Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, М. А. Чеботарь, Функциональные тождества в кольцах и их приложения, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:13:30

УДК 512.552

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА В КОЛЬЦАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

К. И. Бейдар, А. В. Михалев, М. А. Чеботарь

В данном обзоре изложены основные результаты и дан анализ современного состояния теории функциональных тождеств. Среди полученных приложений – решение всех проблем Херстейна об отображениях лиевского типа, описание Ли-совместимых умножений и характеристика отображений, сохраняющих коммутативность, и отображений, сохраняющих нормальные элементы.

Библиография: 112 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Общая теория	8
3. Отображения лиевского типа	15
4. Умножения Ли-допустимых алгебр и другие задачи из теории алгебр Ли	19
5. Отображения, сохраняющие алгебраические свойства элементов	24
Список литературы	25

1. Введение

Пусть $\mathcal{F}$ – коммутативное кольцо с 1 и $\mathcal{A}$ – ассоциативная $\mathcal{F}$ -алгебра. Известно, что если в $\mathcal{A}$ определить операцию умножения по правилу $[x, y] = xy - yx$ (*лиево умножение*), то $(\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ станет алгеброй Ли. Аналогично, если в $\mathcal{A}$ определить операцию умножения по правилу $x \circ y = xy + yx$ (*йорданово умножение*), то $(\mathcal{A}, +, \circ)$ станет йордановой алгеброй. Под *левой (йордановой) подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$ понимается $\mathcal{F}$ -подмодуль алгебры $\mathcal{A}$, замкнутый относительно лиева (йорданова) умножения. Подмодуль $\mathcal{L}$ алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющий более сильному условию $[\mathcal{L}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{L}$, называется *левым идеалом* алгебры $\mathcal{A}$. Для любого подмножества $\mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{A}$ определим его *центр* $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ как множество $\{r \in \mathcal{R} \mid [x, r] = 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{R}\}$. Далее, обозначим через $[\mathcal{R}, \mathcal{R}]$ $\mathcal{F}$ -подмодуль алгебры $\mathcal{A}$, порожденный

Работа второго автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00218) и фонда ИНТАС.

$\{[x, y] \mid x, y \in \mathcal{R}\}$. Заметим, что $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ и $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ являются лиевыми идеалами алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – алгебра с инволюцией $*$. Напомним, что инволюция $*$ – это отображение алгебры $\mathcal{A}$ в себя такое, что $(x + y)^* = x^* + y^*$, $(xy)^* = y^*x^*$, $(x^*)^* = x$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$.

Множество $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x^* = x\}$ называется множеством *симметрических* элементов, а множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x^* = -x\}$ называется множеством *кососимметрических* элементов алгебры $\mathcal{A}$. Известно, что $\mathcal{K}$ – подалгебра Ли, а $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ – йорданова подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. *Лиев идеал подалгебры Ли* $\mathcal{K}$ – это $\mathcal{F}$ -подмодуль $\mathcal{I}$ подалгебры $\mathcal{K}$ такой, что $[\mathcal{I}, \mathcal{K}] \subseteq \mathcal{I}$. Например, $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]$ – лиев идеал подалгебры $\mathcal{K}$.

В 50-х годах прошлого века Херстейн [66], [67] инициировал изучение связей между ассоциативными, лиевыми и йордановыми структурами ассоциативных колец. Используя элементарные комбинаторные методы, Херстейн описал строение лиевых и йордановых идеалов для простых колец $\mathcal{A}$, тем самым продолжив классические результаты Картана и Киллинга о простых конечномерных алгебрах Ли над полем комплексных чисел. Однако некоторые естественные вопросы (а среди них все вопросы об описании лиевых изоморфизмов) до недавнего времени оставались открытыми. Напомним, что под *лиевым гомоморфизмом* $\mathcal{F}$ -алгебры Ли $\mathcal{I}$ в $\mathcal{F}$ -алгебру Ли $\mathcal{U}$ понимается $\mathcal{F}$ -линейное отображение $\alpha: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ такое, что $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$ для всех $x, y \in \mathcal{I}$.

Понятно, что изоморфизм или взятый со знаком минус антиизоморфизм алгебр является лиевым изоморфизмом. Возникает естественный вопрос: насколько справедливо обратное, хотя бы для некоторых важных классов ассоциативных колец? Другими словами, верно ли, что изоморфизмы лиевых подалгебр некоторых ассоциативных алгебр индуцированы (по модулю отображений в центр) (анти)изоморфизмами?

В 1961 году Херстейн [66; с. 528–529] предположил, что ответ на этот вопрос должен быть положительным для лиевых изоморфизмов алгебр $\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]/[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \cap \mathcal{Z}$ и, в том случае, когда $\mathcal{A}$ – кольцо с инволюцией, для лиевых изоморфизмов $\mathcal{K}$, $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]$ и $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]/[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \cap \mathcal{Z}$, при условии, что $\mathcal{A}$ – простое кольцо (т.е. кольцо, в котором все идеалы тривиальны). Аналогичные проблемы были сформулированы и для лиевых дифференцирований. Алгебры Ли $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]/[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \cap \mathcal{Z}$ и $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]/[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \cap \mathcal{Z}$ представляют особый интерес, поскольку они, за исключением нескольких случаев, являются простыми [66; теоремы 4 и 10]. Следует отметить, что присутствия антиизоморфизмов в результатах о лиевых изоморфизмах кососимметрических элементов можно избежать, поскольку если β – взятый со знаком “–” антигомоморфизм кольца $\mathcal{A}$ с инволюцией, то отображение $a \mapsto -(a^*)^\beta$ является гомоморфизмом, совпадающим на $\mathcal{K}$ с β .

В классическом случае колец матриц над полем решение проблем Херстейна было хорошо известно (см. [71; гл. 10]). В 1951 году известный китайский математик Ло-кэн Хуа [70] описал лиевы автоморфизмы колец матриц над телами. Дальнейшее развитие программы Херстейна было связано с работами Мартиндейла и его школы [69], [81], [84], [86]–[89], [109], в которых исследовались лиевы отображения в кольцах, содержащих нетривиальные идемпотенты, т.е. элементы e (отличные от 0 и от 1) такие, что $e^2 = e$. Грубо говоря, наличие нетривиальных идемпотентов делает коль-

по “близким” к кольцу матриц. При наличии этого дополнительного предположения Мартиндейлу [84] впервые удалось получить результаты об описании лиевых отображений для первичных колец (т.е. колец $\mathcal{A}$ таких, что $a\mathcal{A}b = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $b = 0$), что являлось отдельным вопросом в программе Херстейна [66; с. 528–529]. Интересно отметить, что понятие расширенного центроида (называемого часто центроидом Мартиндейла), сыгравшее важную роль в теории обобщенных полиномиальных тождеств [85], впервые появилось при рассмотрении лиевых отображений первичных колец.

Задачи, связанные с описанием лиевых отображений, также активно изучались в операторных алгебрах [4]–[7], [64], [93]–[95], где техника исследования вовлекала условие существования нетривиальных идемпотентов. Проблема описания лиевых отображений без этого условия оставалась открытой в течение длительного времени.

Интересно провести параллель между исследованием лиевых и йордановых отображений. В принципе, во многих задачах йорданов случай считается проще лиевского. Цитируя Херстейна [66; с. 518]: “. . . вообще говоря, в рассмотрении вопросов, связанных со структурой идеалов, гомоморфизмов, дифференцирований, йорданов случай намного проще поддается изучению, чем лиевский. Одной из причин, почему это так, является то, что в лиевском случае на нашем пути постоянно возникает центр $\mathcal{R}$, и поэтому многие вопросы, на которые в йордановом случае были даны исчерпывающие ответы, в лиевском случае остаются нетронутыми”. Йордановы гомоморфизмы произвольного ассоциативного кольца на первичное кольцо были описаны Херстейном [65] в 1956 году. В 1967 году Мартиндейл описал йордановы гомоморфизмы йорданова кольца симметрических элементов при условии, что кольцо содержит нетривиальные идемпотенты [83] (см. также работу Джекобсона [72]). Хотя предполагалось, что йорданов случай проще, техника работ, в которых условие на существование идемпотентов было опущено, является довольно сложной [92], [90] и опирается на фундаментальную работу Е. И. Зельманова [112].

