Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Голдаева, Об аналоге характеризационной теоремы Леви для случайного блуждания, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:14:33

ОБ АНАЛОГЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

А. А. ГОЛДАЕВА

Пусть $(B(t))_{t \geq 0}$ – броуновское движение на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $M(t) = \sup_{s \leq t} B(s)$, $L_t(B)$ – локальное время броуновского движения. Теорема Леви утверждает (см., например, [1; гл. 6, § 2]), что $(M - B, M) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B))$. Известно обобщение этой теоремы, полученное С. Э. Граверсеном и А. Н. Ширяевым для броуновского движения со сносом, а именно, если $B^\lambda = B(t) + \lambda t$, $M^\lambda(t) = \sup_{s \leq t} B^\lambda(s)$, то $(M^\lambda - B^\lambda, M^\lambda) \stackrel{\text{law}}{=} (|X^\lambda|, L(X^\lambda))$, где $(X_t^\lambda)_{0 \leq t \leq 1}$ – единственное строгое решение стохастического дифференциального уравнения $dX_t^\lambda = -\lambda \operatorname{sign} X_t^\lambda dt + dB_t$, $X_0^\lambda = 0$, а $L_t(X^\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{I}\{|X_s^\lambda| \leq \varepsilon\} ds$.

В данной работе показывается, что (вопреки мнению, что сформулированные результаты применимы лишь броуновскому движению) аналогичные результаты справедливы и для случайных блужданий, порожденных схемой Бернулли.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимающие значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Обозначим $M_n = \max_{k \leq n} S_k$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место следующее свойство по распределению: $\text{Law}(M_n - S_n, M_n; n \geq 0) = \text{Law}(|S_n|, L_n(S); n \geq 0)$, где $L_n(S) = \#\{k : 1 \leq k \leq n : S_{k-1} = 0\}$ – число нулей последовательности S_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дискретный аналог формулы Танака (см. [3; гл. 2, § 1b])

$$|S_n| = \sum_{k=1}^n (\operatorname{sign} S_{k-1}) \Delta S_k + L_n(S). \quad (1)$$

Обозначим $A_n = \sum_{k=1}^n (\operatorname{sign} S_{k-1}) \Delta S_k$. Перепишем формулу (1) в виде $|S_n| = A_n + L_n(S)$ и применим к ней лемму Скорохода (см. [1; гл. 6, § 2]). Тогда $L_n(S) = \sup_{k \leq n} S_k$. С другой стороны, $M_n - S_n = -S_n + M_n$. Таким образом, видим, что M и $M - S$ (соответственно L и $|S|$) могут быть получены из $-S$ (соответственно из S) с помощью леммы Скорохода одной и той же детерминированной процедурой. Так как $\text{Law}(-S) = \text{Law}(A)$, то теорема доказана.

Рассмотрим теперь несимметричный случай. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ – случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимающие значения ± 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, $\tilde{S}_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $\tilde{M}_n = \max_{k \leq n} \tilde{S}_k$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место следующее равенство по распределению:*

$$\text{Law}(\tilde{M}_n - \tilde{S}_n, \tilde{M}_n; n \geq 0) = \text{Law}(|X_n|, L_n(X); n \geq 0), \quad (2)$$

где $\Delta X_n = -\operatorname{sign} X_{n-1} + \Delta S_n$, $X_0 = 0$, $L_n(X) = \#\{k : 1 \leq k \leq n : X_{k-1} = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ новую меру $\tilde{P}$:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}(s) = \prod_{k=1}^n (2p)^{\frac{1}{2}(1+s_k-s_{k-1})} (2q)^{\frac{1}{2}(1-(s_k-s_{k-1}))}.$$

По теореме Гирсанова $\text{Law}(\tilde{S} \mid \tilde{P}) = \text{Law}(S \mid P)$. Пусть $G(x, y)$ – непрерывный функционал из $D(\mathbb{R}) \times D(\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$. Используя теорему 1, получаем

$$\mathbb{E}[G(\tilde{M} - \tilde{S}, \tilde{M})] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\frac{d\tilde{P}}{dP}(\tilde{S}) \right)^{-1} G(\tilde{M} - \tilde{S}, \tilde{M}) \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{dP}{d\tilde{P}}(L - |S|) \right)^{-1} G(|S|, L(S)) \right]. \quad (3)$$

