Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Х. Сендов, Хаусдорфово расстояние и обработка изображений, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 127–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:59:12

УДК 517.518.222

ХАУСДОРФОВО РАССТОЯНИЕ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Б. Сендов

Математические методы обработки изображений используют функциональные пространства, которые обычно являются банаховыми пространствами с интегральными L_p -нормами. Математические модели изображений являются функциями, принадлежащими этим пространствам. Вопрос о том, для какого значения p расстояние между двумя функциями более естественно, если эти функции представляют изображения, или в какой метрике наши глаза измеряют расстояние между изображениями, является предметом дискуссии. В этой статье мы приводим доводы в пользу большей естественности хаусдорфова расстояния (различия) между изображениями по сравнению с любой L_p -нормой.

Библиография: 11 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	127
2. Пространства функций с хаусдорфовой метрикой	128
2.1. Хаусдорфово расстояние между множествами	128
2.2. Пополненный график	129
2.3. Хаусдорфово расстояние с параметром α	130
2.4. Интегральное хаусдорфово расстояние	132
2.5. ϵ -энтропия и ϵ -емкость	132
3. Математическое моделирование изображения	134
3.1. Функции элемента изображения	134
4. Обработка изображений	135
4.1. Аппроксимация по отношению к хаусдорфову расстоянию	135
Список литературы	136

1. Введение

На столетнем юбилее великого математика Андрея Николаевича Колмогорова мне посчастливилось говорить о предмете, который я начал изучать под его влиянием. В 1960/61 учебном году мне удалось провести весь год в Московском государственном университете и принять участие в семинаре Колмогорова по теории функций. В то время одной из тем этого семинара было изучение ϵ -энтропии, ϵ -емкости и поперечников функциональных пространств. Колмогоров ввел понятие вполне ограниченных функциональных пространств, имеющих конечную ϵ -энтропию и ϵ -емкость. Многие

математики занимались тогда вычислением этих характеристик для различных множеств функций по отношению к различным метрикам. Я пытался определить такую метрику r на множестве F равномерно ограниченных непрерывных функций, чтобы метрическое пространство (F, r) было вполне ограниченным; иначе говоря, чтобы оно имело конечную ε -энтропию и ε -емкость для любого $\varepsilon > 0$. Хорошо известно, что такое множество F не вполне ограничено по отношению к любой L_p -норме, $1 \leq p \leq \infty$.

Я был счастлив обнаружить такую метрику, и Колмогоров сообщил мне, что это — метрика Хаусдорфа, но проявил некоторый интерес к моим исследованиям по теории аппроксимации по отношению к хаусдорфову расстоянию. Несколькоими годами позже он предложил мне написать обзорную статью для журнала “Успехи математических наук” [7] по этой тематике. Функциональное пространство с хаусдорфовой метрикой не является банаховым пространством, и поэтому хаусдорфовы аппроксимации [8] несколько своеобразны и более сложны.

Наша цель в этой статье — показать, что хаусдорфово расстояние [7] более естественно для измерения расстояний между двумя изображениями при обработке изображений, чем любая L_p норма или равномерная норма. Мы даем сначала обзор свойств функциональных пространств с хаусдорфовой метрикой и затем рассматриваем интерпретацию функций как изображений.

2. Пространства функций с хаусдорфовой метрикой

Обычные метрики в теории функций порождены соответствующей нормой. Например, равномерная метрика в пространстве непрерывных функций, определенных на компакте Ω ,

$$\|f - g\| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \Omega\},$$

порождена равномерной нормой $\|f\| = \|f - 0\|$. Одна из особенностей хаусдорфова расстояния состоит в том, что оно не порождено нормой.

2.1. Хаусдорфово расстояние между множествами. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, где $\rho(a, b)$ есть расстояние между двумя элементами $a, b \in M$. Как правило, расстояние между точкой $b \in M$ и множеством $A \subset M$ определяется формулой $\rho(b; A) = \inf_{a \in A} \rho(a, b)$, а “расстояние” между двумя подмножествами $A, B \subset M$ определяется формулой

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A} \rho(a; B) = \inf_{b \in B} \rho(b; A). \quad (2.1)$$

“Расстояние” между двумя подмножествами данного метрического пространства, определенное формулой (2.1), не является настоящим расстоянием. Нетрудно видеть, что $\rho(A, B) = 0$, если A и B имеют общую точку или общую предельную точку.