Первый результат о лиевых отображениях, в котором нет условия на существование нетривиальных идемпотентов, был получен в 1993 году словенским математиком М. Брешаром [39], который описал лиевы изоморфизмы произвольных первичных колец. Идею доказательства можно описать довольно просто. Всякий лиев изоморфизм α ассоциативного кольца $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству $[x^\alpha, (x^2)^\alpha] = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Это выражение, с точки зрения сегодняшнего дня, является очень простым функциональным тождеством (см. раздел 2 нашего текста). Таким образом, можно описать элементы вида $(x^2)^\alpha$. Зная, как α действует на квадратах элементов (и отсюда на йордановом произведении), и в то же время зная, как α действует на лиевом произведении (α – лиев изоморфизм), легко описать действие α на обычном произведении. Эта же идея работает и в полупервичных кольцах [8]. В 1994 году К. И. Бейдар, У. Мартиндейл и А. В. Михалев описали лиевы изоморфизмы алгебр $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – первичное кольцо с инволюцией первого рода [30] (см. также [29] и [31; гл. 9]). Хотя доказательство существенно более трудное, но его идея была довольно близка по духу: всякий лиев изоморфизм α лиева кольца $\mathcal{K}$ удовлетворяет функциональному тождеству $[x^\alpha, (x^3)^\alpha] = 0$ для всех $x \in \mathcal{K}$ (известно, что если $x \in \mathcal{K}$, то и $x^3 \in \mathcal{K}$).

Рассмотрение лиевых изоморфизмов лиевых идеалов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ (в частности, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ и $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]$) требовало другого подхода, поскольку не было ясно, как получить функ-

циональные тождества (известно, что эти лиевы кольца, вообще говоря, не являются замкнутыми относительно операции возведения в любую степень). Тем не менее, соответствующие функциональные тождества были построены.

Хотя в йордановом случае сюръективные гомоморфизмы были описаны довольно давно, в лиевом случае до недавнего времени рассматривались только лиевы изоморфизмы. Первым результатом о сюръективных лиевых гомоморфизмах стала работа К. И. Бейдара и М. А. Чеботаря [24], где были описаны лиевы гомоморфизмы лиевых идеалов произвольных колец на лиевы идеалы первичных колец. Ключевым инструментом в этом исследовании стал аппарат d -свободных множеств, разработанный в [21], [22].

Использование d -свободных множеств предоставляет общий подход к описанию отображений самых разных подмножеств колец. Под d -свободным подмножеством кольца, грубо говоря, подразумевается такое подмножество, что функциональное тождество от менее чем d переменных имеет на нем только “стандартные” (т.е. “очевидные”) решения. С помощью результатов [16], [21], [22] в работе [17] были описаны лиевы изоморфизмы лиевых идеалов кососимметрических элементов, и, тем самым, последняя из серии проблем Херстейна о лиевых изоморфизмах была решена.

Проблема описания лиевых дифференцирований, также являющаяся частью программы Херстейна, имеет похожую историю. Напомним, что под *лиевым дифференцированием* $\mathcal{F}$ -алгебры Ли $\mathcal{T}$ подразумевается $\mathcal{F}$ -линейное отображение $\delta: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ такое, что $\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$ для всех $x, y \in \mathcal{T}$.

Естественной гипотезой было предположение о том, что, по модулю отображения в центр, лиевы дифференцирования – это дифференцирования ассоциативных колец. Первый результат в этом направлении был получен в неопубликованной работе Капланского (см. [66; с. 529]). При наличии нетривиальных идемпотентов проблема описания лиевых дифференцирований исследовалась Мартиндейлом [82], Майерсом [96] и Киллам [74].

В 1993 году Брешар [39] дал описание лиевых дифференцирований для произвольных первичных колец.

Понятно, что лиево дифференцирование δ первичного кольца $\mathcal{A}$ удовлетворяет тождеству $[\delta(x), x^2] + [x, \delta(x^2)] = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Так как $[\delta(x), x^2] = [\delta(x)x + x\delta(x), x]$, то тождество, выписанное выше, можно переписать в виде

$$[B(x, x), x] = 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{A}, \text{ где } B(x, x) = \delta(x^2) - \delta(x)x - x\delta(x).$$

Теория функциональных тождеств дает нам явный вид отображения $B(x, x)$, а это, в свою очередь, предоставляет нам информацию о том, как δ действует на йордановом произведении. Зная, как δ действует на йордановом произведении, и в то же время зная, как δ действует на лиевом произведении, легко описать действие δ на обычном произведении.

Аналогично, лиево дифференцирование δ кососимметрических элементов алгебры $\mathcal{K}$ удовлетворяет тождеству

$$[\delta(x^3) - \delta(x)x^2 - x\delta(x)x - x^2\delta(x), x] = 0$$

для всех $x \in \mathcal{K}$, поэтому, используя описание отображения $T(x, x, x)$ из функционального тождества $[T(x, x, x), x] = 0$, полученное К. И. Бейдаром, У. Мартиндейлом и А. В. Михалевым [30], Свэйи [110] решил эту проблему Херстейна.

Как и в случае гомоморфизмов, описание дифференцирований лиевых идеалов первичных колец и лиевых идеалов кососимметрических элементов является наиболее сложной проблемой в этой области, поскольку неясно, как строить соответствующие функциональные тождества. Однако, используя аппарат d -свободных множеств, К. И. Бейдару и М. А. Чеботарю [25] удалось решить эту проблему Херстейна для лиевых идеалов первичных колец, а для лиевых идеалов кососимметрических элементов аналогичная проблема была решена в работе [18].

Окончательный итог программы Херстейна был подведен в работе [19], где также были рассмотрены случаи малых размерностей и приведены многочисленные примеры.

Первые результаты по функциональным тождествам связаны с описанием *коммутирующих отображений*, т.е. отображений f кольца $\mathcal{A}$ в себя таких, что $[f(x), x] = f(x)x - xf(x) = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$.

В 1957 году была опубликована работа Познера [106], где было показано, что ненулевое дифференцирование первичного кольца $\mathcal{A}$ является коммутирующим отображением тогда и только тогда, когда кольцо $\mathcal{A}$ – коммутативно. Аналогичный вопрос для коммутирующих автоморфизмов был рассмотрен Мэйном [91]. Эти результаты имели многочисленные обобщения, но мы затронем только одно из них.

Пусть $\mathcal{A}$ – простое кольцо с единицей и центром $\mathcal{Z}$. Что можно сказать об аддитивном отображении $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ таком, что $[f(x), x] = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$? Понятно, что любое отображение вида $f = \lambda x + \mu(x)$, где $\lambda \in \mathcal{Z}$, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}$, является коммутирующим. Но есть ли коммутирующие отображения, которые имеют другой вид? Отрицательный ответ на этот вопрос, полученный Брешаром [37], стал первым результатом в теории функциональных тождеств. В действительности, Брешар получил более общий результат – он описал коммутирующие отображения первичных колец, но, поскольку в это описание вовлекается понятие расширенного центроида Мартиндейла, мы, для простоты, ограничимся случаем простых колец с единицей.

К этому результату был проявлен значительный интерес, и в течение нескольких лет появился ряд работ на эту тему [3], [8], [27], [30], [35]–[46], [49], [50], [52]–[54], [56], [77]–[80], [110].

В этом цикле результатов уже появились первые важные приложения. Описание Брешаром [39] биаддитивных коммутирующих отображений стало ключевым результатом в решении проблем Херстейна о лиевых изоморфизмах и лиевых дифференцированиях первичных колец. Аналогично, описание триаддитивных коммутирующих отображений в кольцах с инволюцией, полученное Бейдаром, Мартиндейлом и Михалевым [30], привело к решению проблемы Херстейна о лиевых изоморфизмах лиевых колец кососимметрических элементов первичных колец с инволюцией. Эта же конструкция была использована Свэйном [110] для описания лиевых дифференцирований лиевых колец кососимметрических элементов первичных колец с инволюцией.

Существенное влияние на развитие этого направления теории колец оказали статьи Брешара [42], [43]. Основной результат работы [42] – это описание аддитивных отображений f_1, f_2, f_3, f_4 первичного кольца $\mathcal{A}$, удовлетворяющих тождеству

$$f_1(x)y + f_2(y)x + xf_3(y) + yf_4(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{A}.$$

Такие тождества называются функциональными тождествами степени 2, поскольку в них участвуют 2 переменные x и y .

