Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Лакштанов, Коротковолновый предел амплитуды рассеяния в неоднородной среде, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:48:48

Коротковолновый предел амплитуды рассеяния в неоднородной среде

Е. Л. Лакштанов

Рассмотрим задачу рассеяния плоской волны на неоднородностях. Пусть $\Psi(x, k)$ есть единственное решение (см. [1]) уравнения

$$[\Delta_x + k^2 q(x)]\Psi(x, k) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $q(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $q(x) > 0$, $q(x) \equiv 1$ при $r = |x| > a$, $\Psi(x, k) = e^{ikx_n} + u(x, k)$ и функция $u(x, k)$ удовлетворяет условию излучения на бесконечности

$$u(x, k) = f(\omega, k)r^{(1-n)/2}e^{ikr}(1 + O(r^{-1})), \quad r \rightarrow \infty, \quad \omega = \frac{x}{r} \in S^{n-1}. \quad (2)$$

Функция $f(\omega, k)$ называется амплитудой рассеяния. В этой работе для большого класса потенциалов $q(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ будет получен слабый предел при $k \rightarrow \infty$ меры на сфере S^{n-1} с плотностью $|f(\omega, k)|^2$.

Уравнению (1) соответствуют гамильтониан $H = |p|^2 - q(x)$, $p \in \mathbb{R}^n$, и система уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dp}{ds} = \nabla q(x); \quad x(0) = (y', -a), \quad p(0) = \theta_0 := (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}, \quad (3)$$

где $a > 0$ таково, что гиперплоскость $\{(y', -a): y' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ не пересекается с носителем $\text{supp } q(\cdot)$. Предполагается, что система Гамильтона удовлетворяет следующему условию *неловушечности*.

УСЛОВИЕ А. Для любого $c < \infty$ существует такое T , что при $s > T$ решение системы (3) лежат в области $|x| > c$.

Обозначим через $\mathcal{J}$ проекцию носителя функции $q(x) - 1$ на множество $x_n = -a$:

$$\mathcal{J} = \{(y', -a): \exists a' > -a: q(y', a') \neq 1\} \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

В соответствии с условием неловушечности, каждый луч, выпущенный из точки $(y', -a)$, начиная с некоторого момента двигается по прямой, причем с единичным по модулю вектором скорости (см. [2]), что позволяет определить отображение $J: \mathcal{J} \rightarrow S^{n-1}$.

Заметим, что классическое дифференциальное сечение рассеяния $|f_{\text{cl}}|^2$ системы (3) может быть определено как положительная обобщенная функция (борелевская мера) посредством функционала $\int_{S^{n-1}} \varphi(\omega) |f_{\text{cl}}|^2 d\omega = \int_{\mathcal{J}} \varphi(J(y)) dy$, $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$. Для того чтобы обобщенная функция $|f_{\text{cl}}|^2$ была регулярной, т. е. соответствующая мера имела плотность, мы предположим выполнение условия *невыврожденности*.

УСЛОВИЕ В. (В.1) Множество критических точек отображения J имеет меру нуль. (В.2) Значение θ_0 принимается (за исключением $\partial\mathcal{J}$) только в регулярных точках отображения J .

Множество критических значений отображения J будем называть множеством *каустических* направлений. Заметим, что по теореме Сарда мера этого множества равна нулю.

Работа выполнена при поддержке Centre for Research on Optimization and Control (CEOC) из "Fundação para a Ciência e a Tecnologia" FCT, и European Community Fund FEDER/POCTI.

Плотность меры $|f_{\text{cl}}|^2$ можно определить при помощи якобиана отображения J . Пусть ω_0 – правильное направление (т. е. правильная точка образа), причем прообраз ω_0 состоит из p точек $x^{(i)} \in \mathcal{I}$, $i = 1, \dots, p$. Тогда (см. [2; лемма 1]) существует p окрестностей $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i(x^{(i)})$ таких, что J диффеоморфно отображает $\mathcal{M}_i$ на $\mathcal{L}_i = J(\mathcal{M}_i)$.

