Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, М. Е. Широков, Проблема аддитивности для квантовых каналов с ограничениями, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:07:08

ПРОБЛЕМА АДДИТИВНОСТИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. С. Холево, М. Е. Широков

Одной из центральных проблем квантовой теории информации [1] является гипотеза об аддитивности классической пропускной способности квантовых каналов связи [2]–[4]. Недавно П. Шор показал [5], что выполнимость этой гипотезы для всех квантовых каналов эквивалентна целому ряду свойств (супер)аддитивности других важных характеристик таких, как минимальная выходная энтропия и мера сцепленности (entanglement of formation). В настоящей работе вводится новое свойство сильной аддитивности (аддитивности для каналов с ограничениями на входе), дается ряд его равносильных формулировок, устанавливается его выполнимость для некоторых нетривиальных классов каналов и отмечается, что выполнимость гипотезы аддитивности для всех каналов влечет сильную аддитивность.

Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ – конечномерные унитарные пространства. Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi: \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}')$, где $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех операторов в $\mathcal{H}$. В частности, Φ порождает аффинное отображение выпуклого множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ состояний (операторов плотности) на пространстве $\mathcal{H}$ в множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ состояний на пространстве $\mathcal{H}'$ [1].

Квантовый аналог теоремы Шеннона, установленный в [4], дает следующее выражение для классической пропускной способности:

$$C(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \overline{C}(\Phi^{\otimes n}),$$

где $\Phi^{\otimes n} = \Phi \otimes \dots \otimes \Phi$ – n -я тензорная степень канала Φ ,

$$\overline{C}(\Phi) = \max_{\{\pi_i, \rho_i\}} \left\{ H \left(\sum_i \pi_i \Phi(\rho_i) \right) - \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)) \right\}. \quad (1)$$

Здесь $H(\rho) = -\text{Tr } \rho \log \rho$ – энтропия фон Неймана, а максимум берется по произвольным входным ансамблям $\{\pi_i, \rho_i\}$, представляющим собой конечный набор состояний $\{\rho_i\} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с соответствующими вероятностями $\{\pi_i\}$. Гипотеза аддитивности состоит в том, что

$$\overline{C}(\Phi \otimes \Psi) = \overline{C}(\Phi) + \overline{C}(\Psi), \quad (2)$$

где $\Phi \otimes \Psi$ – тензорное произведение каналов Φ, Ψ . Ее выполнимость для фиксированного канала Φ и произвольного Ψ влечет, в частности, равенство $\overline{C}(\Phi) = C(\Phi)$. Обзор относящихся сюда результатов см. в [3], [5].

Обозначая $\chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\})$ выражение в фигурных скобках в (1), введем функцию

$$\chi_\Phi(\rho) = \max_{\rho_{\text{av}} = \rho} \chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}) = H(\Phi(\rho)) - \hat{H}_\Phi(\rho), \quad (3)$$

где $\rho_{\text{av}} = \sum_i \pi_i \rho_i$ – среднее ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$, $\hat{H}_\Phi(\rho) = \min_{\rho_{\text{av}} = \rho} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i))$ – выпуклое замыкание [6] выходной энтропии канала $H(\Phi(\rho))$. Функция $\chi_\Phi(\rho)$, как и $H(\Phi(\rho))$, является вогнутой непрерывной функцией на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Введем также функцию

$$\nu_H(\Phi, A) = \min_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} [H(\Phi(\rho)) + \text{Tr } A\rho], \quad (4)$$

которая является сопряженной к минимальной выходной энтропии [6].

Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – некоторое замкнутое подмножество состояний на входе канала. Рассмотрим величину

$$\overline{C}(\Phi, \mathcal{A}) = \max_{\rho \in \mathcal{A}} \chi_\Phi(\rho) = \max_{\rho_{\text{av}} \in \mathcal{A}} \chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}). \quad (5)$$

В приложениях $\mathcal{A}$ обычно определяется линейным неравенством $\text{Tr } A\rho \leq \alpha$, где A – некоторый положительный оператор (например, энергия), $\alpha \geq 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов НШ 1758.2003.1 и ИНТАС 00-738.