В работе [43] рассматривалось более сложное тождество

$$\sum_{i=1}^n F_i(y)xa_i + \sum_{i=1}^m G_i(x)yb_i + \sum_{i=1}^k c_iyH_i(x) + \sum_{i=1}^l d_ixK_i(y) = 0$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$, где $F_i, G_i, H_i, K_i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – аддитивные отображения первичного кольца $\mathcal{A}$ и $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_m\}, \{c_1, \dots, c_k\}, \{d_1, \dots, d_l\}$ – подмножества элементов кольца $\mathcal{A}$. Такие тождества называются обобщенными функциональными тождествами степени 2. Однако не было ясно, можно ли описать отображения в функциональных и обобщенных функциональных тождествах степени, отличной от 2, хотя высказывалось предположение о том, что результаты о тождествах степени 2 могут быть продолжены на более общий случай [43; с. 691].

Чеботарь [58] исследовал обобщенные функциональные тождества произвольной степени; им было показано, что аналогичные результаты могут быть получены для тождеств, вовлекающих фиксированный антиавтоморфизм [59]. Вслед за этим Бейдар [10] рассмотрел функциональные тождества произвольной степени, а функциональные тождества с инволюцией были рассмотрены Бейдаром и Мартиндейлом в работе [28]. Тем самым был создан необходимый задел для развития общей теории функциональных тождеств.

Следующим шагом было создание Бейдаром и Чеботарем [21], [22] теории d -свободных множеств, на базе которых были получены основные приложения. Одновременно с этим исследовались некоторые тождества специального вида с целью расширения класса колец, для которых применима техника функциональных тождеств [11]–[14], [16], [20], [47], [48].

Среди полученных приложений этой техники мы отметим решение всех проблем Херстейна об описании отображений лиевского типа [17]–[19], [24], [25], описание Ли-совместимых отображений [23] и отображений, сохраняющих алгебраические свойства элементов [15].

Для ознакомления с примерами функциональных и обобщенных функциональных тождеств и некоторыми их приложениями мы рекомендуем обзор Брешара [46]. Целью нашего обзора является обсуждение современного состояния этой бурно развивавшейся в последние годы теории.

2. Общая теория

Изложение материала в этом разделе мы построили следующим образом: сначала дается определение d -свободных множеств и некоторые их свойства [21]. Затем, жертвуя значительной степенью общности по сравнению с [21], мы рассматриваем функциональные тождества, вовлекающие фиксированное сюръективное отображение множеств (это частный случай d -свободных троек из [21]). Мы приводим всего две теоремы о квазиполиномах (из работы [22] читатель может получить более полную картину), но на примере этих теорем в следующих разделах будет проиллюстрирована техника использования функциональных тождеств в приложениях. После этой части, где будет говориться о свойствах d -свободных множеств как некоторого абстрактного объекта, мы приведем примеры d -свободных подмножеств первичных

колец, используя результаты [10], [16], [28]. С другими примерами d -свободных множеств можно ознакомиться в работах [13], [14]. Наконец, в конце раздела мы обсудим обобщенные функциональные тождества [58] и функциональные тождества специального вида [47], [48].

Сначала мы зафиксируем необходимые обозначения. Всюду в этом разделе $\mathcal{F}$ будет обозначать коммутативное кольцо с 1, $\mathcal{Q}$ – алгебру с 1 над кольцом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{C}$ – центр этой алгебры. Пусть $\mathcal{R}$ – непустое подмножество алгебры $\mathcal{Q}$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для любого $n \in \mathbb{N}$ мы будем обозначать через $\mathcal{R}^n$ декартово произведение n -й степени множества $\mathcal{R}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $E: \mathcal{R}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Q}$, $p: \mathcal{R}^{m-2} \rightarrow \mathcal{Q}$ – произвольные отображения. В случае, когда $m = 1$, мы будем считать, что E – элемент алгебры $\mathcal{Q}$, а $p = 0$. Для индексов i и j , $1 \leq i < j \leq m$, мы определим отображения $E^i, p^{ij}, p^{ji}: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{Q}$ по правилу

$$\begin{aligned} E^i(\bar{x}_m) &= E(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), \\ p^{ij}(\bar{x}_m) &= p^{ji}(\bar{x}_m) = p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Здесь и далее $\bar{x}_m$ означает $(x_1, \dots, x_m)$.

Пусть $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$, и для всех индексов $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$ пусть $E_i, F_j: \mathcal{R}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Q}$ – произвольные отображения. Основными *функциональными тождествами* являются следующие два тождества:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^i(\bar{x}_m) x_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j F_j^j(\bar{x}_m) = 0 \quad \text{для всех } \bar{x}_m \in \mathcal{R}^m \quad (1)$$

и несколько более общее тождество

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^i(\bar{x}_m) x_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j F_j^j(\bar{x}_m) \in \mathcal{C} \quad \text{для всех } \bar{x}_m \in \mathcal{R}^m. \quad (2)$$

Предположим, что существуют отображения $p_{ij}: \mathcal{R}^{m-2} \rightarrow \mathcal{Q}, i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, i \neq j$, $\lambda_k: \mathcal{R}^{m-1} \rightarrow \mathcal{C}, k \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, такие, что:

$$\begin{aligned} E_i^i(\bar{x}_m) &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ j \neq i}} x_j p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m) + \lambda_i^i(\bar{x}_m), \\ F_j^j(\bar{x}_m) &= - \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m) x_i - \lambda_j^j(\bar{x}_m), \\ \lambda_k &= 0, \quad \text{если } k \notin \mathcal{I} \cap \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $\bar{x}_m \in \mathcal{R}^m, i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$. Подставляя выражения (3) в (1), мы получаем верное тождество, не зависящее от природы множества $\mathcal{R}$. По этой причине выражения (3) мы будем называть *стандартным решением* каждого из функциональных тождеств (1) и (2). Заметим, что мы не исключаем из рассмотрения случай, когда одно из множеств $\mathcal{I}$ или $\mathcal{J}$ является пустым. Сумма, в которой индекс пробегает пустое

множество, подразумевается равной нулю. В частности, это означает, что стандартным решением функционального тождества $\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^i(\bar{x}_m) x_i = 0$ является $E_i = 0$, $i \in \mathcal{I}$.

Позднее мы выясним, что довольно часто стандартное решение является единственным решением. Это послужило поводом для введения следующего важного понятия [21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непустое подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$ называется d -свободным, где $d \in \mathbb{N}$, если для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$ выполнены два следующих условия:

- (а) если $\max\{|\mathcal{I}|, |\mathcal{J}|\} \leq d$, то (1) влечет (3);
- (б) если $\max\{|\mathcal{I}|, |\mathcal{J}|\} \leq d - 1$, то (2) влечет (3).

Таким образом, d -свободные множества – это такие подмножества $\mathcal{R}$ алгебры $\mathcal{Q}$, что любые функциональные тождества на $\mathcal{R}$, вовлекающие “не очень много” переменных, имеют только стандартные решения.

d -свободные множества обладают многими интересными свойствами. Отметим лишь некоторые из них.

ТЕОРЕМА 2 [21]. Пусть подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$ является d -свободным. Тогда:

- (i) для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$ с $\max\{|\mathcal{I}|, |\mathcal{J}|\} \leq d$ функциональное тождество (1) имеет единственное стандартное решение;
- (ii) для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$ с $\max\{|\mathcal{I}|, |\mathcal{J}|\} \leq d - 1$ функциональное тождество (2) имеет единственное стандартное решение.

Следующее свойство позволяет расширить класс d -свободных множеств.

ТЕОРЕМА 3 [21]. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$ – непустые подмножества в $\mathcal{Q}$ такие, что $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}$. Если $\mathcal{R}$ – d -свободно, то и $\mathcal{T}$ – d -свободно.

Для ряда приложений требуются несколько более сложные функциональные тождества, чем (1) и (2). Пусть $\mathcal{S}$ – произвольное непустое множество, и пусть $\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ является сюръективным отображением. Пусть $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, m\}$, и для всех индексов $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$ пусть $E_i, F_j: \mathcal{S}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Q}$ – произвольные отображения.

