Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Плыкин, Странные аттракторы A -каскадов, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 2, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:56:32

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ А-КАСКАДОВ

Р. В. Плыкин

Настоящая заметка является кратким изложением доклада автора на конференции “Колмогоров и современная математика” (Москва, июнь 2003). Изучение стохастических свойств гладких динамических систем зачастую приводит к исследованию устойчивых притягивающих предельных множеств сложной геометрической природы, так называемых “странных аттракторов”. Исследуется задача топологической классификации гиперболических странных аттракторов.

1. Квазипорядок Смейла и аттракторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Считается, что два базисных множества Λ, Λ' A -диффеоморфизма f связаны отношением $\Lambda \succ \Lambda'$, если существует цепочка базисных множеств $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k = \Lambda'$ такая, что $\text{clos } W^u(\Lambda_i) \cap \text{clos } W^s(\Lambda_{i+1}) \neq \emptyset$ для $1 \leq i \leq k-1$. Базисные множества Λ, Λ' считаются эквивалентными $\Lambda \approx \Lambda'$, если $\Lambda \succ \Lambda' \succ \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отношение $\gamma \succ \gamma'$ между двумя классами эквивалентности базисных множеств имеет место, если существуют $\Lambda \in \gamma, \Lambda' \in \gamma'$, для которых $\Lambda \succ \Lambda'$.

Для классов базисных множеств введенное отношение является частичным порядком. При этом каждый класс γ состоит из базисных множеств $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$, образующих замкнутую цепочку $\Lambda_1 \succ \Lambda_2 \succ \dots \succ \Lambda_k \succ \Lambda_1$ по отношению к введенному квазипорядку.

Введем следующие обозначения: $W^s(\gamma) = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Lambda_i)$, $W^u(\gamma) = \bigcup_{i=1}^k W^u(\Lambda_i)$, $[\gamma] = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $[\gamma]$, соответствующее минимальному классу эквивалентности базисных множеств относительно квазипорядка Смейла, называется аттрактором. Аттрактор, не являющийся многообразием, называется странным.

ТЕОРЕМА 1. Если γ есть класс эквивалентности базисных множеств A -диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ компактного многообразия M , то следующие условия эквивалентны.

- I. γ есть минимальный класс эквивалентности относительно квазипорядка.
- II. $\Pi_1: W^u(\gamma) = [\gamma]$; $\Pi_2: \gamma$ состоит из единственного базисного множества.
- III. Множество $W^s(\gamma)$ открыто.
- IV. Существует такая компактная окрестность $U \supset \text{int } U \supset [\gamma]$, что $f(U) \subset U$ и $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = [\gamma]$.

Доказательство будет проведено в виде проверки импликаций $I \Rightarrow \Pi_1 \Rightarrow \text{III} \Rightarrow \Pi_2 \Rightarrow I$; $\text{III} \Rightarrow \text{IV} \Rightarrow \text{III}$.

$I \Rightarrow \Pi_1$. Пусть γ – минимальный класс, а $\{\gamma_i: i = 1, \dots, m\}$ – остальные классы эквивалентности базисных множеств. Поскольку $\text{clos } W^u(\gamma) \cap \text{clos } W^s(\gamma_i) = \emptyset$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, существует такое $\varepsilon > 0$, что компактная ε -окрестность B множества $\text{clos } W^u(\gamma)$ не имеет общих точек с $\bigcup_{i=1}^m \text{clos } W^s(\gamma_i)$. Рассмотрим множество $F = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B) \supset \text{clos } W^u(\gamma)$. Если $x \in F$, то $f^{-n}x \in B$ для всех $n \geq 0$, так что α – предельное множество $\alpha(x)$ содержится в B и, следовательно, в $[\gamma]$. Поэтому $x \in W^u(\gamma)$. Таким образом, $\text{clos } W^u(\gamma) \subset F \subset W^u(\gamma)$, откуда вытекает, что $W^u(\gamma)$ замкнуто и вследствие $F = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B) \supset W^u(\gamma)$ выполнено равенство $F = W^u(\gamma)$. Рассмотрим множество $W^s(\gamma)$. Согласно теореме о спектральном разложении $W^s(\gamma) = M \setminus \bigcup_{i=1}^m W^s(\gamma_i) \supset M \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{clos } W^s(\gamma_i) \supset B \supset [\gamma]$. Поэтому для любого $x \in B$ $f^n(x) \rightarrow [\gamma]$ при $n \rightarrow +\infty$ и, следовательно, $F = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B) = [\gamma]$, и, таким образом, $[\gamma] = F = W^u(\gamma)$.

Для доказательства $\Pi_1 \Rightarrow \text{III}$ заметим, что из равенства $[\gamma] = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i = \bigcup_{i=1}^k W^u(\Lambda_i)$ вытекают равенства $W^u(\Lambda_i) = \Lambda_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Утверждение III является следствием локальной структуры произведения базисных множеств. Заметим также, что для любого $\delta > 0$ непуста внутренность множеств $W_\delta^s(\Lambda_i)$, $W_\delta^s(\gamma)$, составленных локальными диаметра δ устойчивыми многообразиями точек множеств $\Lambda_i, [\gamma]$.