Хаусдорф в своей знаменитой книге [4] определил расстояние между подмножествами данного метрического пространства по-другому. Пусть $A \subset M$. Обозначим через $U(\epsilon, A)$ множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих условию $\rho(x; A) \leq \epsilon$, где $\epsilon \geq 0$, т.е.

$$U(\epsilon, A) = \{x : x \in M \text{ и } \rho(x; A) \leq \epsilon\}.$$

Нижняя грань $h(A, B)$ чисел ϵ таких, что $U(\epsilon, A) \supset B$ и $U(\epsilon, B) \supset A$, называется *хаусдорфовым расстоянием* или *расстоянием в смысле отклонения множеств* между множествами A и B , индуцированным расстоянием ρ . Если M полно и 2^M — множество всех компактных подмножеств M , то хаусдорфово расстояние между подмножествами является метрикой в 2^M .

2.2. Пополненный график. Чтобы определить хаусдорфово расстояние между двумя функциями, мы можем использовать их графики. Это возможно для непрерывных функций, определенных на компакте, поскольку их графы являются ограниченными замкнутыми точечными множествами. Но таким способом мы получаем метрическое пространство функций, которое само не является компактным. Например, рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ nx & \text{при } 0 < x < n^{-1}, \\ 1 & \text{при } n^{-1} \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (2.2)$$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Последовательность графиков функций в (2.2) является последовательностью Коши по отношению к хаусдорфову расстоянию, но график функции (2.3) не является пределом последовательности (2.2).

Чтобы сделать пространство непрерывных функций с хаусдорфовым расстоянием компактным, мы должны пополнить пространство некоторыми функциями, не являющимися непрерывными.

В связи с нашей дальнейшей интерпретацией функций как изображений, мы будем рассматривать множество $\mathcal{F}_\Delta$ вещественных функций, определенных и ограниченных на единичном квадрате $\Delta = [0, 1]^2$.

Определим для любой функции $f \in \mathcal{F}_\Delta$ *расширенные бэровские функции*

$$\begin{aligned} I(\Delta, \delta, f; x, y) &= I(\delta, f; x, y) = \inf \{f(\xi, \eta); |x - \xi| \leq \delta, |y - \eta| \leq \delta\}, \\ S(\Delta, \delta, f; x, y) &= S(\delta, f; x, y) = \sup \{f(\xi, \eta); |x - \xi| \leq \delta, |y - \eta| \leq \delta\} \end{aligned}$$

и *бэровские функции*

$$\begin{aligned} I(\Delta, f; x, y) &= I(f; x, y) = \lim_{\delta \rightarrow +0} I(\delta, f; x, y), \\ S(\Delta, f; x, y) &= S(f; x, y) = \lim_{\delta \rightarrow +0} S(\delta, f; x, y). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пополненный график* [8] функции $f \in \mathcal{F}_\Delta$ есть функция со значениями в промежутках $F(f)$, определенная формулой

$$F(f; x, y) = [I(f; x, y), S(f; x, y)].$$

Две функции $f, g \in \mathcal{F}_\Delta$ будут рассматриваться как эквивалентные, $f \approx g$, если $F(f) = F(g)$. Это условие разбивает множество $\mathcal{F}_\Delta$ на классы эквивалентности.

Кроме того, очевидно, что график каждой функции f , рассматриваемый как точечное множество в единичном кубе, является подмножеством множества $F(f)$ и если f непрерывна, то $F(f; x, y) = f(x, y)$ для любых $(x, y) \in \Delta$. Это значит, что для непрерывной функции f из условия $F(g) \subset F(f)$ следует, что $F(g) = F(f)$ и $g = f$.

