Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Хачлаев, Асимптотическое поведение решений полулинейного эллиптического уравнения с растущим коэффициентом в цилиндрической области, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:03:04

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
 СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
 ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТУЩИМ
 КОЭФФИЦИЕНТОМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Т. С. ХАЧЛАЕВ

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + k \frac{\partial u}{\partial t} - t^p |u|^{\sigma-1} u = 0. \quad (1)$$

Будем предполагать, что все коэффициенты в (1) – ограниченные измеримые функции, $\sigma = \text{const} > 1$, k и p – произвольные постоянные. Уравнение (1) рассматривается в цилиндрической области $\Pi_1 = \{(x, t) : x \in G, 1 < t < \infty\}$, где G – ограниченная область с липшицевой границей. Предполагается выполненным условие эллиптичности:

$$m_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq m_2 |\xi|^2,$$

где

$$m_1, m_2 = \text{const}, \quad m_1 > 0, \quad |\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2.$$

Пусть, кроме того, $a_{ij} = a_{ji}$. Будем предполагать выполненным условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial G, \quad t > 1, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – дифференцирование по направлению конормали оператора

$$Lu \equiv u_{tt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Под решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2), понимается обобщенное решение. Приведем его определение. Будем обозначать $\Pi_{a,b} = G \times (a, b)$, $\Pi_a = \Pi_{a,\infty}$, $\Gamma_{a,b} =$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 03-51-5007), гранта научных школ (НШ-1464.2003.1) и РФФИ (02-01-00069).

$\partial G \times (a, b)$. Функция $u(x, t)$ называется обобщенным решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2), если $u(x, t) \in W_2^1(\Pi_{a,b}) \cap L^\infty(\Pi_{a,b})$ при любых $a, b < \infty$ и имеет место равенство:

$$-\int_{\Pi_{a,b}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i=1}^n a_i(x) \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} k \psi \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Pi_{a,b}} \psi t^p |u|^{\sigma-1} u dx dt = 0,$$

каковы бы ни были функции $\psi(x, t) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ такие, что $\psi|_{t=a} = \psi|_{t=b} = 0$. Из классических результатов о гладкости обобщенных решений линейных эллиптических уравнений следует, что $u(x, t)$ непрерывна в $\bar{\Pi}_a$ при всех $a > 1$ и в каждой замкнутой области $\bar{\Pi}_{a,b}$, $1 < a < b < \infty$, удовлетворяет условию Гёльдера. Кроме того, $\frac{\partial u}{\partial t} \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $1 < a < b < \infty$.

ТЕОРЕМА. *Всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), имеет вид*

$$u(x, t) = \chi(t) + O(e^{-\alpha t}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где $\chi(t)$ – решение уравнения

$$\ddot{\chi} + k\dot{\chi} = t^p |\chi|^{\sigma-1} \chi,$$

$\alpha = \text{const} > 0$ не зависит от $u(x, t)$.

Нетрудно показать, что существует определенное на $(1, +\infty)$ решение уравнения

$$\ddot{y} + k\dot{y} - t^p y^\sigma = 0 \quad (3)$$

такое, что если $u(x, t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), то

$$|u(x, t)| \leq y(t). \quad (4)$$

Таким образом, важную роль при изучении поведения решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), играет уравнение (3). Поведение решений уравнения (3) изучено достаточно полно [1], [2].

На основе оценки (4) и свойств решений уравнения (3) получаются следующие оценки для решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2).

Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2). Тогда

- 1) если $k < 0$, $p \leq -1$, то $|u| < A$,
- 2) если $k < 0$, $p > -1$, то $|u| < At^{\frac{1+p}{1-\sigma}}$,
- 3) если $k > 0$, $p \leq -1$, то $|u| < At^{\frac{1+p}{1-\sigma}}$,
- 4) если $k > 0$, $p > -1$, то $|u| < Ae^{-\alpha t}$,
- 5) если $k = 0$, то $|u| < At^{\frac{2+p}{1-\sigma}}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично тому, как это было сделано в работе [3], с необходимыми изменениями, вызванными наличием коэффициента t^p при нелинейном члене. При этом учитываются приведенные выше оценки.

Автор приносит глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву, под руководством которого были получены эти результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
 [2] А. А. Коньков // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126. [3] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 3. С. 45–68.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nts@elsite.ru

Принято редколлегией
23.01.2004