Нас будут интересовать следующие два тождества:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^i(\bar{x}_m) \alpha(x_i) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha(x_j) F_j^j(\bar{x}_m) = 0 \quad \text{для всех } \bar{x}_m \in \mathcal{S}^m; \quad (4)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} E_i^i(\bar{x}_m) \alpha(x_i) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha(x_j) F_j^j(\bar{x}_m) \in \mathcal{C} \quad \text{для всех } \bar{x}_m \in \mathcal{S}^m. \quad (5)$$

Легко заметить, что в том случае, когда $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ и α является тождественным отображением, тождества (4) и (5) принимают знакомый вид тождеств (1) и (2).

Если существуют отображения $p_{ij}: \mathcal{S}^{m-2} \rightarrow \mathcal{Q}, i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, i \neq j, \lambda_k: \mathcal{S}^{m-1} \rightarrow$

$\mathcal{C}, k \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, такие, что

$$\begin{aligned} E_i^i(\bar{x}_m) &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ j \neq i}} \alpha(x_j) p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m) + \lambda_i^i(\bar{x}_m), \\ F_j^j(\bar{x}_m) &= - \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m) \alpha(x_i) - \lambda_j^j(\bar{x}_m), \\ \lambda_k &= 0, \text{ если } k \notin \mathcal{I} \cap \mathcal{J}, \end{aligned} \tag{6}$$

для всех $\bar{x}_m \in \mathcal{S}^m$, $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$, то выражения (6) мы будем называть *стандартным решением* функциональных тождеств (4) и (5).

Имеет место следующая фундаментальная теорема.

ТЕОРЕМА 4 [21]. *Пусть подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$ является d -свободным. Тогда функциональные тождества (4) и (5) имеют стандартные решения.*

Для приложений важны некоторые частные случаи тождеств (4) и (5). Особую роль играют тождества, вовлекающие так называемые *квазиполиномы*. Для того чтобы дать их строгое определение, нам придется ввести ряд обозначений.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – конечное множество переменных, и пусть k – натуральное число такое, что $k \leq m$. Обозначим через $\mathcal{M}_m^k$ множество всех полилинейных мономов степени k от переменных $\{x_1, \dots, x_m\}$. В частности, $\mathcal{M}_m^0 = \{1\}$, $\mathcal{M}_m^1 = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\mathcal{M}_m^2 = \{x_1 x_2, \dots, x_{m-1} x_m\}$ и так далее. Положим $\mathcal{M}_m = \bigcup_{k=0}^m \mathcal{M}_m^k$. Для заданного монома $M = x_{i_1} \cdots x_{i_u} \in \mathcal{M}_m$, где $u \leq m - k$, мы обозначим через $\mathcal{M}_m^k(M)$ множество всех полилинейных мономов степени k от переменных $\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_u}\}$ и положим $\mathcal{M}_m(M) = \bigcup_{k=0}^{m-u} \mathcal{M}_m^k(M)$. Если нам задан еще один моном $N = x_{l_1} \cdots x_{l_r} \in \mathcal{M}_m$, то мы будем писать, что

$$M \wedge N = \emptyset$$

в том случае, когда $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_u}\} \cap \{x_{l_1}, \dots, x_{l_r}\} = \emptyset$, т.е. когда $N \in \mathcal{M}_m^r(M)$. Пусть

$$\{j_1, \dots, j_{m-u}\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_u\},$$

где $j_t < j_{t+1}$ для всех $t = 1, \dots, m - u - 1$. Для любого заданного отображения $F: \mathcal{S}^{m-u} \rightarrow \mathcal{Q}$ определим отображение $F^M: \mathcal{S}^m \rightarrow \mathcal{Q}$ по правилу

$$F^M(\bar{s}_m) = F^M(s_1, \dots, s_m) = F(s_{j_1}, \dots, s_{j_{m-u}})$$

для всех $\bar{s}_m \in \mathcal{S}^{m-u}$. В частности, если $u = 1$ и $M = x_i$, то $F^M(\bar{s}_m) = F^i(\bar{s}_m)$. Мы будем подразумевать, что если $\deg(M) = m$, то $\mathcal{S}^0 = \emptyset$ и F – это некий фиксированный элемент кольца $\mathcal{Q}$.

Наконец, для монома $M = x_{i_1} \cdots x_{i_u} \in \mathcal{M}_m$ и элементов $\bar{s}_m \in \mathcal{S}^m$ положим

$$M(\bar{s}_m) = \alpha(s_{i_1}) \cdots \alpha(s_{i_u}) \in \mathcal{Q}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть k, n – натуральные числа такие, что $0 \leq k \leq n$, $M \in \mathcal{M}_n^k$ и $\lambda: \mathcal{S}^{n-k} \rightarrow \mathcal{C}$. Отображение $\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{Q}$, определенное по правилу $\bar{s}_n \mapsto \lambda^M(\bar{s}_n)M(\bar{s}_n)$ для всех $\bar{s}_n \in \mathcal{S}^n$, называется *полилинейным квазимономом степени $\leq n$* и обозначается λM . Если $\lambda \neq 0$, то это отображение называется *полилинейным квазимономом степени n* . Отображение λ называется *коэффициентом* квазимонома λM . Сумму $\sum_{L \in \mathcal{M}_n} \lambda_L L$ различных полилинейных квазимономов степени n мы будем называть *полилинейным квазиполиномом степени $\leq n$* . Если $\lambda_L \neq 0$ для некоторого монома $L \in \mathcal{M}_n$, то эту сумму мы назовем *полилинейным квазиполиномом степени n* .

Поясним это определение на примере.

ПРИМЕР 6. Отображение $E: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ называется *полилинейным квазиполиномом степени ≤ 2* , если существуют элементы $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}$ и отображения $\mu_1, \mu_2: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}, \nu: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что

$$E(x, y) = \lambda_1 \alpha(x) \alpha(y) + \lambda_2 \alpha(y) \alpha(x) + \mu_1(x) \alpha(y) + \mu_2(y) \alpha(x) + \nu(x, y) \text{ для всех } x, y \in \mathcal{S}.$$

Мы будем называть E *полилинейным квазиполиномом степени 2*, если по крайней мере один коэффициент квазиполинома E ненулевой, т.е. один из элементов λ_1, λ_2 или одно из отображений μ_1, μ_2, ν отличны от нуля.

ТЕОРЕМА 7 [22]. Пусть m – натуральное число и $\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ – сюръективное отображение множеств. Пусть $\lambda_L: \mathcal{S}^m(L) \rightarrow \mathcal{C}, L \in \mathcal{M}_m$, – такие отображения, что

$$\sum_{L \in \mathcal{M}_m} \lambda_L^L(\bar{s}_m) L(\bar{s}_m) = 0$$

для всех $\bar{s}_m \in \mathcal{S}^m$. Предположим, что либо $\lambda_1 = 0$ и $\mathcal{R}$ – m -свободное подмножество алгебры $\mathcal{Q}$, либо $\mathcal{R}$ – $(m+1)$ -свободное подмножество алгебры $\mathcal{Q}$. Тогда $\lambda_L = 0$ для всех $L \in \mathcal{M}_m$.

Другими словами, эта теорема утверждает, что на $(m+1)$ -свободных множествах нет нетривиальных квазиполиномиальных тождеств степени $\leq m$.

Следует отметить, что примером таких квазиполиномиальных тождеств является тождество со следом, изучавшееся Ю. П. Размысловым [108] и Прочези [107].

Следующий результат показывает, что отображения, участвующие в функциональных тождествах, довольно часто имеют вид квазиполиномов.

