1 в $\mathbb{R}^n$ имеет ручное пересечение образа с X , обозначаемое Y , размерности $\text{Dim } Y \leq \dim X \times Y_1 \langle - \rangle n \leq n-3$. Пусть $\mathcal{Y}' = Y_2, \dots, Y_m$. Тогда по предположению индукции получается, что для почти всех отображений из $\mathcal{Y}'$ в $\mathbb{R}^n$ размерность пересечения с Y оценивается сверху величиной $((D \langle - \rangle n) [+]\ C) \langle - \rangle kn$, где через C обозначен размерностный код произведения компактов из $\mathcal{Y}'$, через D — размерностный код произведения $X \times Y_1$, а k равняется длине $\mathcal{Y}'$. Поэтому теорема будет доказана, если мы докажем неравенство $((D \langle - \rangle n) [+]\ C) \langle - \rangle kn \leq (D [+]\ C) \langle - \rangle (k+1)n$, подобное тому, которое мы доказывали при выводе формулы кратного пересечения.

§9. Нижние оценки размерности пересечения

Выше мы, исходя из размерностей компактов, оценивали сверху размерность их типичных пересечений с поликомпактами. Теперь мы займемся обратной задачей. Обратную задачу заключается в получении размерностных оценок компакта через типичные размерности его пересечений. Задачи такого типа мы будем называть *томографическими*.

ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА. Пусть $\mathcal{X}$ — поликомпакт размерности $< n$, длины m и Y — сигма-компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ (где $n > 3$) такие, что $\dim Y \times \prod \mathcal{X} \geq mn$. Если для почти всех отображений из $\mathfrak{F}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство $\text{Dim } F^\cap(\mathcal{X}) \cap Y \leq C$, то $\text{Dim } Y \leq C \langle + \rangle (mn - \text{Dim } \prod \mathcal{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем всюду плотную в пространстве отображений $\mathfrak{F}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$ последовательность F_i , такую что $\text{Dim}(F_i^\cap(\mathcal{X}) \cap Y) \leq C$ для любого i . Обозначим объединение этих пересечений через Y_1 . Тогда $\text{Dim } Y_1 \leq C$. Заключим Y_1 в G_δ -множество Y_1^δ , имеющее тот же размерностный код (применяем теорему Ольшевского). Тогда дополнение $Y_2 = Y \setminus Y_1^\delta$ является объединением счетного числа компактов Y_2^i , которые $\mathcal{X}$ -пренебрежимы. Тогда согласно теореме о непренебрежимости компакты Y_2^i не имеют устойчивых пересечений с $\mathcal{X}$, и по теореме об устойчивом пересечении мы заключаем, что $\dim X \times Y_2^i < n$. Поэтому код $\text{Dim } Y_2$

не превосходит $(mn - 1) [-] \dim \prod \mathcal{X}$. В таком случае для Y код оценивается сверху согласно неравенству Урысона–Дыдака величиной $((mn - 1) [-] \dim \prod \mathcal{X}) \langle + \rangle C + 1$. Поскольку $\dim \mathcal{X} < n$, постольку минорная разность в этой формуле определена и возможно сокращение единиц. В результате верхняя оценка для $\dim Y$ приобретает требуемый вид.

ЛЕММА О ТИПИЧНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ. Пусть даны компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ и поликомпакт $\mathcal{Y}$, тогда существует такая кодировка D , что:

- (1) $\dim(F^\cap(\mathcal{Y}) \cap X) \leq D$ для почти всех $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{R}^n)$;
- (2) первое условие не выполняется ни для какой $C' < C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для кодировки C положим $\mathfrak{F}_C = \{F \mid \dim(F^\cap(\mathcal{Y}) \cap X) \leq C\}$. Пусть $\Delta = \{C \in \mathfrak{C}\mathfrak{D} \mid \mathfrak{F}_C \text{ всюду плотно}\}$. Тогда, ввиду счетной тесноты кодировок, найдется такая последовательность кодировок $\{D_i\}$, нижняя грань которой, обозначаемая D , совпадает с нижней гранью Δ . При любом $C \in \Delta$ множество $\mathfrak{F}_C$ полно, как следует из поликомпактной версии леммы о полноте из §7. Тогда и $\mathfrak{F}_D$ всюду плотно и имеет тип G_δ . Поэтому D удовлетворяет первому условию. И D удовлетворяет второму условию ввиду того, что $D = \inf \Delta$.

