Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Беньш-Кривец, В. П. Платонов, S -единицы в гиперэллиптических полях, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 03:15:23

S -единицы в гиперэллиптических полях**В. В. Беньш-Кривец, В. П. Платонов**

В настоящей заметке мы представляем некоторые результаты о вычислении групп S -единиц в гиперэллиптических полях.

Пусть $k = \mathbb{F}_q(x)$ – поле рациональных функций от одной переменной над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p > 2$ и $d(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+1} \in \mathbb{F}_q[x]$ – свободный от квадратов многочлен, $a_0 \neq 0$. Пусть $K = k(\sqrt{d})$. Для неприводимого многочлена $v \in \mathbb{F}_q[x]$ через $|\cdot|_v$ будем обозначать соответствующее нормирование на k . Пусть (α, β) – точка на кривой $y^2 = d(x)$, $\beta \neq 0$. Тогда нормирование $|\cdot|_{x-\alpha}$ имеет два продолжения на K . Эти продолжения будем обозначать $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$. Неархимедово нормирование $|\cdot|_\infty$ имеет единственное продолжение на K , которое по-прежнему будем обозначать через $|\cdot|_\infty$. Следующие два случая являются базисными для исследования S -единиц: 1) $S = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1\}$; 2) $S = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1, |\cdot|_2\}$. Пусть $\mathcal{O}_S$ – кольцо S -целых элементов в K , т.е. таких элементов $y \in K$, что $|y|_v \geq 0$ для всех нормирований $|\cdot|_v$ поля K , не принадлежащих S . Множество обратимых элементов U_S кольца $\mathcal{O}_S$ называется группой S -единиц поля K . В силу обобщенной теоремы Дирихле о единицах (см. [1; гл. IV, теорема 9]) группа U_S является прямым произведением группы $\mathbb{F}_q^*$ и свободной абелевой группы G ранга $|S| - 1$. Независимые образующие группы G называются фундаментальными S -единицами.

В классическом случае квадратичного расширения $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}$ фундаментальную единицу поля L можно найти, используя разложение $\sqrt{d}$ в цепную дробь [2]. Однако для функциональных полей метод цепных дробей не всегда позволяет найти фундаментальную единицу. Цель настоящей заметки – найти алгоритм для вычисления фундаментальных S -единиц гиперэллиптического поля K в указанных двух случаях.

Первое предложение носит технический характер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $y = f + g\sqrt{d}$, где $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, $(f, g) = 1$, и пусть $v \in \mathbb{F}_q[x]$ – неприводимый многочлен. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $|\cdot|_v$ имеет два продолжения $|\cdot|_{v'}$ и $|\cdot|_{v''}$ на K , то либо $|y|_{v'} = 0$, либо $|y|_{v''} = 0$.
2. Если $v \nmid d$ и $|\cdot|_v$ имеет единственное продолжение $|\cdot|_{v'}$ на K , то $|y|_{v'} = 0$.
3. Если $v \mid d$ и $v \nmid f$, то $|\cdot|_v$ имеет единственное продолжение $|\cdot|_{v'}$ на K и $|y|_{v'} = 0$.
4. Если $v \mid d$ и $v \mid f$, то $|\cdot|_v$ имеет единственное продолжение $|\cdot|_{v'}$ на K и $|y|_{v'} = 1/2$.

Следующее предложение характеризует S -целые элементы в K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любой элемент $y \in \mathcal{O}_S$ имеет вид

$$y = (f + g\sqrt{d})(x - \alpha)^{-m},$$

где $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, $m \geq 0$. Если при этом $m > 0$ и $x - \alpha$ не делит одновременно f и g , то $x - \alpha \nmid f$, $x - \alpha \nmid g$.

Для доказательства предложения 2 достаточно заметить, что если знаменатель y делится на неприводимый многочлен $v \neq x - \alpha$, то для некоторого продолжения $|\cdot|_{v'}$ нормирования $|\cdot|_v$ в силу предложения 1 $|y|_{v'} < 0$.

Отметим, что не любой элемент вида $(f + g\sqrt{d})(x - \alpha)^m$ является S -целым. Для дальнейшего нам важно знать, какие значения может принимать норменное отображение на S -единицах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\varepsilon = (f + g\sqrt{d})/(x - \alpha)^{m_1} \in U_S$, где $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, и если $\varepsilon \notin \mathbb{F}_q^*$, то $f \neq 0$, $g \neq 0$, $(f, g) = 1$ и $N_{K/k}(\varepsilon) = a(x - \alpha)^m$, где $a \in \mathbb{F}_q^*$ и $0 \neq m \in \mathbb{Z}$.