ТЕОРЕМА 8 [22]. Пусть m, n – натуральные числа такие, что $n < m$, и $\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ – сюръективное отображение множеств. Пусть $B: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{Q}, a_{M,N} \in \mathcal{C}, M, N \in \mathcal{M}_m, \deg(MN) = m - n, M \wedge N = \emptyset$, и $\lambda_L: \mathcal{S}^{m-\deg(L)} \rightarrow \mathcal{C}, L \in \mathcal{M}_m$, – такие отображения и элементы, что

$$\sum_{\substack{M, N \in \mathcal{M}_m, M \wedge N = \emptyset \\ \deg(MN) = m - n}} a_{M,N} M(\bar{s}_m) B^{MN}(\bar{s}_m) N(\bar{s}_m) + \sum_{L \in \mathcal{M}_m} \lambda_L^L(\bar{s}_m) L(\bar{s}_m) = 0$$

для всех $\bar{s}_m \in \mathcal{S}^m$. Пусть $u = \min\{\deg(M) \mid a_{M,N} \neq 0\}$. Предположим, что по крайней мере один элемент $a_{M,N}$ с $\deg(M) = u$ обратим и либо $\lambda_1 = 0$ и $\mathcal{R}$ –

m -свободное подмножество алгебры $\mathcal{Q}$, либо $\mathcal{R} - (m+1)$ -свободное подмножество алгебры $\mathcal{Q}$. Тогда $\lambda_L = 0$ для всех L с $\deg(L) < m - n$ и существуют и единственны отображения $\mu_K: \mathcal{S}^{n-\deg(K)} \rightarrow \mathcal{C}$, $K \in \mathcal{M}_n$, такие, что

$$B(\bar{s}_n) = \sum_{K \in \mathcal{M}_n} \mu_K^K(\bar{s}_n) K(\bar{s}_n)$$

для всех $\bar{s}_n \in \mathcal{S}^n$. Более того, если $\mathcal{S}$ – $\mathcal{F}$ -модуль, $\mathcal{R}$ – подмодуль $\mathcal{F}$ -модуля $\mathcal{Q}$, α – эпиморфизм $\mathcal{F}$ -модулей и отображение B является $\mathcal{F}$ -полилинейным, то все μ_K являются $\mathcal{F}$ -полилинейными.

Приложения этих результатов будут даны в следующих разделах, а сейчас мы подошли к самому важному вопросу этого раздела: “Какие множества являются d -свободными?”

С определениями и свойствами максимального левого кольца частных $\mathcal{Q}_{ml}$, центрального замыкания $\mathcal{AC}$ и расширенного центроида Мартиндейла $\mathcal{C}_m$ первичного кольца $\mathcal{A}$ можно ознакомиться в части 2 книги [31]. Заметим лишь, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}_{ml}$ и $\mathcal{C}_m$ является центром кольца $\mathcal{Q}_{ml}$. Тем самым, $\mathcal{Q}_{ml}$ будет выступать в определении d -свободного множества в роли $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{C}_m$ в роли $\mathcal{C}$.

Для любого элемента $x \in \mathcal{Q}_{ml}$ под степенью $\deg(x)$ мы будем подразумевать его степень алгебраичности над $\mathcal{C}_m$, если x алгебраичен над $\mathcal{C}_m$, и ∞ , если x не алгебраичен над $\mathcal{C}_m$. Для любого непустого подмножества $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}_{ml}$ мы введем понятие его степени по правилу

$$\deg(\mathcal{R}) = \sup\{\deg(x) \mid x \in \mathcal{R}\}.$$

ТЕОРЕМА 9 [10]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных и $d \in \mathbb{N}$. Если $d \leq \deg(\mathcal{A})$, то $\mathcal{A}$ – d -свободное подмножество $\mathcal{Q}_{ml}$.

Аналогичный результат справедлив и для левых идеалов.

ТЕОРЕМА 10 [10]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных, $\mathcal{L}$ – нецентральный левый идеал кольца $\mathcal{A}$ и $d \in \mathbb{N}$. Если $d+1 \leq \deg(\mathcal{A})$, то $\mathcal{L}$ – d -свободное подмножество в $\mathcal{Q}_{ml}$.

Приведем несколько примеров d -свободных множеств в кольцах с инволюцией.

ТЕОРЕМА 11 [21]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо с инволюцией, $\mathcal{S}$ – множество симметрических элементов, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных и $d \in \mathbb{N}$. Если $2d+2 \leq \deg(\mathcal{A})$, то $\mathcal{S}$ – d -свободное подмножество $\mathcal{Q}_{ml}$.

ТЕОРЕМА 12 [21]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо с инволюцией, $\mathcal{K}$ – левое кольцо кососимметрических элементов, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных и $d \in \mathbb{N}$. Если $2d+2 \leq \deg(\mathcal{A})$, то $\mathcal{K}$ – d -свободное подмножество $\mathcal{Q}_{ml}$.

ТЕОРЕМА 13 [16]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо с инволюцией, $\mathcal{K}$ – левое кольцо кососимметрических элементов, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных и $d \in \mathbb{N}$. Если $2d+3 \leq \deg(\mathcal{A})$, то любой нецентральный левый идеал левого кольца $\mathcal{K}$ является d -свободным подмножеством $\mathcal{Q}_{ml}$.

Теоремы 9–13 показывают, что функциональные тождества имеют только стандартные решения во многих важных подмножествах первичного кольца в том случае, когда степень алгебраичности первичного кольца не очень мала.

Для обобщенных функциональных тождеств (т.е. тождеств, вовлекающих, помимо отображений и переменных, еще и фиксированные элементы кольца) ограничения на степень алгебраичности недостаточно, чтобы решения имели “хороший вид”. Однако справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 14 [58], [11]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо, $\mathcal{Q}_{ml}$ – максимальное левое кольцо частных, $\mathcal{C}$ – расширенный центроид Мартиндейла, $r \geq 2$ – целое число, $n_i, m_i, i = 1, \dots, r$, – неотрицательные целые числа. Пусть $\mathcal{V}$ – конечномерное подпространство линейного пространства $\mathcal{Q}_{ml}$ над $\mathcal{C}$, и пусть $E_{ji}, F_{lk} : \mathcal{A}^{r-1} \rightarrow \mathcal{Q}_{ml}$ – такие отображения, что

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} E_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) x_j a_i^j + \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l F_{lk}^l(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{V}$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{A}$, где $\{a_1^j, \dots, a_{n_j}^j\}$ и $\{b_1^j, \dots, b_{m_j}^j\}$, $j = 1, \dots, r$, суть $\mathcal{C}$ -независимые подмножества в $\mathcal{Q}_{ml}$. Тогда выполняется одна из двух возможностей:

- (i) $\mathcal{AC}$ – примитивное кольцо с ненулевым цоколем и $e\mathcal{AC}e$ – конечномерная алгебра с делением над $\mathcal{C}$ для каждого примитивного идемпотента e из $\mathcal{AC}$, или
- (ii) существуют и единственны отображения $p_{jilk} : \mathcal{A}^{r-2} \rightarrow \mathcal{Q}_{ml}$ и $\lambda_{ilk} : \mathcal{A}^{r-1} \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что

$$E_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq r \\ l \neq j}} \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l p_{jilk}^j(x_1, \dots, x_r) + \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_{ijk}^j(x_1, \dots, x_r) b_k^j,$$

$$F_{lk}^l(x_1, \dots, x_r) = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq l}} \sum_{i=1}^{n_j} p_{jilk}^j(x_1, \dots, x_r) x_j a_i^j - \sum_{i=1}^{n_l} \lambda_{ilk}^l(x_1, \dots, x_r) a_i^l.$$

В частности,

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} E_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) x_j a_i^j + \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l F_{lk}^l(x_1, \dots, x_r) = 0.$$

Более того, если все отображения E_{ji} и F_{lk} являются аддитивными по каждому аргументу, то это же справедливо для отображений p_{jilk} и λ_{ilk} .

Из теоремы 14, в частности, следует, что для ненулевого элемента $a \in \mathcal{Q}_{ml}$ обобщенное функциональное тождество $F(x)ya + G(y)xa = 0$ может иметь ненулевое решение, только если $\mathcal{AC}$ – примитивное кольцо с ненулевым цоколем и $e\mathcal{AC}e$ – конечномерная алгебра с делением над $\mathcal{C}$ для каждого примитивного идемпотента e из $\mathcal{AC}$. Покажем, что этот случай возможен.