Докажем $\text{III} \Rightarrow \Pi_2$. Предположим, что в классе γ содержатся множества Λ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, $\Lambda_1 \prec \Lambda_2 \prec \dots \prec \Lambda_k \prec \Lambda_1$. Условие $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ эквивалентно непустоте множества $\text{clos } W^u(\Lambda_2) \cap$

$\text{clos } W^s(\Lambda_1) = \Lambda_2 \cap \text{clos } W^s(\Lambda_1)$. Отсюда и из открытости множеств $W^s(\Lambda_i)$ следует, что $W^s(\Lambda_1) \cap W^s(\Lambda_2) \neq \emptyset$, — приходим к противоречию.

Докажем (II, III) $\Rightarrow$ I. Предположим, что вопреки I найдется класс $\bar{\gamma} \prec \gamma$. Тогда найдутся такие базисные множества $\Lambda \in \gamma$, $\bar{\Lambda} \in \bar{\gamma}$, что $\text{clos } W^u(\Lambda) \cap \text{clos } W^s(\bar{\Lambda}) = \Lambda \cap \text{clos } W^s(\bar{\Lambda}) \neq \emptyset$, откуда вследствие открытости $W^s(\Lambda)$ следует непустота множества $W^s(\Lambda) \cap W^s(\bar{\Lambda})$, что приводит к противоречию.

Таким образом, доказана эквивалентность утверждений I, II и III.

Докажем III $\Leftrightarrow$ IV. Пусть $W^s(\gamma)$ — открытое множество, и пусть компактная ε -окрестность $B(\gamma)$ множества $[\gamma]$ входит в $W^s(\gamma)$. Тогда $\bigcap_{n \geq 0} f^n B(\gamma) = [\gamma]$ и согласно одной теореме Смейла существует принадлежащая $B(\gamma)$ компактная окрестность $V \supset [\gamma]$, для которой $f(V) \subset \text{int } V$ и $\bigcap_{n \geq 0} f^n(V) = [\gamma]$, что и требовалось.

Обратно: пусть существует компактная окрестность $V \supset \text{int } V \supset [\gamma]$, для которой выполнено включение $V \subset f^{-1} \text{int } V$. Отсюда следует $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n} \text{int } V \subset W^s(\gamma)$. Справедливо и обратное включение $W^s(\gamma) \subset \bigcup f^{-n} \text{int } V$, так как если $x \in W^s(\gamma)$, то $f^n(x) \rightarrow [\gamma]$ и, следовательно, найдется такое $n \geq 0$, что $f^n(x) \in \text{int } V$, откуда $x \in f^{-n} \text{int } V \subset \bigcup_{n \geq 0} \text{int } f^{-n} V$. Поэтому множество $W^s(\gamma) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} \text{int } V$ открыто, что и требовалось.

2. О топологической классификации растягивающихся аттракторов коразмерности один.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Аттрактор Λ A -каскада $f: M \rightarrow M$, для которого $\dim W^u(\Lambda) = \dim M - 1$, называется растягивающимся аттрактором коразмерности один.

Согласно [1] растягивающиеся аттракторы коразмерности один бывают двух типов: ориентируемые и неориентируемые. Каждый ориентируемый (неориентируемый) аттрактор порождается парой (A, P) (тройкой (A, P, Θ)), где A — гиперболический автоморфизм тора коразмерности один (характеризующийся тем, что спектр определяемой им унимодулярной матрицы делится единичной окружностью комплексной плоскости на два множества, по крайней мере одно из которых содержит единственный элемент), P — конечное множество периодических траекторий, включающее в себя в случае неориентируемого аттрактора неподвижные точки инволюции Θ порождающего аттрактор тора, причем $A\Theta = \Theta A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть A — унимодулярная матрица, порождающая аттрактор. Централизатором $Z(A)$ называется совокупность унимодулярных, перестановочных с A матриц.

ТЕОРЕМА 2 (см. [2]). *Ориентируемые [неориентируемые] растягивающиеся аттракторы $\Lambda(A_1, P_1)$, $\Lambda(A_2, P_2)$ [$\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$, $\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$] гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое Ψ — линейное отображение тора вида $\Psi(x) = Cx + \xi$ (здесь C — унимодулярная матрица), что $\Psi A_1 \Psi^{-1} \in Z(A_2)$, при этом $\Psi P_1 = P_2$ [$\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$] и точки спектров матриц, соответствующие одинаковым собственным векторам, одинаково расположены относительно стандартной единичной окружности комплексной плоскости.*

В качестве следствия сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Если известно, что ориентируемый [неориентируемый] аттрактор $\Lambda(A_1, P_1)$ [$\Lambda(A_1, P_1, \Theta_1)$] порождается гиперболическим автоморфизмом тора коразмерности один с тривиальным централизатором, обладающим образующей A , то он гомеоморфен ориентируемому [неориентируемому] аттрактору $\Lambda(A_2, P_2)$ [$\Lambda(A_2, P_2, \Theta_2)$] тогда и только тогда, когда найдется такое линейное отображение тора Ψ , что $\Psi A_1 \Psi^{-1} = A^m$, $A_2 = A^n$, $\Psi P_1 = P_2$ [$\Theta_2 = \Psi \Theta_1 \Psi^{-1}$] и числа m, n одного знака.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. В. Плыкин // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 75–113. [2] Р. В. Плыкин // УМН. 2002. Т. 57. № 6. С. 123–166.