Кодировка D , о которой идет речь в доказанной лемме, называется *типичной размерностью пересечения* компакта X и поликомпакта $\mathcal{Y}$ и обозначается $\dim_{\mathcal{Y}}^\cap X$.

С помощью этого понятия мы можем представить результат предыдущей теоремы как нижнюю оценку для типичной размерности пересечения.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях теоремы о статической томографии справедливо неравенство:

$$\dim_{\mathcal{X}}^\cap Y \geq \dim(Y \times \prod \mathcal{X}) \langle - \rangle mn.$$

Сопоставляя этот результат со статической теоремой о верхней оценке, получаем следующий результат:

ФОРМУЛА ТИПИЧНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 3$) является компактом размерности $< n$, $\mathcal{X}$ – поликомпактом размерности $\leq n - 2$ и длины m , и пусть $\dim(Y \times \prod \mathcal{X}) \geq mn$. Тогда $\dim_{\mathcal{X}}^\cap Y = C \langle + \rangle (mn - \dim \prod \mathcal{X})$.

Развитая теория позволяет также получить оценки для коэффициентных когомологических размерностей пересечений.

ЛЕММА О КОМПЛЕКСЕ ЭЙЛЕНБЕРГА–МАКЛЕЙНА. $\|\text{Cin } K(G, n)\|_G = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, комплекс Эйленберга–Маклейна характеризуется тем, что $X \tau K(G, n)$ равносильно $\dim_G X \leq n$. В силу критерия экстенсивности Дранишникова получаем отсюда, что $\text{Cin } K(G, n) = \sup\{D \mid \|D\|_G \leq n\}$. Так как существуют коды, имеющие верхнюю G -норму, равную n , то из монотонности G -нормы получаем $\|\text{Cin } K(G, n)\|_G \geq n$. С другой стороны, компакт X размерности $\dim X = \text{Cin } K(G, n)$ экстенсивен к $K(G, n)$ и потому имеет G -размерность $\leq n$. Откуда и следует обратное неравенство.

НИЖНЯЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОЦЕНКА. Пусть G – какая-то абелева группа, $\mathcal{X}$ – поликомпакт размерности $< n$, длины m и $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ – сигма-компактное множество. Тогда если $\dim(X_0 \times \prod \mathcal{X}) \geq mn$, то непустую внутренность имеет множество отображений F , удовлетворяющих неравенству

$$\dim_G X_0 \cap F^\cap(\mathcal{X}) \geq \dim_G(X_0 \times \prod \mathcal{X}) - mn.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = \dim_G(X_0 \times \prod \mathcal{X}) - mn$. Предположение противного приводит к утверждению, что всюду плотно в $\mathfrak{F}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^n)$ множество отображений F , для которых $\dim_G X_0 \cap F^\cap(\mathcal{X}) \leq N - 1$. Обозначим через C связностный код комплекса $K(G, N - 1)$. Тогда в силу критерия экстенсивности получим, что $\dim X_0 \cap F^\cap(\mathcal{X}) \leq C$ для всюду плотного множества отображений. Откуда в силу полученной выше нижней оценки типичной размерности пересечения получим неравенство $C \geq \dim(X_0 \times \prod \mathcal{X}) \rightarrow mn$. Откуда $\|C\|_G \geq \|\dim(X_0 \times \prod \mathcal{X}) \rightarrow mn\|_G$. Но $\|C\|_G = N - 1$ согласно лемме о комплексе Эйленберга–Маклейна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема об устойчивой нижней оценке

Будем говорить, что компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ динамически пренебрежим компактом Y , если для любого отображения $f: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие ε -сдвиг g компакта X и ε -близкое к f отображение f' компакта Y , что $f'(Y) \cap g(X) = \emptyset$. Другими словами, если тождественное вложение компакта X неустойчиво пересекает класс отображений $\mathfrak{F}(Y, \mathbb{R}^n)$.