Так же, как и в случае S -целых элементов, если элемент $\varepsilon \in K$ обладает свойством $N_{K/k}(\varepsilon) = a(x - \alpha)^m$, то из этого не следует, что ε является S -единицей. Однако следующее предложение показывает, что если норменное уравнение

$$f^2 - g^2 d = a(x - \alpha)^m, \quad (1)$$

где $m \neq 0$ фиксировано, имеет решение в многочленах $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, то либо $f + g\sqrt{d} \in U_S$, либо $f - g\sqrt{d} \in U_S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $y = f + g\sqrt{d}$, где $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, и пусть $N_{K/k}(y) = a(x - \alpha)^m$, где $a \in \mathbb{F}_q^*$ и $m > 0$. Тогда если $|y|_2 = 0$, то $y = f + g\sqrt{d} \in U_S$, а если $|y|_2 > 0$, то $(f + g\sqrt{d})/(x - \alpha)^m \in U_S$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S' = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1, |\cdot|_2\}$, $S = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1\}$. Тогда если ε — фундаментальная S -единица, то $\varepsilon, x - \alpha$ — независимые фундаментальные S' -единицы.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что если δ — произвольная S' -единица, то, как и в случае S -единиц, $N_{K/k}(\delta) = a(x - \alpha)^m$. Тогда в силу предложения 4 либо $\delta \in U_S$, либо $\delta/(x - \alpha)^m \in U_S$. В первом случае $\delta = b\varepsilon^t$, а во втором случае $\delta = b\varepsilon^t(x - \alpha)^m$, где $b \in \mathbb{F}_q^*$, $t \in \mathbb{Z}$. Это и означает, что $\varepsilon, x - \alpha$ — независимые фундаментальные S' -единицы.

Таким образом, в первую очередь нам необходимо уметь вычислить фундаментальную S -единицу. Для этого нужно найти минимальное натуральное m такое, что уравнение (1) имеет решение в многочленах $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$. Тогда либо $f + g\sqrt{d}$, либо $f - g\sqrt{d}$ является фундаментальной S -единицей.

Обозначим $v = x - \alpha$, и пусть k_v — пополнение k относительно нормирования $|\cdot|_v$. Поле k_v можно отождествить с полем формальных степенных рядов $\mathbb{F}_q((v))$. Так как $|\cdot|_v$ имеет два продолжения на K , то $\sqrt{d} \in \mathbb{F}_q((v))$. Пусть $\sqrt{d} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i v^i$. Следующая теорема дает алгоритм для нахождения фундаментальной S -единицы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = (\deg d - 1)/2$. Для целого числа $r \geq n$ определим матрицы

$$D_r = \begin{pmatrix} d_{n+1} & d_{n+2} & \dots & d_{r+1} \\ d_{n+2} & d_{n+3} & \dots & d_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n+r} & d_{n+r+1} & \dots & d_{2r} \end{pmatrix}, \quad H_r = \begin{pmatrix} d_{n+2} & d_{n+3} & \dots & d_{r+2} \\ d_{n+3} & d_{n+4} & \dots & d_{r+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n+r+1} & d_{n+r+2} & \dots & d_{2r+1} \end{pmatrix}.$$

Норменное уравнение (1) с нечетным $m = 2r + 1$ имеет решение в ненулевых многочленах $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } D_r < r - n + 1$, а с четным $m = 2r$ — тогда и только тогда, когда $\text{rank } H_{r-1} < r - n$.

Если K — поле эллиптической кривой, то матрицы D_r, H_r являются квадратными. В этом случае определители специального вида, возникающие в теореме 2, были впервые введены Якоби в XIX в. и носят название “персимметрический определитель” (persymmetric determinants), а матрицы такого вида называются “ганкелевыми матрицами” (Hankel matrices).

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы ограничились здесь нормированиями, связанными с точками на гиперэллиптической кривой над полем $\mathbb{F}_q$. В действительности аналогичные результаты справедливы для любых нормирований поля $\mathbb{F}_q(x)$.

Список литературы

- [1] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972. [2] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1964.

В. В. Беньаш-Кривец (V. V. Benyash-Krivets)
Белорусский государственный университет
E-mail: benyash@bsu.by

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
16.07.2007

В. П. Платонов (V. P. Platonov)
Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН
E-mail: platonov@niisi.ras.ru