ПРИМЕР 15. Пусть $\mathcal{A}$ – кольцо бесконечных матриц над полем $\mathcal{C}$, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{C}$ – простое кольцо, совпадающее со своим поколем, и $e\mathcal{A}\mathcal{C}e$ – одномерная алгебра с делением над $\mathcal{C}$ для каждого примитивного идемпотента e из $\mathcal{A}\mathcal{C}$. Пусть $a = e_{11}$, $F(x) = e_{11}xe_{11}$, $G(y) = -e_{11}yxe_{11}$. Легко видеть, что $F(x)ya + G(y)xa = 0$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Поскольку $\deg(\mathcal{A}) = \infty$, мы также показали, что ограничения на степень алгебраичности для обобщенных функциональных тождеств недостаточно.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Условие ограничения на степень алгебраичности удобно рассматривать с точки зрения полиномиальных тождеств. Тогда можно говорить о том, что функциональные тождества имеют только стандартные решения во многих важных подмножествах первичного кольца в том случае, когда первичное кольцо не удовлетворяет полиномиальным тождествам малой степени. В этом контексте становится более понятным условие (i) теоремы 14. По теореме Мартиндейла [85] первичное кольцо $\mathcal{A}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}\mathcal{C}$ – примитивное кольцо с ненулевым поколем и $e\mathcal{A}\mathcal{C}e$ – конечномерная алгебра с делением над $\mathcal{C}$ для каждого примитивного идемпотента e из $\mathcal{A}\mathcal{C}$.

Во всех тождествах, которые мы до сих пор рассматривали, в каждом слагаемом участвовало не более одного отображения. В завершение этого раздела мы коснемся более сложных тождеств.

ТЕОРЕМА 17 [47]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо характеристики, отличной от 2, $\mathcal{C}$ – расширенный центроид Мартиндейла, $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – ненулевые аддитивные отображения. Предположим, что

$$f(x)yg(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{A}.$$

Тогда существует нетривиальный идемпотент $e \in \mathcal{A}\mathcal{C}$ такой, что $e\mathcal{A}\mathcal{C}e = e\mathcal{C}$.

ТЕОРЕМА 18 [48]. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ – первичное кольцо характеристики 0 или характеристики $> 4n - 2$, $\mathcal{C}$ – расширенный центроид Мартиндейла, $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – ненулевое аддитивное отображение. Предположим, что

$$(f(x)x)^n f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{A}.$$

Тогда существует нетривиальный идемпотент $e \in \mathcal{A}\mathcal{C}$ такой, что $e\mathcal{A}\mathcal{C}e = e\mathcal{C}$.

На сегодняшний день это все, что известно о функциональных тождествах со слагаемыми, вовлекающими несколько отображений. Было бы интересно рассмотреть тождества вида $f(x, \dots, x)yg(x, \dots, x) = 0$, $f: \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$, $g: \mathcal{A}^l \rightarrow \mathcal{A}$, или $f_1(x)f_2(x)x \cdots f_{m-1}(x)f_m(x) = 0$, $f_i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, и выяснить, справедливы ли для них аналоги теорем 17 и 18.

3. Отображения лиевского типа

В 1961 году Херстейном [66; с. 528] был сформулирован ряд проблем об отображениях лиевского типа. В частности, им были поставлены задачи описания лиевых изоморфизмов и лиевых дифференцирований для

- (I) простых и первичных колец $\mathcal{A}$;

- (II) лиевых колец $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ и $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]/\mathcal{Z} \cap [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, где $\mathcal{Z}$ – центр кольца $\mathcal{A}$;
- (III) лиевых колец кососимметрических элементов $\mathcal{K}$ простых колец $\mathcal{A}$ с инволюцией;
- (IV) лиевых колец $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]$ и $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]/\mathcal{Z} \cap [\mathcal{K}, \mathcal{K}]$.

Из первых работ по лиевым изоморфизмам отметим статью Хуа [70], где была рассмотрена задача описания лиевых автоморфизмов для колец матриц порядка $n \geq 3$ над телом в случае характеристики, отличной от 2 и 3. Для простых колец $\mathcal{A}$ характеристики 2 задача описания лиевых изоморфизмов ϕ была исследована Херстейном и Клейнфельдом [68] при дополнительном предположении о том, что лиев изоморфизм сохраняет третью степень, т.е. $\phi(x^3) = \phi(x)^3$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Важный вклад в изучение лиевых изоморфизмов и лиевых дифференцирований внес Мартиндейл, описавший эти отображения в кольцах с несколькими нетривиальными ортогональными идемпотентами [81], [82], [84], [86]–[88]. Отображения лиевского типа изучались в операторных алгебрах [4]–[7], [93]–[96], где также использовалась техника работы с идемпотентами.

В связи с этим интересно отметить, что хотя в кольцах матриц над телами описание лиевых автоморфизмов и дифференцирований было известно, в самих телах эта проблема до недавнего времени была открыта.

Проблемы Херстейна были полностью решены с помощью развитой теории функциональных тождеств. Первой из них была решена задача описания лиевых изоморфизмов для первичных колец.

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ – лиевы кольца. Напомним, что *лиево гомоморфизм* $\alpha: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ – это аддитивное отображение такое, что $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$, где $[\cdot, \cdot]$ – скобка Ли (в том случае, когда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ – подмножества ассоциативных алгебр, под скобкой Ли понимается коммутатор, т.е. $[x, y] = xy - yx$).

Идея описания лиевского изоморфизма α первичных колец $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ является простой и очень красивой. Брешар [39] заметил, что $0 = \alpha([x^2, x]) = [\alpha(x^2), \alpha(x)]$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Используя биективность отображения α , он переписал это соотношение в виде функционального тождества

$$[\alpha(\alpha^{-1}(y)^2), y] = 0 \quad \text{для всех } y \in \mathcal{A}'.$$

Описав все биаддитивные коммутирующие отображения, Брешар, в частности, получил описание отображения $\alpha(\alpha^{-1}(y)^2)$. Используя затем сложные комбинаторные вычисления, он решил эту проблему Херстейна.

ТЕОРЕМА 19 [39]. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ – первичные кольца, $\mathcal{C}'$ – расширенный центр идеала Мартиндейла кольца $\mathcal{A}'$, характеристика $\mathcal{A}'$ отлична от 2, $\deg(\mathcal{A}) > 2$ и $\deg(\mathcal{A}') > 2$. Пусть $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – лиев изоморфизм кольца $\mathcal{A}$ на кольцо $\mathcal{A}'$. Тогда существуют гомоморфизм (или взятый со знаком “–” антигомоморфизм) $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'\mathcal{C}'$ и аддитивное отображение $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}'$ такие, что

$$\alpha(u) = \varphi(u) + \mu(u) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{A}$$

$$\text{и } \mu([v, w]) = 0 \quad \text{для всех } v, w \in \mathcal{A}.$$

Используя результаты теории функциональных тождеств из раздела 2, мы дадим короткое решение более общей задачи описания сюръективных лиевых гомоморфизмов произвольного кольца на первичное кольцо.

ТЕОРЕМА 20 [24]. Пусть $\mathcal{A}'$ – первичное кольцо, $\deg(\mathcal{A}') > 3$, $\mathcal{C}'$ – расширенный центроид Мартиндейла. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное кольцо и $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ сюръективный левый гомоморфизм кольца $\mathcal{A}$ на кольцо $\mathcal{A}'$. Тогда существуют гомоморфизм (или взятый со знаком “–” антигомоморфизм) $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'\mathcal{C}'$ и аддитивное отображение $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}'$ такие, что

$$\alpha(u) = \varphi(u) + \mu(u) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{A}$$

и $\mu([v, w]) = 0$ для всех $v, w \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $[uv, w] + [vw, u] + [wu, v] = 0$ для всех $u, v, w \in \mathcal{A}$. Мы получаем, что $[\alpha(uv), \alpha(w)] + [\alpha(vw), \alpha(u)] + [\alpha(wu), \alpha(v)] = 0$ для всех $u, v, w \in \mathcal{A}$. По теореме 9 множество $\mathcal{A}'$ является 4-свободным. Ввиду теоремы 8 $\alpha(uv)$ является квазиполиномом степени ≤ 2 , т.е. существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}'$, аддитивные отображения $\mu_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}'$, $\mu_2: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}'$ и биаддитивное отображение $\nu: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{C}'$ такие, что для всех $u, v \in \mathcal{A}$ имеем

$$\alpha(uv) = \lambda_1 \alpha(u) \alpha(v) + \lambda_2 \alpha(v) \alpha(u) + \mu_1(u) \alpha(v) + \mu_2(v) \alpha(u) + \nu(u, v). \quad (7)$$