АДДИЦИОННАЯ ЛЕММА. Если два компакта $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ являются динамически пренебрежимыми компактом Y , а их пересечение является Y -пренебрежимым, то их объединение будет динамически Y -пренебрежимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны произвольное отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ и положительное ε . В силу условия пренебрежимости пересечения можем, не нарушая общности рассуждений, предполагать, что $f(Y) \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Пусть δ столь мало, что $f(Y) \cap O_\delta X_1 \cap O_\delta X_2 = \emptyset$. Пусть $\gamma = \frac{1}{9} \min\{\delta, \varepsilon\}$. В силу динамической пренебрежимости X_i ($i = 1, 2$) найдутся такое γ -близкое к f отображение f_i и такой γ -сдвиг $g_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $g_i(X_i) \cap f_i(Y) = \emptyset$.

Пусть $Y_i = \{y \in Y \mid \text{dist}(f(y), X_i) < 4\gamma\}$ ($i = 1, 2$) и $Y_0 = Y \setminus (Y_1 \cup Y_2)$. Множества Y_1 и Y_2 не пересекаются, ибо $4\gamma < \delta/2$. Зафиксируем функцию Урысона $\beta(y)$ так, что $\beta(Y_1) = 0$ и $\beta(Y_2) = 1$.

Пусть также X_0 – это открытая γ -окрестность пересечения $X_1 \cap X_2$ в X и $\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ – функция Урысона, принимающая значение 0 на X_1 и 1 на X_2 .

Произвольным образом продолжая отображения g_1 и g_2 до γ -сдвигов всего X , определим теперь отображения $f': Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующими формулами:

$$f'(y) = (1 - \beta(y))f_1(y) + \beta(y)f_2(y), \quad g(x) = (1 - \alpha(x))g_1(x) + \alpha(x)g_2(x).$$

Тогда f' будет γ -близко к f , а g будет γ -сдвигом. Убедимся, что $g(X) \cap f'(Y) = \emptyset$. Если $y \in Y_1$, то $f'(y) = f_1(y)$ не принадлежит $g(X_1 \setminus X_0) = g_1(X_1 \setminus X_0)$ в силу условия $g_1(X_1) \cap f_1(Y) = \emptyset$. Далее, $X_0 \cup X_2$ содержится в γ -окрестности X_2 , поэтому

образ этого множества при g содержится в 2γ -окрестности компакта X_2 . С другой стороны, $\text{dist}(f'(y), f(y)) < \gamma$, поэтому принадлежность $g(y)$ образу $f'(X_0 \cup X_2)$ влечет неравенство $\text{dist}(f(y), X_2) < 3\gamma$, что несовместимо с принадлежностью $y \in Y_1$. Итак, $f'(Y_1) \cap g(X) = \emptyset$. Аналогично $f'(Y_2) \cap g(X) = \emptyset$. Если же $y \in Y_0$, то $\text{dist}(f(y), X) > 4\gamma$, поэтому $\text{dist}(f'(y), X) > 3\gamma$, откуда $\text{dist}(f'(y), g(X)) > 2\gamma$. То есть $f'(y) \notin g(X)$. Что и завершает доказательство.