Рассмотрим два канала $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ и $\Psi: \mathfrak{S}(\mathcal{K}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{K}')$ с ограничениями, определяемыми множествами $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{K})$ соответственно. Для канала $\Phi \otimes \Psi$ естественно ввести “наследственное” ограничение, определяемое включениями $\omega_{\text{av}}^\Phi = \text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega_{\text{av}} \in \mathcal{A}$ и $\omega_{\text{av}}^\Psi = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega_{\text{av}} \in \mathcal{B}$, где ω_{av} – среднее входного ансамбля $\{\mu_i, \omega_i\}$. Соответствующее подмножество в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ обозначим $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Гипотеза аддитивности для каналов с ограничениями состоит в том, что

$$\overline{C}(\Phi \otimes \Psi; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \overline{C}(\Phi; \mathcal{A}) + \overline{C}(\Psi; \mathcal{B}). \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ и Ψ – произвольные каналы. Следующие свойства равносильны:

- (i) равенство (6) имеет место для произвольных замкнутых подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$;
- (ii) равенство (6) имеет место для подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, определяемых соответственно неравенствами $\text{Tr} A \rho_{\text{av}} \leq \alpha$ и $\text{Tr} B \sigma_{\text{av}} \leq \beta$ при произвольных A, α, B, β ;
- (iii) $\chi_{\Phi \otimes \Psi}(\omega) \leq \chi_\Phi(\omega^\Phi) + \chi_\Psi(\omega^\Psi) \quad \forall \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$; (7)
- (iv) $\hat{H}_{\Phi \otimes \Psi}(\omega) \geq \hat{H}_\Phi(\omega^\Phi) + \hat{H}_\Psi(\omega^\Psi) \quad \forall \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$; (8)
- (v) $\nu_H(\Phi \otimes \Psi, A \otimes I + I \otimes B) = \nu_H(\Phi, A) + \nu_H(\Psi, B) \quad \forall A \in \mathfrak{B}_+(\mathcal{H}), \quad \forall B \in \mathfrak{B}_+(\mathcal{K})$.

Если выполняется одно из этих эквивалентных свойств, то будем говорить, что для каналов Φ и Ψ имеет место *сильная аддитивность*.

Рассмотрим канал $\hat{\Phi}: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$, и пусть $E \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), 0 \leq E \leq I$. Пусть $q \in [0; 1]$ и $d \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Расширение Шора $\hat{\Phi}(E, q, d)$ с вероятностью $1 - q$ действует как канал Φ , а с вероятностью q производит измерение в $\mathcal{H}$ с двумя исходами $\{0, 1\}$, описываемое разложением единицы $\{I - E, E\}$. Если исход измерения 1, то на выход посылаются $\log d$ бит классической информации, в противном случае – сигнал неудачи. Точное определение см. в [7], [5]. Интересна асимптотика, когда q стремится к нулю, а d – к бесконечности, причем отношение $q \log d = \lambda$ остается постоянным. Тогда $\hat{\Phi}$ с высокой вероятностью действует на входные состояния ρ как Φ , изредка посылая большое количество информации, пропорциональное величине $\text{Tr} \rho E$. Это объясняет связь между пропускной способностью расширения $\hat{\Phi}$ и канала Φ с линейным ограничением на входе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ и $\Psi: \mathfrak{S}(\mathcal{K}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathcal{K}')$ – произвольные каналы с фиксированным ограничением $\mathcal{B}$ на входе второго канала. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) аддитивность (6) имеет место для канала Φ с произвольным замкнутым ограничением на входе и канала Ψ с ограничением $\mathcal{B}$;
- (ii) свойство аддитивности выполняется асимптотически при $d \rightarrow \infty$ для последовательности каналов $\{\hat{\Phi}(E, \lambda/\log d, d)\}_{d \in \mathbb{N}}$ с произвольным оператором $0 \leq E \leq I$ и произвольным $\lambda > 0$ и канала Ψ с ограничением $\mathcal{B}$.

Применяя эту теорему дважды, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Выполнимость гипотезы аддитивности (2) для всех каналов влечет свойство сильной аддитивности (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Холево. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002. [2] Г. Г. Амосов, Р. Ф. Вернер, А. С. Холево // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. № 4. С. 25–34. [3] A. S. Holevo. <http://www.imaph.nat.tu-bs.de/qi/problems/problems.html>. [4] А. С. Холево // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 193–230. [5] P. Shor. Arxiv e-print quant-ph/0305035, 2003. [6] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. [7] A. S. Holevo, M. E. Shirokov. Arxiv e-print quant-ph/0306196, 2003.