Пополненный график $F(f)$ функции $f \in \mathcal{F}_\Delta$ — наименьшее замкнутое ограниченное точечное множество куба $[0, 1]^3$, которое выпукло относительно оси z и содержит график f . Пополненный график функции может иметь положительный объем. В этом направлении справедлив следующий результат [11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in \mathcal{F}_\Delta$. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции f по Риману состоит в том, что пополненный график этой функции имеет нулевой объем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пополненный график $F(f)$ функции f — ограниченное замкнутое множество; следовательно, это множество измеримо. Его мера равна

$$\mu(F(f)) = \iiint_{F(f)} dx dy dz.$$

По теореме Фубини,

$$\begin{aligned} \iiint_{F(f)} dx dy dz &= \iint_{\Delta} \{S(f; x, y) - I(f; x, y)\} dx dy \\ &= \iint_{\Delta} S(f; x, y) dx dy - \iint_{\Delta} I(f; x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где $S(f)$ и $I(f)$ — верхняя и нижняя бэровские функции для f . Они полунепрерывны и поэтому интегрируемы по Лебегу. Следовательно, если $\mu(F(f)) = 0$, то

$$\iint_D S(f; x, y) dx dy = \iint_D I(f; x, y) dx dy \quad (2.4)$$

и обратно. Однако из условия (2.4) следует, что f интегрируема по Риману. Обратное также верно, поскольку из интегрируемости по Риману функции f следует, что множество точек разрыва функции f имеет нулевую меру. Так как $S(f; x, y) = I(f; x, y)$ выполняется почти всюду, теорема доказана.

2.3. Хаусдорфово расстояние с параметром α . Для любого $\alpha > 0$ определим коробочное расстояние между двумя точками $u = (x, y, z)$ и $v = (\xi, \eta, \zeta)$ по формуле

$$\rho_\alpha(u, v) = \max\{|z - \zeta|, \alpha^{-1} \max\{|x - \xi|, |y - \eta|\}\}. \quad (2.5)$$

Единичный шар расстояния $\rho_\alpha(u, v)$ является коробкой (прямоугольным параллелепипедом) с основанием в виде квадрата со стороной длины 2α и с высотой 2.

Хаусдорфово расстояние с параметром α между функциями $f, g \in \mathcal{F}_\Delta$ определяется как хаусдорфово расстояние между двумя замкнутыми ограниченными точечными множествами $F(f), F(g)$ в $\Delta \times \mathbb{R}$. Обозначим это расстояние через $r(\alpha; f, g)$.

Эквивалентное определение хаусдорфова расстояния между двумя функциями $f, g \in \mathcal{F}_\Delta$ дается формулой

$$r(\alpha; f, g) = \max\left\{\sup_{u \in F(f)} \inf_{v \in F(g)} \rho_\alpha(u, v), \sup_{u \in F(g)} \inf_{v \in F(f)} \rho_\alpha(u, v)\right\}. \quad (2.6)$$

При $\alpha = 1$ мы будем писать $r(1; f, g) = r(f, g)$. Очевидно, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\alpha; f, g) = \sup_{(x, y) \in \Delta} |f(x, y) - g(x, y)| = \|f - g\|,$$

и, следовательно, равномерное расстояние является предельным случаем хаусдорфовой метрики с параметром α , когда α стремится к нулю.

Если $g(x) = 0$ при $x \in \Delta$, то $r(\alpha; f, g) = r(\alpha; f, 0) = \|f\|$ и, следовательно, хаусдорфово расстояние продуцирует ту же норму, что и равномерное расстояние.

2.3.1. Хаусдорфово непрерывные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f \in \mathcal{F}_\Delta$. Определим *модуль H -непрерывности* функции f с параметром α формулой

$$\tau(\alpha, f; \delta) = r(\alpha; S(\delta/2, f), I(\delta/2, f)).$$

Следующие факты непосредственно вытекают из определения модуля H -непрерывности.

i) Модуль H -непрерывности не превосходит модуля непрерывности непрерывных функций:

$$\tau(\alpha, f; \delta) \leq \omega(f; \delta) = \sup_{(x,y), (\xi, \eta) \in \Delta} \{|f(x, y) - f(\xi, \eta)| : \max\{|x - \xi|, |y - \eta|\} \leq \delta\}.$$

Действительно, из определения следует, что

$$\begin{aligned} \tau(\alpha, f; \delta) &= r(\alpha; S(\delta/2, f), I(\delta/2, f)) \\ &\leq \sup_{(x,y) \in \Delta} |S(\delta/2, f; x, y) - I(\delta/2, f; x, y)| = \omega(f; \delta). \end{aligned}$$

ii) Модуль H -непрерывности стремится к модулю непрерывности, если параметр α стремится к нулю:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \tau(\alpha, f; \delta) = \omega(f; \delta).$$

iii) Модуль H -непрерывности – монотонно невозрастающая функция δ , т.е. если $\delta_1 \leq \delta_2$, то $\tau(\alpha, f; \delta_1) \leq \tau(\alpha, f; \delta_2)$.