ЛЕММА О ГИПЕРПЛОСКОМ КОМПАКТЕ. *Всякий компакт X коразмерности > 2 , лежащий в гиперплоскости, ручной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем H линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$. В силу леммы об одномерном пересечении с диском для почти всех отображений диска D прообраз H одномерен. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — одно из таких отображений. В силу теоремы Франкля при любом $\varepsilon > 0$ найдется ε -близкое к f отображение $g: f^{-1}(f(D) \cap H) \rightarrow H$, образ которого не пересекает X . Пусть $df: D \rightarrow H$ — отображение, по модулю не превосходящее ε и продолжающее отображение $f - g$ с $f^{-1}(f(D) \cap H)$ на все D . Тогда $f + df$ будет отображением, ε -близким к f и не пересекающим X .

Компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *клеточно-разделенным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество дизъюнктивных n -клеток (т.е. компактов гомеоморфных n -шару) диаметров, меньших ε , внутренности которых покрывают X .

КРИТЕРИЙ МАК-МИЛЛАНА [45]. *Нульмерное подмножество в $\mathbb{R}^n$ является клеточно-разделенным в том и только том случае, когда оно ручное.*

Критерий Мак-Миллана имеет сравнительно элементарное доказательство при $n > 4$ и именно при этом ограничении доказан Мак-Милланом. При $n = 4$ он вытекает из результатов Фридмана о четырехмерной гипотезе Пуанкаре. В размерности 3 его нетрудно вывести из леммы Дена.

ЛЕММА О ε -ИЗОТОПИИ. *Пусть дан X — ручной нульмерный компакт, а Y — некоторое замкнутое нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется ε -изотопия, сдвигающая X с Y и неподвижная за пределами ε -окрестности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покроем X дизъюнктивными клетками C_i диаметров $< \varepsilon$. Во внутренности каждой клетки выберем точку x_i , не лежащую в Y . Введем на C_i координаты так, чтобы она представляла собой единичный шар с центром в x_i . Тогда для некоторого $r > 0$ шар радиуса r не пересекает Y и для некоторого $R < 1$ шар радиуса R содержит $X \cap C_i$. Если теперь обозначить через $l(t)$ гомеоморфизм отрезка $[0, 1]$, для которого $l(1) = 1$ и $l(R) = r$, то изотопия в сферических координатах φ, ρ , задаваемая формулой $(\varphi, \rho) \rightarrow (\varphi, (1-t)\rho + tl(\rho))$ неподвижна на границе клетки и сдвигает $X \cap C_i$ с Y . Совокупность таких изотопий задает неподвижную за пределами объединения клеток искомую изотопию пространства.

ЛЕММА О НУЛЬМЕРНОМ F_σ . *Пусть дана последовательность нульмерных компактов X_i , тогда существует последовательность дизъюнктивных компактов с диаметрами, стремящимися к нулю, и таким же объединением, как первая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X'_i = X_i \setminus \bigcup_{j < i} X_j$. Тогда X'_i является дизъюнктной последовательностью из локально-компактных нульмерных множеств. Каждое X'_i можно представить в виде объединения растущей последовательности дизъюнктивных открыто-замкнутых компактных подмножеств $X_{i,j}, j \in \mathbb{N}$. Каждое $X_{i,j}$ представим в виде объединения конечного числа дизъюнктивных компактов $X_{i,j,k}$ диаметров $< 1/(i+j)$. Тогда совокупность всех $X_{i,j,k}$ является искомой последовательностью.

Следующая лемма для ручных X была доказана в [19].

