Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Мальцев, Усреднение слабо-нелокальных симплектических структур,
УМН, 2004, том 59, выпуск 2, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 10:30:48

УСРЕДНЕНИЕ СЛАБО-НЕЛОКАЛЬНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

А. Я. МАЛЬЦЕВ

Мы рассматриваем общие слабо-нелокальные симплектические структуры [1], имеющие вид

$$\Omega_{ij}(x, y) = \sum_{k \geq 0} \omega_{ij}^{(k)}(\varphi, \varphi_x, \dots) \delta^{(k)}(x - y) + \sum_{s=1}^g e_s \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi^i(x)} \nu(x - y) \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi^j(y)}, \quad (1)$$

где $i, j = 1, \dots, n$, $\nu(x - y) = (1/2) \operatorname{sign}(x - y)$, $\delta^{(k)}(x - y) = \partial^k / \partial x^k \delta(x - y)$, $e_s = \pm 1$, $H^{(s)}[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(s)}(\varphi, \varphi_x, \dots) dx$ и $\Omega_{ij}(x, y)$ задает замкнутую 2-форму на пространстве функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$. Мы будем рассматривать здесь локальные эволюционные системы

$$\dot{\varphi}_t^i = Q^i(\varphi, \varphi_x, \dots), \quad (2)$$

допускающие симплектическую структуру (1) с гамильтонианом $H = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi, \varphi_x, \dots) dx$. (Функционалы $H^{(s)}[\varphi]$ должны в этом случае являться законами сохранения для системы (2), так что $h_t^{(s)} \equiv \partial_x J^{(s)}$ для некоторых $J^{(s)}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.)

Мы будем рассматривать хорошо известный метод усреднения Уизема [2]–[5] для системы (2), дающий нелинейную систему уравнений на медленно промодулированные параметры U^ν m -фазных решений (2): $\varphi^i(x, t) = \Phi^i(\omega(U)t + k(U)x + \theta_0, U^1, \dots, U^N)$, имеющую вид

$$U_T^\nu = V_\mu^\nu(U) U_X^\mu, \quad \nu, \mu = 1, \dots, N \quad (3)$$

(система Уизема). Функции $\Phi^i(\theta, U)$ являются здесь 2π -периодическими функциями по отношению к переменным $(\theta^1, \dots, \theta^m) = \theta$ и зависят от дополнительных параметров $U^1, \dots, U^N$. Векторы (m -компонентные) $\omega(U)$ и $k(U)$ играют роль частот и волновых чисел для квазипериодических решений. В методе Уизема параметры U^ν становятся функциями “медленных переменных” $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и система (3) дает необходимые условия для построения соответствующего асимптотического решения (2).

Мы построим здесь процедуру “усреднения” симплектической структуры (1), дающую слабо-нелокальную симплектическую структуру гидродинамического типа для системы (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы называем слабо-нелокальной симплектической структурой *гидродинамического типа* слабо-нелокальную симплектическую структуру, имеющую вид

$$\Omega_{\nu\mu}(X, Y) = \sum_{s,k=1}^M \kappa_{sk} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial U^\nu}(X) \nu(X - Y) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial U^\mu}(Y), \quad (4)$$

где $f^{(s)}(U)$ – некоторые функции переменных $U^1, \dots, U^N$ и κ_{sk} – некоторая постоянная симметричная билинейная форма ($\nu, \mu = 1, \dots, N$).

Определим “усреднение” любой локальной функции $f(\varphi, \varphi_x, \dots)$ согласно формуле $\langle f \rangle(U) = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\Phi(\theta, U), k^\alpha(U) \Phi_{\theta^\alpha}(\theta, U), \dots) (d^m \theta / (2\pi)^m)$. Определим также функции $T_\alpha^{(s)}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{\theta^\alpha}, \dots) = \sum_{k \geq 1} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p (\partial h^{(s)} / \partial \varphi_{kx}^i)_{px} \varphi_{\theta^\alpha, (k-p-1)x}$.

ЛЕММА 1. 1) Для любой симплектической структуры (1) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \varphi_{\theta^\alpha}^i \sum_{k \geq 0} \omega_{ij}^{(k)}(\varphi, \varphi_x, \dots) \varphi_{\theta^\beta, kx}^j + \sum_{s=1}^g e_s (h_{\theta^\beta}^{(s)} T_\alpha^{(s)} - h_{\theta^\alpha}^{(s)} T_\beta^{(s)} + (T_\alpha^{(s)})_x T_\beta^{(s)}) \\ & \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\gamma} Q_{\alpha\beta}^\gamma(\varphi, \dots) + \frac{\partial}{\partial x} A_{\alpha\beta}(\varphi, \dots) \end{aligned}$$

для некоторых функций $Q_{\alpha\beta}^\gamma(\varphi, \dots)$, $A_{\alpha\beta}(\varphi, \dots)$.