Назовем функцию f *хаусдорфово непрерывной* (H -непрерывной), если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau(\alpha, f; \delta) = 0.$$

Если f H -непрерывна, то любая другая функция g с пополненным графиком $F(g) \subset F(f)$ эквивалентна f . Равенство $F(S(f)) = F(I(f))$ является необходимым и достаточным условием того, что f H -непрерывна, и, следовательно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Любая H -непрерывная функция интегрируема по Риману.*

Определим теперь хаусдорфово расстояние другим способом, но только для H -непрерывных функций. Эти два определения равносильны [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Определим абсолютное значение *h -разности с параметром* $\alpha > 0$ между двумя функциями $f, g \in \mathcal{F}_\Delta$ формулой

$$|f(x, y) \ominus_\alpha g(x, y)| = \max \left\{ \inf_{u \in F(g)} \rho_\alpha(u, (x, y, f(x, y))), \inf_{u \in F(f)} \rho_\alpha(u, (x, y, g(x, y))) \right\}.$$

Положим тогда

$$r(\alpha; f, g) = \sup_{(x,y) \in \Delta} |f(x, y) \ominus_\alpha g(x, y)|.$$

Эквивалентность двух определений для H -непрерывных функций вытекает из следующего утверждения [10].

ТЕОРЕМА 3. Если f и g H -непрерывны, то

$$r(\alpha; f, g) = \sup_{(x, y) \in \Delta} |f(x, y) \ominus_{\alpha} g(x, y)|.$$

2.4. Интегральное хаусдорфово расстояние. Пусть $f, g \in \mathcal{F}_{\Delta}$ H -непрерывны и, следовательно, интегрируемы по Риману на Δ . Тогда функция $h(x, y) = |f(x, y) \ominus_{\alpha} g(x, y)|$ тоже интегрируема по Риману. Для $\alpha = 1$ положим $\ominus_1 = \ominus$.

Важно отметить, что неравенство

$$|f(x, y) \ominus_{\alpha} g(x, y)| \leq |f(x, y) \ominus_{\alpha} v(x, y)| + |v(x, y) \ominus_{\alpha} g(x, y)| \quad (2.7)$$

выполняется не для любых трех функций $f, g, v \in \mathcal{F}_{\Delta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для любого числа $p \in [1, \infty)$ определим *интегральное хаусдорфово расстояние* между двумя H -непрерывными функциями f, g [9] по формуле

$$R_{\alpha, p}(f, g) = \left\{ \int_{\Delta} |f(x, y) \ominus_{\alpha} g(x, y)|^p dx dy \right\}^{1/p}, \quad \alpha > 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для любых двух H -непрерывных функций f, g выполняется неравенство

$$R_{\alpha, p}(f, g) \leq \|f - g\|_{L_p} = \left\{ \int_D |f(x, y) - g(x, y)|^p dx dy \right\}^{1/p}, \quad \alpha > 0, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} R_{\alpha, p}(f, g) = \|f - g\|_{L_p}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} R_{\alpha, p}(f, g) = r(\alpha; f, g).$$

2.5. ε -энтропия и ε -емкость. Понятия ε -энтропии и ε -емкости функциональных пространств были введены Колмогоровым [5] для характеристики массивности этих пространств. Введем следующую важную терминологию.

Пусть X – метрическое пространство, и пусть A – непустое подмножество X . Семейство подмножеств Γ множества X называется ε -*покрытием* A , если диаметр $d(U)$ каждого элемента $U \in \Gamma$ не превосходит 2ε , причем $A \subset \bigcup \{U : U \in \Gamma\}$. Подмножество V множества X называется ε -*дискретным*, если расстояние между любыми различными точками множества V больше ε . По лемме Цорна любое подмножество A множества X имеет максимальное ε -дискретное подмножество V , и шары радиуса ε , центры которых пробегает V , образуют ε -покрытие A .¹ Множество A называется *вполне ограниченным*, если оно допускает конечное ε -покрытие для любого $\varepsilon > 0$.