ЛЕММА О ГИПЕРПЛОСКОМ СЕЧЕНИИ. *Для всякого компакта X , лежащего в $\mathbb{R}^n$, и гиперплоскости H при любом $\varepsilon > 0$ найдется гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ε -близкий к тождественному, для которого $\text{Dim}(h(X) \cap H) \leq \text{Dim } X \leftarrow 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \text{Dim } X \leftarrow 1$. Тогда $\text{Dim } X \leq D + 0 + 1$, и по критерию экстенсивности имеем $X \tau \Sigma L$, где $\text{Cin } L = D$. По уточненной теореме о разложении получаем разложение $X = X_1 \cup X_2$ в виде таких двух G_δ -множеств, что $X_1 \tau D$, $\dim X_2 = 0$ и X_1 содержит множество дикости компакта X . Тогда дополнение к X_1 , обозначаемое Y , является объединением счетного числа ручных нульмерных компактов. И лемма будет доказана, если мы построим малую изотопию пространства $\mathbb{R}^n$, сдвигающую Y с H . На основании леммы о F_σ -множестве представим Y в виде объединения последовательности Y_i непересекающихся компактов со стремящимися к нулю диаметрами. Пространство гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ топологически полно, поэтому на нем существует полная метрика ρ . Приняв это, строим ρ -последовательность Коши гомеоморфизмов $\{h_i\}$, предел которой и даст нужный гомеоморфизм, сдвигающий Y с H . На первом шаге мы построим гомеоморфизм h_1 , сдвигающий Y_1 с H , находящийся на не более чем единичном ρ -расстоянии от тождественного и сдвигающий точки меньше чем на $\varepsilon/2$. На k -м шаге мы строим гомеоморфизм h_k , неподвижный на всех X_i при $i < k$, сдвигающий точки меньше чем на $\varepsilon/2^k$ и такой, что $\rho(h_k, h_{k-1}) < 1/2^k$. Все это можно сделать на основании леммы о ε -изотопии. Тогда предел последовательности h_k будет гомеоморфизмом ввиду полноты метрики ρ , будет ε -сдвигом и будет сдвигать объединение X_i с H . Что и требовалось доказать.

ЛЕММА О ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. *Ручной динамически Y -пренебрежимый компакт X коразмерности > 2 является Y -пренебрежимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем вести индукцией по размерности X . Если $\dim X = 0$ и X является динамически Y -пренебрежимым, то $\dim Y < n$. Действительно, в противном случае найдется существенное, в смысле Александрова, отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ на шар, содержащий X в своей внутренности. Тогда всякое достаточно близкое отображение к f имеет образ, содержащий некоторую ε -окрестность компакта X , и потому пересекает образы X при ε -сдвигах. А раз $\dim Y < n$, то $\dim X \times Y < n$ и X является Y -пренебрежимым в силу критерия Дранишников.

Пусть для компактов размерности $< k$ утверждение доказано. Рассмотрим динамически Y -пренебрежимый компакт X размерности k . Докажем, что X с Y в $\mathbb{R}^n$ не имеют устойчивых пересечений. Пусть дано какое-то отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ и положительное ε . Зафиксируем столь мелкую триангуляцию на $\mathbb{R}^n$, чтобы линеаризация продолжения f на некоторую подиэдральную окрестность OX компакта X была ε -близка к f . Далее, эту линеаризацию l мы, как в аппроксимационной лемме, можем считать однозначной на всех симплексах триангуляции. Саму триангуляцию

мы в силу леммы о гиперплоском сечении можем, не нарушая общности, считать такой, что ее $(n - 1)$ -мерный остов пересекает X по множеству размерности $< k$. Это множество ручное в силу леммы о гиперплоских подмножествах. И в силу индукционного предположения мы можем заключить, что оно Y -пренебрежимо. Тогда образ $l(X)$ будет объединением конечного числа динамически Y -пренебрежимых компактов (образов пересечений X с n -мерными симплексами триангуляции), пересечения которых с объединениями остальных являются Y -пренебрежимыми. Поэтому аддиционная лемма позволяет нам утверждать, что $l(Y)$ динамически Y -пренебрежим. Тогда l не может устойчиво пересекать никакого отображения из Y в $\mathbb{R}^n$. Тогда и f не может ε -устойчиво пересекать никакого отображения из $\mathfrak{F}(Y, \mathbb{R}^n)$. А ввиду произвольности ε отсюда получаем отсутствие устойчивых пересечений компактов X и Y в $\mathbb{R}^n$. Теперь на основании теоремы об устойчивых пересечениях получаем $\dim X \times Y < n$ и на основании критерия Дранишникова получаем Y -пренебрежимость компакта X . Это доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанные выше аддиционная лемма и лемма о динамической пренебрежимости верны и для поликомпактов. Доказательство не меняется.