С другой стороны, введем новую меру P^* :

$$\frac{dP^*}{dP}(x) = \prod_{k=1}^n (2p)^{\frac{1}{2}(1 + (-\sum_{j=1}^k (\text{sign } x_{j-1}) \Delta x_j + \sum_{j=1}^{k-1} (\text{sign } x_{j-1}) \Delta x_j))} \\ \times (2q)^{\frac{1}{2}(1 - (-\sum_{j=1}^k (\text{sign } x_{j-1}) \Delta x_j + \sum_{j=1}^{k-1} (\text{sign } x_{j-1}) \Delta x_j))}.$$

По теореме Гирсанова $\text{Law}(X|P^*) = \text{Law}(S|P)$. Используя формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} E[G(|X|, L(X))] &= E^*\left[\left(\frac{dP^*}{dP}(X)\right)^{-1} G(|X|, L(X))\right] \\ &= E\left[\left(\frac{dP^*}{dP}(S)\right)^{-1} G(|S|, L(S))\right] = E\left[\left(\frac{dP^*}{dP}(L - |S|)\right)^{-1} G(|S|, L(S))\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем (2).

ТЕОРЕМА 3. При $x, y \geq 0$ выполнено соотношение

$$P(S_n < y - x, M_n \geq y) = P(S_n > y + x). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $y = 0$ (5) превращается в равенство $P(S_n < -x) = P(S_n > x)$.

Пусть $y > 0$. Рассмотрим момент остановки $\tau_y = \inf\{k \geq 0 : S_k \geq y\}$ и отраженный процесс

$$\widehat{S}_k = \begin{cases} S_k, & 0 \leq k \leq \tau_y, \\ 2S_{\tau_y} - S_k, & k > \tau_y. \end{cases}$$

Введем момент остановки $\sigma_y = \inf\{k \geq 0 : \widehat{S}_k = y\}$ и заметим, что $\sigma_y(\omega) = \tau_y(\omega)$ для всех $y \geq 0, \omega \in \{\tau_y < \infty\}$. Имеем $\{\tau_y \leq n\} = \{M_n \geq y\}$ для любых $n, y \geq 0$. Поэтому для всех $B \in \mathcal{B}(C[0; +\infty))$, $n \geq 0$ имеем $P(\tau_y \leq n, S \in B) = P(M_n \geq y, S \in B) = P(S \in \widehat{B} \cap B)$, где $\widehat{B} = G_t^{-1}([y; +\infty)) \in \mathcal{B}(C[0; +\infty))$, $G_t f = \max_{s \leq t} f(s)$. Применив принцип отражения, видим, что $P(\sigma_y \leq n, \widehat{S} \in B) = P(\widehat{S} \in \widehat{B} \cup B) = P(S \in \widehat{B} \cup B)$, т.е. $\text{Law}(\tau_y, S) = \text{Law}(\sigma_y, \widehat{S})$. При $y \geq 0$ и $k \geq \sigma_y$ получаем $\widehat{S}_k = 2S_{\tau_y} - S_k \geq 2y - S_k$. Тогда при всех $y \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(M_n \geq y, S_n < y - x) &= P(\sigma_y \leq n, \widehat{S}_n < y - x) = P(\sigma_y \leq n, S_n < y - x) \\ &= P(\tau_y \leq n, S_n > y + x) = P(M_n \geq y, S_n > y + x). \end{aligned} \quad (6)$$

Если $x \geq 0$, то $P(M_n \geq y, S_n > y + x) = P(S_n > y + x)$ и (6) влечет (5).

СЛЕДСТВИЕ. $P(M_n \geq y) = P(|S_n| \geq y)$ при всех $y \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x = 0$ в формуле (5): $P(S_n < y, M_n \geq y) = P(S_n > y)$;

$$\begin{aligned} P(M_n \geq y) &= P(M_n \geq y, S_n < y) + P(M_n \geq y, S_n \geq y) \\ &= P(S_n > y) + P(S_n \geq y) = P(|S_n| \geq y). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Revuz, M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994. [2] S. E. Graversen, A. N. Shiryaev // Bernoulli. 2000. V. 6. № 4. P. 615–620. [3] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.