Отсюда и из определения левого гомоморфизма получаем для всех $u, v \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha([u, v] - uv + vu) = \alpha([u, v]) - \alpha(uv) + \alpha(vu) = (1 - \lambda_1 + \lambda_2) \alpha(u) \alpha(v) \\ &\quad - (1 - \lambda_1 + \lambda_2) \alpha(v) \alpha(u) + (\mu_2(u) - \mu_1(u)) \alpha(v) \\ &\quad - (\mu_2(v) - \mu_1(v)) \alpha(u) + (\nu(v, u) - \nu(u, v)). \end{aligned}$$

По теореме 7 имеем для всех $u, v \in \mathcal{A}$:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 1; \quad (8)$$

$$\mu_1(u) = \mu_2(u) = \mu(u); \quad (9)$$

$$\nu(u, v) = \nu(v, u). \quad (10)$$

Используя (7), получаем, что

$$0 = \alpha((uv)w) - \alpha(u(vw)) = q_1(u, v, w),$$

где $q_1(u, v, w)$ – квазиполином степени ≤ 3 . Заметим, что коэффициент этого квазиполинома при мономе $\alpha(v) \alpha(u) \alpha(w)$ равен $\lambda_1 \lambda_2$. По теореме 7 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Вместе с (8) это дает нам две возможности:

- (а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$;
- (б) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

Мы рассмотрим только случай (а). Учитывая (9), перепишем (7) в виде:

$$\alpha(uv) = \alpha(u) \alpha(v) + \mu(u) \alpha(v) + \mu(v) \alpha(u) + \nu(u, v) \quad \text{для всех } u, v \in \mathcal{A}. \quad (11)$$

Используя (11), снова получаем, что

$$0 = \alpha((uv)w) - \alpha(u(vw)) = q_2(u, v, w),$$

где $q_2(u, v, w)$ – квазиполином степени ≤ 3 . Заметим, что коэффициент при мономе $\alpha(w)$ в $q_2(u, v, w)$ равен $\nu(u, v) + \mu(uv) - \mu(u)\mu(v)$. По теореме 7

$$\nu(u, v) + \mu(uv) - \mu(u)\mu(v) = 0 \quad \text{для всех } u, v \in \mathcal{A}. \quad (12)$$

Положим $\varphi(u) = \alpha(u) + \mu(u)$ для всех $u \in \mathcal{A}$. Из (11) и (12) следует, что $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ для всех $u, v \in \mathcal{A}$. Из (10) и (12) вытекает, что $\mu([u, v]) = 0$ для всех $u, v \in \mathcal{A}$. Доказательство случая (а) завершено. Случай (б) рассматривается аналогично и приводит к антигомоморфизму, взятому со знаком “–”.

Используя описание биаддитивных коммутирующих отображений, Брешар решил также проблему Херстейна об описании левых дифференцирований первичных колец.

В случае кососимметрических элементов $\mathcal{K}$ идея Брешара в явном виде не проходит, поскольку если $x \in \mathcal{K}$, то $x^2 \notin \mathcal{K}$, и трюк, приведший к успеху в случае кольца, здесь не работает. К счастью, для любого $x \in \mathcal{K}$ справедливо включение $x^3 \in \mathcal{K}$. Используя описание решений функционального тождества $[f(x, x, x), x] = 0$, где $x \in \mathcal{K}$, Бейдар, Мартиндейл и Михалев [30] решили проблему Херстейна описания левых изоморфизмов левых колец кососимметрических элементов.

ТЕОРЕМА 21 [30]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – первичные кольца с инволюцией первого рода и характеристикой $\neq 2, 3$. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ – кососимметрические элементы колец $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ соответственно. Предположим, что $\deg(\mathcal{A}) > 8$. Тогда всякий левый изоморфизм $\alpha: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ может быть продолжен единственным образом до ассоциативного изоморфизма $\langle \mathcal{K} \rangle$ на $\langle \mathcal{K}' \rangle$ ассоциативных колец, порожденных $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ соответственно.

Эту идею триаддитивных коммутирующих отображений использовал Свэйн [110] для описания левых дифференцирований левых колец кососимметрических элементов первичных колец с инволюцией.

Для левых идеалов первичных колец более сложные версии идеи о коммутирующих отображениях не проходят. Проблема заключается в том, что в общем случае в левом идеале $\mathcal{L}$ первичного кольца имеется такой элемент $x \in \mathcal{L}$, что $x^n \notin \mathcal{L}$ ни для какого натурального $n > 1$. Однако, используя достигнутый прогресс в теории функциональных тождеств, Бейдар и Чеботарь решили проблемы Херстейна об описании левых изоморфизмов [24] и левых дифференцирований [25] на левых идеалах первичных колец.

ТЕОРЕМА 22 [24]. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ – первичные кольца, $\mathcal{C}'$ – расширенный центр кольца $\mathcal{A}'$ и характеристика $\mathcal{A}'$ отлична от 2. Пусть $\mathcal{L}$ – левый идеал кольца $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}'$ – левый идеал кольца $\mathcal{A}'$, и пусть $\alpha: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ – сюръективный левый гомоморфизм. Предположим, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ порождают кольца $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ соответственно. Далее предположим, что $\deg(\mathcal{A}') > 7$. Тогда существуют гомоморфизм (антигомоморфизм) $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'\mathcal{C}'$ и аддитивное отображение $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}'$ такие, что $\alpha(x) = \varphi(x) + \mu(x)$ (соответственно $\alpha(x) = -\varphi(x) + \mu(x)$) для всех $x \in \mathcal{L}$ и $\mu([\mathcal{L}, \mathcal{L}]) = 0$. Более того, если $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}$, то $\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{A}'$.

ТЕОРЕМА 23 [25]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо, $\mathcal{C}$ – расширенный центроид, $\mathcal{L}$ – левый идеал кольца $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – подкольцо кольца $\mathcal{A}$, порожденное $\mathcal{L}$, и пусть $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ – левое дифференцирование на $\mathcal{L}$. Предположим, что характеристика $\mathcal{A}$ отлична от 2 и $\deg(\mathcal{A}) > 7$. Тогда существуют дифференцирование $D: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}$ и аддитивное отображение $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что:

- (a) $\mu([\mathcal{L}, \mathcal{L}]) = 0$;
- (b) $D(x) = \delta(x) + \mu(x)$ для всех $x \in \mathcal{L}$;
- (c) если $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}$, то $D(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.

Аналогичные методы и более сложные вычисления привели к успеху в решении проблем Херстейна о левых изоморфизмах [17] и левых дифференцированиях [17] на левых идеалах кососимметрических элементов первичных колец.

ТЕОРЕМА 24 [17]. Пусть $\mathcal{A}$ – кольцо с инволюцией, $\mathcal{K}$ – левое кольцо кососимметрических элементов кольца $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ – левый идеал $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{A}'$ – первичное кольцо с инволюцией, $\mathcal{K}'$ – левое кольцо кососимметрических элементов $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{L}'$ – нецентральный левый идеал $\mathcal{K}'$. Пусть $\mathcal{C}'$ – расширенный центроид кольца $\mathcal{A}'$, $\overline{\mathcal{L}'} = \mathcal{L}'/\mathcal{L}' \cap \mathcal{C}'$, и пусть $\alpha: \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathcal{L}'}$ – сюръективный левый гомоморфизм. Предположим, что характеристика кольца $\mathcal{A}'$ отлична от 2 и $\deg(\mathcal{A}') > 20$. Тогда существует гомоморфизм $\varphi: \langle \mathcal{L} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{L}' \rangle \mathcal{C}' + \mathcal{C}'$ такой, что $\varphi(x) = \alpha(x)$ для всех $x \in \mathcal{L}$. Более того, если инволюция кольца $\mathcal{A}'$ первого рода, то $\varphi(\langle \mathcal{L} \rangle) = \langle \mathcal{L}' \rangle$.