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ (МК-1375.2003.02) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00368).

2) Функции $A_{\alpha\beta}(\varphi, \dots)$ (определенные с точностью до констант) могут быть определены таким образом, что $A_{\alpha\beta}(\varphi, \dots) \equiv 0$ для любой $\varphi(\theta, x)$, зависящей только от x (и постоянной по θ при каждом фиксированном x).

Мы предположим теперь, что имеются m линейно независимых коммутирующих потоков $\varphi_{t\alpha}^i = Q_{\alpha}^i(\varphi, \varphi_x, \dots)$, $\alpha = 1, \dots, m$, системы (2), оставляющих инвариантным семейство квази-периодических решений и генерирующих на нем линейные сдвиги начальных фаз θ_0^α с частотами $\omega_{(\alpha)}(U)$. Мы требуем также, чтобы функционалы $H^{(s)}[\varphi]$ являлись законами сохранения для потоков $\varphi_{t\alpha}^i$, так что $h_{t\alpha}^{(s)} \equiv \partial_x J_{\alpha}^{(s)}$ для некоторых локальных функций $J_{\alpha}^{(s)}(\varphi, \varphi_x, \dots)$. Кроме того, мы требуем, чтобы матрица $\|\omega_{(\alpha)}^\beta(U)\|$ была невырожденной и имела обратную $\|\gamma_{\alpha}^\beta(U)\|$, так что $\gamma_{\alpha}^\beta(U)\omega_{(\alpha)}^\delta(U) \equiv \delta_{\alpha}^\beta$.

ТЕОРЕМА 1. При выполнении всех сформулированных выше условий система Уизема (3) имеет слабо-нелокальную симплектическую структуру гидродинамического типа

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu\mu}(X, Y) = & \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial k^{\alpha}}{\partial U^{\nu}}(X) \nu(X - Y) \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial U^{\mu}}(Y) + \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial U^{\nu}}(X) \nu(X - Y) \frac{\partial k^{\alpha}}{\partial U^{\mu}}(Y) \right) \\ & + \sum_{s=1}^g e_s \frac{\partial \langle h^{(s)} \rangle}{\partial U^{\nu}}(X) \nu(X - Y) \frac{\partial \langle h^{(s)} \rangle}{\partial U^{\mu}}(Y) \end{aligned}$$

с гамильтонианом $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle h \rangle dX$, где “переменные действия” $I_{\alpha}(U)$ определены посредством формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial U^{\nu}} = & \frac{\partial k^{\beta}}{\partial U^{\nu}} \left[-\langle A_{\alpha\beta} \rangle + \gamma_{\alpha}^{\delta} \sum_{s=1}^g e_s (\langle T_{\beta}^{(s)} J_{\delta}^{(s)} \rangle - \langle T_{\beta}^{(s)} \rangle \langle J_{\delta}^{(s)} \rangle) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha}^{\delta} \gamma_{\beta}^{\zeta} \sum_{s=1}^g e_s (\langle J_{\delta}^{(s)} J_{\zeta}^{(s)} \rangle - \langle J_{\delta}^{(s)} \rangle \langle J_{\zeta}^{(s)} \rangle) \right] + \left\langle \Phi_{U\nu}^i \sum_{k \geq 0} \omega_{ij}^{(k)}(\varphi, \dots) \varphi_{\theta^{\alpha}, kx}^j \right\rangle \\ & - \sum_{s=1}^g e_s \left\langle \Phi_{U\nu}^i \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi^i(x)} T_{\alpha}^{(s)} \right\rangle + \sum_{s=1}^g e_s \gamma_{\alpha}^{\beta} \left(\left\langle \Phi_{U\nu}^i \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi^i(x)} J_{\beta}^{(s)} \right\rangle - \left\langle \Phi_{U\nu}^i \frac{\delta H^{(s)}}{\delta \varphi^i(x)} \right\rangle \langle J_{\beta}^{(s)} \rangle \right) \end{aligned}$$

и функции $A_{\alpha\beta}$ нормированы в соответствии с леммой 1.

Добавим также, что функционалы $\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha} dX$, так же как и $\int_{-\infty}^{+\infty} k^{\alpha} dX$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \langle h^{(s)} \rangle dX$ и $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle h \rangle dX$ являются законами сохранения для системы Уизема (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Мальцев, С. П. Новиков // Phys. D. 2001. V. 156. №1–2. P. 53–80. [2] G. B. Whitham. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974. [3] J. C. Luke // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1966. V. 292. №1430. P. 403–412. [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // УМН. 1989. Т. 44. №6. С. 29–98. [5] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov // Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. 1993. V. 9. Part 4. P. 1–136.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: maltsev@itp.ac.ru

Принято редколлегией
23.01.2004