Для компакта X коразмерности 2, являющегося динамически Y -пренебрежимым, мы на основании тех же рассуждений можем доказать неравенство $\dim X \times Y < n$, но не можем заключить отсюда его Y -пренебрежимость. Таким образом, справедливо также следующее утверждение.

ТЕОРЕМА О ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕПРЕНЕБРЕЖИМОСТИ. Если компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ и поликомпакт $\mathcal{Y}$ длины m имеют размерности $\leq n - 2$ и $\dim(X \times \prod \mathcal{Y}) \geq mn$, то X не является динамически Y -пренебрежимым.

ЛЕММА О СДВИГЕ. Пусть компакты $X_1, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^n$ пересекаются по множеству размерности m , тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ε -сдвиг $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\dim(h(X_1) \cap \dots \cap h(X_k)) \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – какое-то ε -покрытие пересечения $\bigcap X_i$ открытыми в $\mathbb{R}^n$ множествами кратности $\leq m + 1$. Объединение элементов покрытия обозначим U . Пусть $\delta < \varepsilon$ – какое-то положительное число, меньшее всех диаметров множеств из $\bigcup X_i \setminus U$, пересекающих все X_i . Пусть α – такое покрытие множества $\bigcup X_i \setminus U$ открытыми в $\mathbb{R}^n$ множествами, что максимальный диаметр составляющих его множеств меньше чем $\delta/6$ и все его элементы пересекают $\bigcup X_i \setminus U$. Тогда $\beta = \alpha \cup \omega$ является покрытием для $\bigcup X_i$. Выбрав в каждом β по точке, рассмотрим барицентрическое отображение $g: \bigcup X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, переводящее точку $x \in \bigcup X_i$ в центр тяжести системы выбранных точек с весами, равными расстоянию от x до дополнения, соответствующего выбранной точке, элемента покрытия β . Тогда g и является искомым ε -сдвигом. Действительно, пусть множество A пересекает все X_i и переходит при g в некоторую точку. Тогда A обязательно содержит точку, не покрытую α . Действительно, в противном случае для всякого $a \in A$ найдется $V \in \alpha$ такой, что $a \in V$. А так как V пересекает $\bigcup X_i \setminus U$, то найдется $a' \in \bigcup X_i \setminus U$, которая $\delta/3$ -близка к a . Совокупность таких точек составляет множество A' диаметра меньше чем $\text{diam } A + \delta/3$. Но множество A имеет диаметр, не превосходящий $\delta/3$, ибо переходит в точку посредством $\delta/6$ -сдвига. Таким образом, получаем, что A' имеет диаметр $< \delta$, не пересекает U и пересекает все X_i , что противоречит выбору δ .

Итак, имеется $a \in A$, не покрытая элементами α . Но тогда ее образ, совпадающий с $g(A)$, принадлежит образу нерва покрытия ω . То есть мы доказали, что $\bigcap g(X_i)$ содержится в образе нерва покрытия ω , и потому имеет размерность $\leq m$, что и требовалось доказать.

Определим *устойчивую размерность пересечения* отображения $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с множеством Y , обозначаемую $\text{sdim } Y \cap F$, как наименьшее целое m , для которого при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такое ε -близкое к F отображение G и такой ε -сдвиг g компакта Y , что $\dim g(Y) \cap G^\cap(\mathcal{X}) \leq m$.

ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОЙ НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ. Пусть Y является компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim Y < n$ и $\mathcal{X}$ такой поликомпакт размерности $< n - 1$ и длины m , что $N = \dim(Y \times \prod \mathcal{X}) \geq mn$. Тогда множество отображений $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых $\text{sdim } Y \cap F \geq N - mn$, имеет непустую внутренность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = (n + 1)m - N$ и B^k – шар размерности k . Тогда $0 \leq k \leq n$ в силу имеющихся у нас ограничений. Составной поликомпакт $Y, \mathcal{X}, B^k$ в таком случае имеет размерность произведения составляющих его компактов, равную $(n + 1)m$, и согласно теореме об устойчивых пересечениях имеет в $\mathbb{R}^n$ устойчивые пересечения. Отсюда согласно теореме о динамической непренебрежимости получаем, что Y не является динамически пренебрежимым составным поликомпактом $B^k, \mathcal{X}$. Следовательно, найдутся такое отображение $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и такое отображение $g: B^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, что составное отображение $i, g, F: Y, B^k, \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ устойчиво пересекается. Здесь через i обозначено тождественное вложение компакта Y в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что тогда $\text{sdim } Y \cap F \geq n - k$. Предположим, что имеется $\varepsilon/2$ -близкое к F отображение F' , для которого $\dim Y \cap F'^\cap(\mathcal{X}) < n - k$. В силу леммы о сдвиге найдется $\varepsilon/2$ -сдвиг h объединения образов составляющих F' отображений f'_i и компакта Y такой, что пересеченный образ отображения $hF' = \{hf'_i\}$ пересекает $h(Y)$ по подмножеству полиэдра размерности $< n - k$. Но тогда мы можем заменить отображение шара B^k на ε -близкое и не пересекающее $hG^\cap(\mathcal{X}) \cap h(Y)$ отображение g' . В результате получаем, что составное отображение h, g', hF' является ε -близким к i, g, F и имеет пустой пересеченный образ. Ввиду произвольности ε это противоречит предположению об устойчивости пересечения i, g, F . Таким образом, доказано, что $\text{sdim } Y \cap F \geq n - k$. Вспоминая теперь, что $k = (n + 1)m - N$, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Будем говорить, что компакт X имеет *устойчивый размерностный тип*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всякого ε -отображения $f: X \rightarrow Y$ будет $\text{Dim } Y \geq \text{Dim } X$. Следующее утверждение автору доказать не удалось:

ГИПОТЕЗА. Если компакты X, Y , коразмерности 2, имеют устойчивый размерностный тип, то множество пар отображений $f, g: X, Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых $\text{Dim } f(X) \cap g(Y) \geq \text{Dim}(X \times Y) \langle \rightarrow \rangle n$, имеет непустую внутренность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. М.: Гостехиздат, 1951.
- [2] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [3] Гуревич В., Волмен Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
- [4] Alexandroff P. S. Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 161–238.
- [5] Понтрягин Л. С. О моих работах по топологии и топологической алгебре // Труды МИАН. 1984. Т. 168. С. 236–249.
- [6] Pontryagin L. S. Sur une hypothèse fondamentale de la dimension // C. R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1105–1107.
- [7] Dranishnikov A. N., Repovs D., Shchepin E. V. On approximation and embedding problems for cohomological dimension // Topol. Appl. 1994. V. 55. № 1. P. 67–86.
- [8] Болтянский В. Г. Пример двумерного компакта, топологический квадрат которого имеет размерность, равную трем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 67. № 4. С. 597–599.
- [9] Болтянский В. Г. О размерной полнотности компактов // Докл. АН СССР. 1949. Т. 67. № 5. С. 773–777.
- [10] Бокштейн М. Ф. О гомологических инвариантах топологических пространств, I // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 3–80.
- [11] Бокштейн М. Ф. О гомологических инвариантах топологических пространств, II // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 3–133.
- [12] Kodama Y. On a problem of Alexandroff concerning the dimension of product spaces, I // J. Math. Soc. Japan. 1958. V. 10. P. 380–404.
- [13] Kodama Y. Test spaces for homological dimension // Duke Math. J. 1962. V. 29. P. 41–50.
- [14] Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // УМН. 1968. Т. 23. № 5. С. 3–49.
- [15] Дранишников А. Н. О реализации размерных функций. II // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 1. С. 32–38.
- [16] Дранишников А. Н. Гомологическая теория размерности // УМН. 1988. Т. 43. № 4. С. 11–55.
- [17] McCullough D., Rubin L. R. Some m -dimensional compacta admitting a dense set of imbeddings into $\mathbb{R}^{2^m}$ // Fund. Math. 1989. V. 133. № 3. P. 237–245.
- [18] Spiez S., Toruńczyk H. Moving compacta in $\mathbb{R}^n$ apart // Topol. Appl. 1991. V. 41. № 3. P. 193–204.
- [19] Dranishnikov A. N., Repovs D., Shchepin E. V. Transversal intersection formula // Topol. Appl. 1998. V. 85. P. 93–117.
- [20] Dranishnikov A. N. On the mapping intersection problem // Pacific J. Math. 1996. V. 173. № 2. P. 403–412.
- [21] Дранишников А. Н. Продолжение отображений в CW комплексы // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 9. С. 1300–1310.
- [22] Dranishnikov A. N., Repovs D., Shchepin E. V. On the failure of the Urysohn–Menger sum formula for cohomological dimension // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 1267–1270.
- [23] Rubin L. R. Characterizing cohomological dimension: The cohomological dimension of $A \cup B$ // Topol. Appl. 1991. V. 40. № 3. P. 233–263.
- [24] Dydak J. Cohomological dimension of metrizable spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 337. № 1. P. 219–234.
- [25] Dydak J. Cohomological dimension of metrizable spaces, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. № 4. P. 1647–1661.
- [26] Olszewski W. Completion theorem for cohomological dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 2261–2264.
- [27] Александров П. С. Гомологическая теория размерности. М.: Наука, 1971.
- [28] Скляренко Е. Г. О зацеплении циклов // УМН. 1966. Т. 21. № 4. С. 77–90.