Предположим теперь, что A вполне ограничено. Введем следующие обозначения:

$N_{\varepsilon}(A)$ = минимальное число элементов в ε -покрытии A ;

$M_{\varepsilon}(A)$ = максимальное число элементов в ε -дискретном подмноестве A ;

$H_{\varepsilon}(A) = \log_2 N_{\varepsilon}(A)$;

$C_{\varepsilon}(A) = \log_2 M_{\varepsilon}(A)$.

Назовем $H_{\varepsilon}(A)$ ε -*энтропией* A , а $C_{\varepsilon}(A)$ – ε -*емкостью* A . Справедлива следующая теорема.

¹Шары предполагаются замкнутыми. – Прим. ред.

ТЕОРЕМА 4 (А. Н. Колмогоров и В. М. Тихомиров [6]). Пусть A – вполне ограниченное подмножество метрического пространства X . Выполняются следующие неравенства:

$$M_{2\varepsilon}(A) \leq N_\varepsilon(A) \leq M_\varepsilon(A).$$

Отсюда следует, что

$$C_{2\varepsilon}(A) \leq H_\varepsilon(A) \leq C_\varepsilon(A).$$

Пусть $\mathcal{B}_\Delta$ – множество всех функций $f \in \mathcal{F}_\Delta$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq f(x, y) \leq 1 \quad \text{для всех } (x, y) \in \Delta.$$

Множество $\mathcal{B}_\Delta$ вполне ограничено. Чтобы доказать этот факт, нам нужно оценить его ε -энтропию. С этой целью мы построим ε -покрытие множества $\mathcal{B}_\Delta$ для любого $\varepsilon > 0$. Сначала мы разделим Δ на n^2 квадратов

$$\Delta_{i,j} = \left\{ (x, y) : \frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq y < \frac{j}{n}; i, j = 1, \dots, n \right\}, \quad (2.8)$$

где $n = [1/\varepsilon] + 1$, и введем $m = [1/(\alpha\varepsilon)] + 1$. Определим кубы

$$q_{i,j,k} = \left\{ (x, y, z) : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq y \leq \frac{j}{n}, \frac{k-1}{m} \leq z \leq \frac{k}{m} \right\}.$$

Семейство K кубов $q_{i,j,k}$ называется *коридором*, если

- 1) для любой пары (i, j) , $i, j = 1, \dots, n$, существует такой индекс $k \in \{1, \dots, m\}$, что $q_{i,j,k} \in K$;
- 2) если $q_{i,j,k_1}, q_{i,j,k_2} \in K$, $k_1 < k_2$, то $q_{i,j,k} \in K$ для любого $k_1 < k < k_2$, т.е. K выпукло относительно оси z ;
- 3) существует такая функция $f \in \mathcal{B}_\Delta$, что $F(f) \subset K$.

Грубая оценка числа $|K|$ всех коридоров дается формулой

$$|K| \leq \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^{n^2}. \quad (2.9)$$

Более точная оценка приведена в [8].

Мы будем говорить, что функция f принадлежит коридору K , если $F(f) \subset K$ и пересечение пополненного графика $F(f)$ функции f с каждым кубом в K непусто. Нетрудно видеть, что если f и g принадлежат одному и тому же коридору, то $r(\alpha; f, g) \leq \varepsilon$. Иначе говоря, все функции, принадлежащие одному и тому же коридору, образуют множество диаметра ε . С другой стороны, каждая функция принадлежит некоторому коридору. Следовательно, ε -энтропия множества $\mathcal{B}_\Delta$ удовлетворяет условию

$$H(\mathcal{B}_\Delta) \leq n^2 \log_2 \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \approx \frac{2}{\varepsilon^2} \log_2 \frac{1}{\alpha\varepsilon}.$$

Мы доказали, что метрическое пространство $(\mathcal{B}_\Delta, r(\alpha))$ вполне ограничено.

3. Математическое моделирование изображения

Общепринято, что математическая модель изображения, скажем, черно-белой фотографии, имеющей форму единичного квадрата, есть график ограниченной функции f , определенной на единичном квадрате. Значения этой функции в каждой точке – степень серости картины в этой точке. Мы можем расположить все степени серости между $0 = \text{белым}$ и $1 = \text{черным}$. Для простоты мы будем рассматривать только изображения, которые являются такими черно-белыми картинками с носителем на единичном квадрате. Это не ограничивает общности. Таким образом, каждому изображению $I = I(f)$ соответствует функция $f \in \mathcal{B}_\Delta$. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать подмножество $\overline{\mathcal{B}}_\Delta$ множества $\mathcal{B}_\Delta$, как можно меньшее, со следующими свойствами.

