Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, О свойствах дифференциального уравнения, описывающего динамику сильношунтированного перехода Джозефсона, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:25:42

**О СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ,
ОПИСЫВАЮЩЕГО ДИНАМИКУ СИЛЬНОШУНТИРОВАННОГО
ПЕРЕХОДА ДЖОЗЕФСОНА**

В. М. БУХШТАБЕР, О. В. КАРПОВ, С. И. ТЕРТЫЧНЫЙ

Уравнение вида

$$\dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) + q(t) = 0 \quad (1)$$

успешно используется (см. [1]–[4]) для описания свойств сильношунтированных переходов Джо-зефсона в сверхпроводниках. Здесь $\varphi(t)$ имеет смысл разности фаз параметра порядка (макроскопической волновой функции, описывающей коллективные свойства “жидкости” куперовских пар электронов в сверхпроводнике), $-q(t)$ описывает ток, подводимый из внешней цепи к переходу. Физика вопроса приводит к следующей математической задаче.

Дана функция $q = q(t; u)$, которая зависит от вектора параметров $u = (u_1, \dots, u_n)$ и является периодической по t с периодом $T = u_n$. Найти область $U \subset \mathbb{R}^n$ такую, что для $u \in U$ все решения уравнения (1) обладают свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(t + (n+1)T) - \varphi(t + nT)) = 2\pi k \quad (2)$$

для некоторого общего целого k , называемого порядком ступеньки Шапиро.

Наш подход к этой задаче опирается на следующий общий результат.

ЛЕММА 1. Пусть дана вещественная функция $q(t)$. Функции $\varphi(t)$ и $\xi(t)$ дают решение системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) + q(t) &= 0, \\ \dot{\xi}(t) - \cos \varphi(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

с $\varphi(0) = \varphi_0$, $\xi(0) = 0$ тогда и только тогда, когда функции $x(t)$, $y(t)$ вида

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(\xi(t)/2) \cos((\varphi(t) - \varphi_0)/2), \\ y(t) &= \exp(\xi(t)/2) \sin((\varphi(t) - \varphi_0)/2) \end{aligned} \quad (4)$$

дают решение системы

$$\begin{aligned} 2\dot{x} &= (\cos \varphi_0)x + (q - \sin \varphi_0)y, \\ -2\dot{y} &= (\sin \varphi_0 + q)x + (\cos \varphi_0)y \end{aligned} \quad (5)$$

с $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Положим $\chi(t) = \frac{x + jy}{x - jy}$, где $j = \sqrt{-1}$. Имеем $\chi(t) = \exp j(\varphi(t) - \varphi_0)$. Таким образом, решение $\varphi(t)$ уравнения (1) удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда последовательность функций $\chi_n(t) = \chi(t + nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, поточечно сходится.

Непосредственная проверка показывает, что если $x_1(t)$, $y_1(t)$ – решение системы (5) с $x_1(0) = 1$, $y_1(0) = 0$, то функции

$$x_2(t) = \eta_1(t)x_1(t) \text{ и } y_2(t) = \eta_1(t)y_1(t) + \eta_2(t), \quad (6)$$

где

$$\eta_1(t) = \int_0^t \frac{q(\tau) - \sin \varphi_0}{x_1(\tau)^2} d\tau \text{ и } \eta_2(t) = \frac{1}{x_1(t)}, \quad (7)$$

представляют собой решение системы (5) с $x_2(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00406).

Положим $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ и $\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}(t + nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть теперь $q(t)$ – периодическая функция с периодом T . Из общей теории систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами следует, что если $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ (единичная матрица), то

$$\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}(T)^n \mathbf{X}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Отметим, что $\det \mathbf{X}(t) = 1$. Имеет место следующий общий результат.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ik})$ – вещественная (2×2) -матрица и γ_1, γ_2 – ее собственные числа. Положим $a_{11} + a_{22} = 2a$. Пусть $\det \mathbf{A} = 1$. Тогда: если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то $\gamma = a$ и $a^2 = 1$; если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $\gamma_1 = \gamma = a + \sqrt{a^2 - 1}$, $\gamma_2 = \gamma^{-1} = a - \sqrt{a^2 - 1}$, где $|a| \neq 1$. Более того, $|\gamma| \neq 1$ тогда и только тогда, когда $|a| > 1$.

Пусть теперь $\mathbf{A} = \mathbf{X}(T)$. Тогда из лемм 1 и 2 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Решения уравнения (1) с $q(t; u)$ при данном u удовлетворяют условию (2) тогда и только тогда, когда $|a| > 1$, где $2a = \left(x(T) + x(T)^{-1} + \eta_1(T)y(T) \right)$, и в этом случае

$$\exp j(\varphi(t + nT) - \varphi_0) = \frac{\alpha_n x(t) + \beta_n y(t)}{\bar{\alpha}_n x(t) + \bar{\beta}_n y(t)}, \quad (9)$$

где $\alpha_n = c_{11}\gamma^n + c_{12}\gamma^{-n}$, $\beta_n = c_{22}\gamma^n + c_{21}\gamma^{-n}$ и

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{21}[a_{12} - j(a_{11} - \gamma)], & c_{12} &= -(a_{11} - \gamma)[(a_{22} - \gamma^{-1}) - ja_{21}], \\ c_{21} &= (a_{22} - \gamma^{-1})[a_{12} - j(a_{11} - \gamma)], & c_{22} &= -a_{12}[(a_{22} - \gamma^{-1}) - ja_{21}]. \end{aligned}$$

Для $\varphi_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + nT)$ функция $\exp j(\varphi_\infty(t) - \varphi_0)$ равна:

$$\frac{c_{11}x(t) + c_{22}y(t)}{\bar{c}_{11}x(t) + \bar{c}_{22}y(t)} \text{ при } |\gamma| > 1 \quad \text{и} \quad \frac{c_{12}x(t) + c_{21}y(t)}{\bar{c}_{12}x(t) + \bar{c}_{21}y(t)} \text{ при } |\gamma| < 1.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $-q(t; u) = \iota_0 + 2\pi\iota_1 \sum_{n=0}^{\infty} [\delta(t - nT - \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\tau) - \delta(t - nT - \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\tau)]$, где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака (см. [3], [4]). Тогда $u = (\iota_0, \iota_1, \tau, T)$ и область $U \subset \mathbb{R}^4$ задается неравенством

$$\left| \cosh\left(\frac{T}{2}\sqrt{1 - \iota_0^2}\right) - \frac{\sin^2(\pi\iota_1)}{1 - \iota_0^2} \left[\cosh\left(\frac{T}{2}\sqrt{1 - \iota_0^2}\right) - \cosh\left(\left(\frac{T}{2} - \tau\right)\sqrt{1 - \iota_0^2}\right) \right] \right| > 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. К. Лихарев, Б. Е. Ульрих. Системы с джозефсоновскими контактами. М.: Изд-во МГУ, 1978. [2] А. Бароне, Дж. Патерно. Эффект Джозефсона. Физика и применение. М.: Мир, 1984. [3] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. № 6 (12). С. 1478–1485. [4] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. № 3 (9). С. 691–699.

ВНИИ Физико-технических и радиотехнических измерений,
Менделеево, Московская область

Принято редколлегией
23.03.2004