Обозначим $f_{\text{cl}}^i(\omega) := |J_i(\omega)|^{-1/2}$, $\omega \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, p$. Имеем

$$\int_{\mathcal{L}_i} |f_{\text{cl}}^i(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathcal{M}_i} dy' = \text{meas}(\mathcal{M}_i), \quad |f_{\text{cl}}(\omega)|^2 = \sum_{i=1}^p |f_{\text{cl}}^i(\omega)|^2, \quad \omega \in \mathcal{L}. \quad (4)$$

Как следует из (4), функция $f_{\text{cl}} \in L_2(S^{n-1})$ и $\|f_{\text{cl}}\|^2 = \sigma_{\text{cl}} = \text{meas}(\mathcal{I})$, здесь σ_{cl} – так называемое классическое полное сечение рассеяния.

Для формулировки дальнейших условий на функцию $q(\cdot)$ нам потребуются некоторые обозначения для функций, впервые введенных Б. Р. Вайнбергом в [2]. Обозначим через $\Lambda^n \subset \mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ лагранжево многообразие, образованное бихарактеристиками (фазовыми кривыми) задачи (3). В качестве (глобальных) координат на Λ^n можно взять (y', s) , где $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$; будем называть эти координаты лучевыми. Решая задачу (3), получаем функцию $S = S(x, p) \in C^\infty(\Lambda^n)$: $S(x, p) = -a + \int_L \langle p, dx \rangle$, где L –

отрезок приходящий в точку (x, p) бихарактеристики, заключенный между точкой (x, p) и начальной точкой, для которой $s = 0$. Определим функцию $F_i(\omega): \mathcal{L}_i \rightarrow \mathbb{R}$, $F_i(\omega) = S(x, p) - \langle \omega, x \rangle$, где $x \in \mathbb{R}^n$ есть произвольная точка луча, выпущенного из $J_i^{-1}(\omega)$; это определение не зависит от выбора точки x , поскольку $\nabla S(x, p) = \omega$.

В работе [2] показано, что функции $F_i(\omega)$ являются фазами семейств лучей, идущих в направлении ω . Мы предположим, что все эти функции существенно различны.

УСЛОВИЕ С. Для любого правильного направления ω_0 при всех $1 \leq i < j \leq p$ множество критических точек функции $F_i - F_j$, определенной на $\mathcal{L}_{i,j} := \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$, имеет меру нуль.

ТЕОРЕМА 1. Пусть потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям А, В и С. Тогда имеет место слабая сходимост

$$|f_k|^2 \rightarrow |f_{\text{cl}}|^2 + \sigma_{\text{cl}} \delta(\theta_0), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $|f_k|^2$ и $|f_{\text{cl}}|^2$ суть меры на S^{n-1} с плотностями $|f(\omega, k)|^2$ и $|f_{\text{cl}}(\omega)|^2$ соответственно.

Эта теорема, в частности, позволяет вычислить асимптотику полного сечения рассеяния и транспортного сечения рассеяния, задаваемых формулами

$$\sigma = \int_{S^{n-1}} |f(k, \omega)|^2 d\omega, \quad R = \int_{S^{n-1}} (1 - \langle \omega, \theta_0 \rangle) |f(k, \omega)|^2 d\omega \quad (6)$$

соответственно. Применяя теорему 1, мы получаем $\sigma = 2\sigma_{\text{cl}} + o(1)$, $R = R_{\text{cl}} + o(1)$, $k \rightarrow \infty$, где R_{cl} определяется так же, как и R , только при помощи $f_{\text{cl}}(\omega)$.

Теорема 1 в случае рассеяния на препятствии была доказана в [3].

Автор благодарен С. А. Пирогову, который познакомил его с работами Б. Р. Вайнберга.

Список литературы

- [1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.
[2] Б. Р. Вайнберг, *Функц. анализ и его прилож.*, 11:4 (1977), 6–18. [3] W. De Roeck, E. L. Lakshtanov, *J. Math. Phys.*, 48:1 (2007), 013501.