1. Каждому изображению (черно-белой картине с носителем на единичном квадрате) соответствует функция f , принадлежащая $\mathcal{B}_\Delta$.

2. Определим метрику на $\mathcal{B}_\Delta$ так, что если два изображения $I(f)$ и $I(g)$, соответствующие функциям f и g , не распознаются как различные при данных разрешении и чувствительности, то расстояние между соответствующими функциями f и g “мало”.

М. Ф. Барнсли и Л. П. Хэрд [2] сформулировали восемь свойств, которыми обладают изображения реального окружения. Этот факт убеждает нас в том, что если мы рассматриваем некоторое пространство функций для моделирования изображения, то это пространство функций должно иметь те же свойства.

Пусть $\mathcal{R}_\Delta$ – пространство всех хаусдорфово непрерывных функций, принадлежащих $\mathcal{B}_\Delta$, и пусть $\mathcal{R}_\Delta$ снабжено хаусдорфовым расстоянием. Мы утверждаем, что $\mathcal{R}_\Delta$ – подходящее множество функций для моделирования изображений. В дальнейшем мы приведем дополнительные убедительные аргументы в пользу этого утверждения.

3.1. Функции элемента изображения. Для любых натуральных чисел n и m введем так называемые *функции элемента изображения* порядка (n, m) . Функция $p \in \mathcal{R}_\Delta$ является функцией элемента изображения порядка n с m значениями, если p постоянна на каждом элементе изображения (2.8) порядка n и принимает значения в множестве $\{m^{-1}, 2m^{-1}, 3m^{-1}, \dots, 1\}$. Пусть $\mathcal{P}_{n,m}$ – множество всех функций элемента изображения порядка n с m значениями. Очевидно, что число элементов множества $\mathcal{P}_{n,m}$ конечно и равно m^{n^2} .

Каждой функции $f \in \mathcal{R}_\Delta$ соответствует функция элемента изображения $p(f; x, y)$, принадлежащая $\mathcal{P}_{n,m}$ и определенная следующим образом. Пусть

$$f_{i,j} = n^2 \int_{\Delta_{i,j}} f(x, y) dx dy, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда положим

$$p(f; x, y) = \frac{1}{m} \left[m f_{i,j} + \frac{1}{2} \right] \quad \text{при } (x, y) \in \Delta_{i,j}; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если мы фиксируем границу для разрешения и чувствительность к серости, то, для достаточно больших n и m , два изображения, соответствующие f и $p(f)$, одинаковы, т.е. $I(f) = I(p(f))$. На практике, для обычного разрешения и чувствительности невооруженного глаза, обычно применяется $n = 2^9$ или 2^{10} и $m = 2^7$. Функция элемента изображения $p(f)$ является оцифрованным представлением изображения f . Если мы

увеличим разрешение и чувствительность, то может потребоваться увеличение значений n и m .

Метрика r в множестве функций $\mathcal{R}$, определяющая метрическое пространство $(\mathcal{R}, r)$, естественна для интерпретации элементов множества $\mathcal{R}$ как изображений, если r имеет следующее свойство:

В. Для любого фиксированного разрешения $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что если $r(f, g) < \varepsilon$ для двух функций $f, g \in \mathcal{R}$, то $I(f) = I(g)$ для данного разрешения δ .

Свойство **В** называется *принципом равномерного оцифровывания* [10].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если метрика r имеет свойство **В**, то метрическое пространство $(\mathcal{R}, r)$ вполне ограничено.

Доказательство утверждения 1 очевидно, поскольку из свойства **В** следует, что для любого ε метрическое пространство $(\mathcal{R}, r)$ имеет конечное ε -покрытие. Мы уже доказали, что $\mathcal{R}_\Delta$ вполне ограничено. Принцип равномерного оцифровывания выполняется на практике, поскольку при любых заданных величинах разрешения и чувствительности все изображения оцифровываются с функцией элемента изображения одного и того же порядка.

4. Обработка изображений

Обработка изображений основана на возможности оцифровывания и представления любого изображения с помощью функции элемента изображения p_n с 2^{2n} элементами изображения, т.е. p_n полностью определяется заданием $N = 2^{2n}$ чисел.

