Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, О локальных формулах для комбинаторных классов Понтрягина многообразий, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:31:58

О ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ КОМБИНАТОРНЫХ КЛАССОВ ПОНТРЯГИНА МНОГООБРАЗИЙ

А. А. ГАЙФУЛЛИН

Задаче построения комбинаторных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции посвящен большой ряд работ. Соотношение результатов, полученных в [1]–[4], с результатами настоящей работы обсуждается в конце заметки.

Далее все многообразия, их триангуляции и бордизмы предполагаются кусочно-линейными, все многообразия – компактными, все бордизмы – ориентированными.

Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество всех ориентированных триангуляций $(n-1)$ -мерной сферы с точностью до изоморфизма, сохраняющего ориентацию. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $\mathcal{T}^n(G)$ абелеву группу всех функций $f: \mathcal{T}_n \rightarrow G$, изменяющих знак при замене ориентации триангуляции (считаем, что $\mathcal{T}^0(G) = G$). Определим дифференциал $\delta: \mathcal{T}^n(G) \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}(G)$ по формуле $(\delta f)(L) = \sum f(\text{Lk } v)$, где сумма берется по всем вершинам v триангуляции $L \in \mathcal{T}_{n+1}$ и ориентация $\text{Lk } v$ индуцирована ориентацией L . Легко проверить, что $\delta^2 = 0$. Таким образом, в $\mathcal{T}^*(G)$ вводится структура коцепного комплекса.

Пусть K – триангуляция m -мерного многообразия. Коориентацией симплекса будем называть ориентацию его линка. Обозначим через $\widehat{C}_*(K; G)$ цепной комплекс коориентированных симплициальных цепей комплекса K . Гомологии этого цепного комплекса совпадают с гомологиями $H_*(|K|; \widehat{G})$, где $\widehat{G}$ – ориентирующий пучок многообразия $|K|$ со слоем G . Каждой функции $f \in \mathcal{T}^n(G)$ сопоставим коориентированную цепь $f_{\#}(K) \in \widehat{C}_{m-n}(K; G)$ по формуле $f_{\#}(K) = \sum_{\Delta^{m-n} \in K} f(\text{Lk } \Delta^{m-n}) \Delta^{m-n}$. Назовем функцию $f \in \mathcal{T}^n(G)$ *локальной формулой*, если для любого многообразия и любой его триангуляции K коориентированная цепь $f_{\#}(K)$ является циклом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) *Функция f является локальной формулой тогда и только тогда, когда f является коциклом в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$.*

2) *Если f является кограницей в коцепном комплексе $\mathcal{T}^*(G)$, то для любого многообразия и любой его триангуляции K цепь $f_{\#}(K)$ является границей.*

3) *Если K_1 и K_2 – две триангуляции одного многообразия, f – локальная формула, то циклы $f_{\#}(K_1)$ и $f_{\#}(K_2)$ гомологичны.*

Таким образом, класс когомологий $\psi \in H^n(\mathcal{T}^*(G))$ определяет для любого многообразия M^m класс гомологий $\psi_{\#}(M^m) \in H_{m-n}(M^m; \widehat{G})$ и, следовательно, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\psi^{\#}(M^m) \in H^n(M^m; G)$. Если $m = n$ и многообразие M^n ориентировано, то классу ψ соответствует элемент $\psi^*(M^n) = \langle \psi^{\#}(M^n), [M^n] \rangle \in G$. Кограницы коцепного комплекса $\mathcal{T}^*(G)$ будем называть *тривиальными* локальными формулами.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ψ – произвольный элемент группы $H^n(\mathcal{T}^*(G))$. Тогда $\psi^*(M_1^n) = \psi^*(M_2^n)$ для любых двух бордантных ориентированных многообразий M_1^n и M_2^n .*

Следовательно, определен гомоморфизм $\star: H^n(\mathcal{T}^*(G)) \rightarrow \text{Hom}(\Omega_n, G)$, сопоставляющий классу когомологий ψ гомоморфизм ψ^* , где Ω_* – группа кусочно-линейных ориентированных бордизмов точки.

