Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:16:40

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов
над локальными кольцами

Е. И. Бунина

Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал. Пусть G – групповая схема Шевалле–Демазюра, ассоциированная с неприводимой системой корней Φ типов A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$); $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ – группа точек G со значениями в R (присоединенная группа Шевалле типа Φ над кольцом R); $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ – элементарная подгруппа в $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ (элементарная присоединенная группа Шевалле), где R – локальное коммутативное кольцо с единицей. В этой статье мы описываем автоморфизмы групп $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ и $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$. Предположим, что R – локальное кольцо с $1/2$, содержащее такой обратимый элемент α , что элемент $\alpha^2 - 1$ также обратим. Тогда каждый автоморфизм группы $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ ($E_{\text{ad}}(R, \Phi)$) стандартен (см. далее определения стандартных автоморфизмов). Эти результаты для групп Шевалле над полями были получены Р. Стейнбергом [1] для конечного случая и Дж. Э. Хамфри [2] для бесконечного. К. Судзуки [3] исследовал автоморфизмы групп Шевалле над кольцами p -адических чисел. Э. Абе [4] доказал сформулированный результат для нётеровых колец, однако класс локальных колец не содержится полностью в классе нётеровых колец, а доказательства работы [4] не проходят для произвольных локальных колец. Для того чтобы доказать нашу теорему, мы обобщаем некоторые методы, использованные в статье В. М. Петечука [5].

Определим четыре типа автоморфизмов группы Шевалле $G_{\pi}(R, \Phi)$, которые мы назовем *стандартными*.

Центральные автоморфизмы. Пусть $C_G(R)$ – центр группы $G_{\pi}(R, \Phi)$ и $\tau: G_{\pi}(R, \Phi) \rightarrow C_G(R)$ – гомоморфизм групп. Тогда отображение $x \mapsto \tau(x)x$ из $G_{\pi}(R, \Phi)$ на себя является автоморфизмом $G_{\pi}(R, \Phi)$, который мы обозначаем той же буквой τ и называем *центральной автоморфизмом* $G_{\pi}(R, \Phi)$.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho: R \rightarrow R$ – автоморфизм кольца R . Отображение $x \mapsto \rho \circ x$ из $G_{\pi}(R, \Phi)$ на себя является автоморфизмом $G_{\pi}(R, \Phi)$, который мы обозначаем той же буквой ρ и называем *кольцевым автоморфизмом* $G_{\pi}(R, \Phi)$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть V – пространство представления π группы $G_{\pi}(R, \Phi)$, $g \in GL(V)$ – такая матрица, что $gG_{\pi}(R, \Phi)g^{-1} = G_{\pi}(R, \Phi)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ из $G_{\pi}(R, \Phi)$ на себя является автоморфизмом группы $G(R)$, который мы обозначаем через i_g и называем *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$, индуцированным элементом g группы $GL(V)$.

Графовые автоморфизмы. Пусть Δ – базис Φ (который мы фиксируем раз и навсегда), а δ – автоморфизм Φ такой, что $\delta\Delta = \Delta$. Тогда существует единственный

автоморфизм $G_\pi(R, \Phi)$ такой, что для любого $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ переходит в $x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$, где $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$ для всех $\alpha \in \Phi$ и $\varepsilon(\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$. Мы обозначаем этот автоморфизм той же буквой δ и называем его *графовым автоморфизмом* группы $G_\pi(R, \Phi)$.

Аналогичным образом можно определить четыре типа автоморфизмов элементарной подгруппы $E(R)$. Автоморфизм σ группы $G_\pi(R, \Phi)$ (или $E_\pi(R, \Phi)$) называется *стандартным*, если он является произведением автоморфизмов этих четырех типов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ – элементарная группа Шевалле с неприводимой системой корней одного из типов A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$), R – коммутативное локальное кольцо с $1/2$. Пусть кольцо R содержит обратимый элемент α такой, что $\alpha^2 - 1$ обратим в R . Тогда любой автоморфизм группы $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ стандартен.

Аналогичная теорема для групп Шевалле $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ имеет немного другую формулировку. В случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) $3 \in R^*$; 2) $R^3 = R$; 3) N не делится на 3, формулировка теоремы остается прежней. Если же ни одно из этих условий не выполнено, то рассмотрим группу $U_3 := \{x \in R \mid x \equiv 1 \pmod J \text{ и } x^3 = 1\}$. Группа $\bar{G} := (U_3 \cdot E_N) \times G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ является подгруппой в $GL_N(R)$ и содержит группу Шевалле $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$. Все графовые и кольцевые автоморфизмы группы Шевалле $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ естественным образом продолжаются на группу $\bar{G}$, кроме того, у нее существуют свои внутренние и центральные автоморфизмы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ – группа Шевалле с неприводимой системой корней одного из типов A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$), R – коммутативное локальное кольцо с $1/2$. Пусть кольцо R содержит обратимый элемент α такой, что $\alpha^2 - 1$ обратим в R . Тогда любой автоморфизм группы $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ совпадает на этой группе с некоторым стандартным автоморфизмом группы $\bar{G}$.

Ограничения $l \geq 2$ и $1/2 \in R$ являются существенными. Например, группы $PSL_2(\mathbb{F}_4)$, $PSL_2(\mathbb{Z}_5)$, $PSL_2(\mathbb{Z}_7)$, $PSL_3(\mathbb{Z}_2)$ имеют нестандартные автоморфизмы. Описание нестандартных автоморфизмов групп $SL_3(R)$, $GL_3(R)$ над локальными кольцами с необратимой двойкой можно найти в работе [6].

Список литературы

- [1] R. Steinberg, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 606–615. [2] J. E. Humphreys, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 908–911. [3] K. Suzuki, *Kumamoto J. Sci. (Math.)*, **16:1** (1984), 39–47. [4] Э. Абе, *Алгебра и анализ*, **5:2** (1993), 74–90. [5] В. М. Петечук, *Матем. заметки*, **28:2** (1980), 187–204. [6] В. М. Петечук, *Матем. заметки*, **31:5** (1982), 657–668.

Е. И. Бунина (E. I. Bunina)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
19.05.2007