По существу, сжатие изображения является процедурой приближения, в которой функция элемента изображения p_n , представляющая изображение $I(p_n)$ с $N = 2^{2n}$ элементами изображения, приближается такой функцией f , что каждое значение функции f может быть вычислено с помощью M данных чисел. Широко известный подход состоит в том, чтобы представить f с помощью разложения по ортогональной системе и взять только M коэффициентов этого разложения, обычно это коэффициенты с наибольшими модулями. Используя f , можно построить функцию элемента изображения p_n^* , тоже с N элементами изображения, предлагаемую как “более дешевую” замену p_n при $M < N$. Цель сжатия изображения состоит в том, чтобы минимизировать отношение M/N , сохраняя “качество” воспроизведения p_n через p_n^* . Это “качество” обычно измеряется опытным образом – “как оно появляется”. Для математического измерения этого качества мы нуждаемся в подходящем расстоянии между функциями элемента изображения. Мы утверждаем, что подходящим расстоянием является интегральное хаусдорфово расстояние. Есть конструкции процессоров, вычисляющие интегральное хаусдорфово расстояние между функциями элемента изображения [3], но это расстояние по-прежнему не является стандартным при обработке изображений.

4.1. Аппроксимация по отношению к хаусдорфову расстоянию. Важный факт в обработке изображений состоит в том, что любое изображение может быть оцифровано. Это значит, что если расстояние в $\mathcal{R}_\Delta$ является подходящим для измерения расстояний между функциями, соответствующими изображениям, то каждая функция должна быть приближена функцией элемента изображения p с точностью до $\varepsilon > 0$. Нетрудно доказать следующее более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Существует такая абсолютная постоянная c , что для любой функции $f \in \mathcal{B}_\Delta$ найдется такая функция элемента изображения $p(f)$ порядка n , что*

$$r(\alpha; f, p(f)) \leq \frac{c}{\alpha n}.$$

Это утверждение не является аналогом приведенной выше теоремы для банаховых пространств. Если заменить функции элемента изображения алгебраическими многочленами в теореме 5, то оценку нужно заменить следующим образом:

$$r(\alpha; f, p(f)) \leq \frac{c \log n}{\alpha n}.$$

Все это убеждает нас, что хаусдорфово расстояние является естественным расстоянием для измерения различия между двумя изображениями. При оцифровывании функции мы используем интегрирование, и интегральные хаусдорфовы расстояния должны больше подходить для этой цели.

Для вычисления наилучших хаусдорфовых приближений есть модификации алгоритма Ремеза и алгоритма дифференциальной коррекции (DCA), см. [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Andreev, P. Marinov. Numerical determination of the element of best Hausdorff approximation // Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / ed. B. Bojanov. Sofia: DABRA, 2002. P. 1–12.
- [2] M. F. Barnsley, L. P. Hurd. Fractal Image Compression. Wellesley: Peters, 1993.
- [3] V. Bonchev, P. Marinov, P. Nus, T. Cecchin. An FPGA/PLSI Hausdorff distance processor design for pattern recognition applications // The International Conference on Signal Processing, Applications and Technology (Boston, 1995). P. 1015–1018.
- [4] F. Hausdorff. Mengenlehre. Berlin: W. Gruyter & Co., 1927.
- [5] A. Kolmogoroff. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of Math. (2). 1936. V. 37. P. 107–110. (Рус. пер.: О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 186–189.)
- [6] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14. № 2. С. 3–86.
- [7] Б. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств // УМН. 1969. Т. 24. № 5. С. 141–178.
- [8] Bl. Sendov. Hausdorff Approximations. Dordrecht: Kluwer, 1990.
- [9] Bl. Sendov. Integral Hausdorff distance // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1993. V. 46. № 10. P. 21–24.
- [10] Bl. Sendov. Mathematical modeling of real-world images // Constr. Approx. 1996. V. 12. № 1. P. 12–65.
- [11] Б. Сендов, В. А. Попов. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики // Mathematica (Cluj). 1966. V. 8. P. 163–172.

Центральная лаборатория параллельных вычислений,
Болгарская академия наук, София, Болгария
E-mail: bsendov@argo.bas.bg

Поступила в редакцию
20.06.2003