ТЕОРЕМА 2. *В случае $G = \mathbb{Q}$ гомоморфизм $\star$ является изоморфизмом. Таким образом, группа $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ изоморфна аддитивной группе кольца полиномов $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$, $\deg p_j = 4j$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого набора $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ неотрицательных целых чисел существует единственный класс когомологий $\phi_I \in H^{4(i_1+2i_2+\dots+ki_k)}(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ такой, что $\phi_I^{\#}(M^m) = p_1^{i_1}(M^m)p_2^{i_2}(M^m)\dots p_k^{i_k}(M^m)$ для любого многообразия M^m , где $p_j(M^m)$ – j -й рациональный класс Понтрягина многообразия M^m . Классы ϕ_I образуют базис векторного пространства $H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$.*

Задача о явном виде локальных формул представляет особый интерес. Приведем нашу схему построения явной формулы для первого рационального класса Понтрягина. Пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ – локальная формула. Значение $(\delta f)(K) = 0$ не меняется при бизвездных преобразованиях триангуляции K четырехмерной сферы (определение бизвездных преобразований см. в [5] и [6]). Это позволяет описать, как меняется значение $f(L)$ при бизвездных преобразованиях триангуляции L трехмерной сферы. Остается заметить, что по теореме Пахнера [5] любая триангуляция сферы получается из границы симплекса с помощью конечного числа бизвездных преобразований. Явной формуле для первого класса Понтрягина будет посвящена отдельная публикация.

ТЕОРЕМА 3. $H^n(\mathcal{T}^*(G)) = 0$, $1 \leq n \leq 4$, для любой собственной подгруппы $G \subset \mathbb{Q}$.

Следовательно, если $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ – нетривиальная локальная формула, то для любого натурального числа q существует триангуляция $L \in \mathcal{T}_4$ такая, что знаменатель значения $f(L)$ делится на q . Для любой функции $f \in \mathcal{T}^*(\mathbb{Q})$ обозначим через $\text{den}_k(f)$ наименьшее общее кратное знаменателей значений $f(L)$, где L пробегает все триангуляции сферы с не более чем k вершинами.

ТЕОРЕМА 4. Для любого класса когомологий $\psi \in H^*(\mathcal{T}^*(\mathbb{Q}))$ существуют локальная формула f , представляющая класс ψ , и целая константа C такие, что $\text{den}_k(f)$ делит $C(k+1)!$ для любого k .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$ – произвольная локальная формула, представляющая класс $\phi_{(1)}$. Тогда $\text{den}_k(f)$ делится на наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k-3$ для любого четного $k \geq 10$.

В [4] было впервые доказано, что классы гомологий, двойственные по Пуанкаре рациональным комбинаторным классам Понтрягина многообразия, могут быть представлены циклами, в которые каждый симплекс входит с коэффициентом, зависящим только от его звезды. Из результатов настоящей работы вытекает обратное утверждение: любой рациональный цикл, полученный по локальной формуле, представляет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре полиному от комбинаторных классов Понтрягина. В [2] найдены явные локальные формулы для вещественных классов Понтрягина, использующие асимптотику спектра дифференциального оператора. При этом остается неизвестным, являются ли построенные по ним циклы рациональными. В [1], [3] получены явные формулы для циклов, классы гомологий которых двойственны по Пуанкаре рациональным классам Понтрягина (в [1] – только для первого класса Понтрягина). Эти формулы используют некоторые дополнительные структуры, заданные на многообразии (например, в [1] – гладкую структуру, согласованную с триангуляцией). Поэтому формулы из [1], [3] не локальны в нашем смысле. В [1] получена нелокальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина, такая, что построенный по ней симплициальный цикл имеет знаменатели, не превосходящие 48.

Я благодарен В. М. Бухштаберу за постановки задач и за постоянное внимание к моей работе, а также Л. А. Алалия, И. В. Баскакову и Г. И. Шарыгину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик // Функциональный анализ и приложения. 1975. Т. 9. № 2. С. 12–28; № 3. С. 5–26. [2] J. Cheeger // J. Differential Geom. 1983. V. 18. № 4. P. 575–657. [3] I. M. Gel'fand, R. D. MacPherson // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. № 2. P. 304–309. [4] N. Levitt, C. Rourke // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 391–397. [5] U. Pachner // European J. Combin. 1991. V. 12. № 2. P. 129–145. [6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Univ. Lecture Ser. V. 24.)