- [29] Dranishnikov A. N., Dydak J. Extension dimension and extension types // Труды МИАН. 1996. Т. 212. С. 61–94.
- [30] Dranishnikov A. N., Repovs D. Cohomological dimension with respect to perfect groups // Topol. Appl. 1996. V. 20. P. 1–18.
- [31] Dydak J., Yokoi K. Hereditarily aspherical compacta // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 6. P. 1933–1940.
- [32] Постников М. М. Локализация топологических пространств // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 117–181.
- [33] Дранишников А. Н. О теории продолжения отображений компактов // УМН. 1998. № 5. С. 65–72.
- [34] Dranishnikov A. N. On the dimension of the product of two compacta and the dimension of their intersection in general position in Euclidean space // Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [35] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [36] Walsh J. J. Dimension, cohomological dimension, and cell-like mappings // Lecture Notes in Math. 1981. V. 870. P. 105–118.
- [37] Дранишников А. Н. Теорема Эйленберга–Борсука для отображений в произвольный комплекс // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 81–90.
- [38] Сулливан Д. Геометрическая топология. М.: Мир, 1975.
- [39] Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte // Ann. of Math. 1958. V. 67. P. 239–281.
- [40] Dranishnikov A., Dydak J. Extension theory of separable metrizable spaces with applications to dimension theory // Preprint, 1997.
- [41] Dranishnikov A. N., Uspenskij V. V. Light maps and extensional dimension // Topol. Appl. 1997. V. 80. № 1–2. P. 91–99.
- [42] Chogoshvili G. S. On a theorem in the theory of dimensionality // Compositio Math. 1937. V. 5. P. 292–298.
- [43] Dranishnikov A. N. On Chogoshvili's conjecture // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 7. P. 2155–2160.
- [44] Frankl F. Charakterisierung der $(n - 1)r$ -dimensionalen abgeschlossenen Mengen des R^n // Math. Ann. 1930. V. 103. P. 784–787.
- [45] Штанько М. А. Вложения компактов в евклидово пространство // Матем. сб. 1970. Т. 83. № 2. С. 234–255.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: scepini@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
03.09.1998