ТЕОРЕМА 25 [18]. Пусть $\mathcal{A}$ – первичное кольцо с инволюцией, $\mathcal{K}$ – левое кольцо кососимметрических элементов кольца $\mathcal{A}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{A})$ – максимальное левое кольцо частных и $\mathcal{C}$ – расширенный центроид. Пусть $\mathcal{L}$ – нецентральный левый идеал $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}/\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$, и пусть $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ – левое дифференцирование, отображающее $\mathcal{L}$ в $\overline{\mathcal{Q}}$. Пусть $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ – такое отображение, что $\gamma(x) = \delta(x)$ для всех $x \in \mathcal{L}$, и $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^\gamma$. Предположим, что характеристика кольца $\mathcal{A}$ отлична от 2 и $\deg(\mathcal{A}) > 20$. Тогда существуют дифференцирование $d: \langle \mathcal{L} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle \mathcal{C} + \mathcal{C}$ и отображение $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что

$$d(x) = \gamma(x) + \mu(x) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{L} \quad (\text{отсюда } \delta(x) = \overline{d(x)} \text{ для всех } x \in \mathcal{L}).$$

Более того, если $\delta(\mathcal{L}) \subseteq \overline{\mathcal{L}}$, то:

- (a) $\mu([\mathcal{L}, \mathcal{L}]) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$;
- (b) $d(x) - \mu(x) \in \mathcal{L}$ для всех $x \in \mathcal{L}$ (отсюда $d(\langle \mathcal{L} \rangle) \subseteq \langle \mathcal{L} \rangle \mathcal{C} + \mathcal{C}$);
- (c) если $\mathcal{L} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$, то $d(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ (отсюда $d(\langle \mathcal{L} \rangle) \subseteq \langle \mathcal{L} \rangle$).

Таким образом, все проблемы Херстейна об описании отображений лиевского типа были решены. Случаи, когда кольца $\mathcal{A}$ имеют небольшую степень $\deg(\mathcal{A})$, рассмотрены в работе [19].

4. Умножения Ли-допустимых алгебр и другие задачи из теории алгебр Ли

Задача описания левых гомоморфизмов может быть рассмотрена как частный случай задачи описания отображений, сохраняющих полином.

Пусть $\mathcal{Q}$ – кольцо с 1 и центром $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ – подкольцо кольца $\mathcal{C}$, содержащее 1, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ – множество переменных и $\mathcal{F}\langle\mathcal{X}\rangle$ – свободная $\mathcal{F}$ -алгебра с 1 на множестве $\mathcal{X}$. Ненулевой полином $g \in \mathcal{F}\langle\mathcal{X}\rangle$ мы будем называть *специальным*, если все его коэффициенты обратимы в $\mathcal{C}$.

Первым результатом об отображениях, сохраняющих произвольный полином, была теорема Бейдара–Фонга [26]. Мы сформулируем ее в несколько более общем виде.

ТЕОРЕМА 26 [26]. *Пусть $\mathcal{R}$ – первичное кольцо характеристики, отличной от 2, с расширенным центроидом $\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{F}$ – подкольцо с 1 поля $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ – произвольная $\mathcal{F}$ -алгебра. Пусть далее $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}\langle\mathcal{X}\rangle$ – ненулевой полилинейный полином и $\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ – сюръективное аддитивное отображение такое, что*

$$\alpha(f(x_1, \dots, x_m)) = f(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_m)) \quad \text{для всех } x_1, \dots, x_m \in \mathcal{S}.$$

Предположим, что $\deg(\mathcal{R}) > 2m - 1$. Тогда

$$\alpha(x) = \lambda\varphi(x) + \mu(x)$$

для всех $x \in \mathcal{S}$, где $\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda \neq 0$, $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ – аддитивное отображение, и $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}\mathcal{C}$ является либо гомоморфизмом, либо антигомоморфизмом.

Идея построения функционального тождества основана на следующем наблюдении.

Пусть $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ – дифференцирование $\mathcal{F}$ -алгебры $\mathcal{A}$, и пусть $f(\bar{x}_m) \in \mathcal{F}\langle\mathcal{X}\rangle$ – полилинейный полином от переменных $x_1, \dots, x_m$. Заметим, что

$$d(f(\bar{a}_m)) = \sum_{i=1}^m f(a_1, \dots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \dots, a_m)$$

для всех $\bar{a}_m \in \mathcal{A}^m$. В частности,

$$[f(\bar{a}_m), b] = \sum_{i=1}^m f(a_1, \dots, a_{i-1}, [a_i, b], a_{i+1}, \dots, a_m) \quad (13)$$

для всех $\bar{a}_m \in \mathcal{A}^m$, $b \in \mathcal{A}$.

Вычислим теперь $\alpha([f(x_1, \dots, x_m), f(y_1, \dots, y_m)])$ двумя способами. С одной стороны,

$$\begin{aligned} & \alpha([f(x_1, \dots, x_m), f(y_1, \dots, y_m)]) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha(f(x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, f(y_1, \dots, y_m)], x_{i+1}, \dots, x_m)) \\ &= \sum_{i=1}^m f(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{i-1}), \alpha([x_i, f(y_1, \dots, y_m)]), \alpha(x_{i+1}), \dots, \alpha(x_m)) \\ &= \sum_{i=1}^m f\left(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{i-1}), \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=1}^m f(\alpha(y_1), \dots, \alpha([x_i, y_j]), \dots, \alpha(y_m)), \alpha(x_{i+1}), \dots, \alpha(x_m)\right). \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 & \alpha([f(x_1, \dots, x_m), f(y_1, \dots, y_m)]) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha(f(y_1, \dots, y_{i-1}, [f(x_1, \dots, x_m), y_i], y_{i+1}, \dots, y_m)) \\
 &= \sum_{i=1}^m f(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), \alpha([f(x_1, \dots, x_m), y_i]), \alpha(y_{i+1}), \dots, \alpha(y_m)) \\
 &= \sum_{i=1}^m f\left(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), \right. \\
 & \quad \left. \sum_{j=1}^m f(\alpha(x_1), \dots, \alpha([x_j, y_i]), \dots, \alpha(x_m)), \alpha(y_{i+1}), \dots, \alpha(y_m)\right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Сопоставляя (14) и (15), получаем требуемое функциональное тождество.

Используя эту же идею, можно доказать более общий результат. Для индекса i , $1 \leq i \leq m$, обозначим

$$f_{x_i} = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

Для $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\langle \mathcal{X} \rangle \subseteq \mathcal{C}\langle \mathcal{X} \rangle$ пусть $\text{Ann}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}) = \{c \in \mathcal{C} \mid cg = 0 \text{ для всех } g \in \mathcal{G}\}$.

ТЕОРЕМА 27 [17]. Пусть $f(\bar{x}_m) \in \mathcal{F}\langle \mathcal{X} \rangle$, $m \geq 2$, является специальным полилинейным полиномом. Пусть, далее, $\mathcal{S}$ – подалгебра Ли $\mathcal{F}$ -алгебры $\mathcal{A}$ такая, что $f(\bar{s}_m) \in \mathcal{S}$ для всех $\bar{s}_m \in \mathcal{S}^m$, и $\alpha: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}$ – гомоморфизм $\mathcal{F}$ -модулей такой, что

$$\alpha(f(s_1, \dots, s_m)) = f(\alpha(s_1), \dots, \alpha(s_m)) \quad \text{для всех } \bar{s}_m \in \mathcal{S}^m.$$

Если $\mathcal{R} = \alpha(\mathcal{S})$ является $(2m)$ -свободным подмножеством $\mathcal{F}$ -алгебры $\mathcal{Q}$, то существуют $\lambda \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$ -билинейное отображение $\varepsilon: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что $\alpha([u, v]) = \lambda[\alpha(u), \alpha(v)] + \varepsilon(u, v)$ для всех $u, v \in \mathcal{S}$. Более того, $\text{Im}(\varepsilon) \subseteq \text{Ann}_{\mathcal{C}}(\{f_{x_i} \mid 1 \leq i \leq m\})$.

Зная примеры d -свободных множеств, из этой теоремы несложно вывести результаты для конкретных ситуаций. В частности, она приводит к решению проблем Херштейна [66; с. 528] об описании отображений, сохраняющих степень [17], [26], [51].

Покажем еще одну сферу приложений теоремы 27. В последнее время значительным интересом пользуются ассоциативные и лиевы алгебры высшего порядка ввиду их использования в физике (см. обзор [61]).

Для элементов $X_1, \dots, X_n$ ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ скобка n -го порядка определяется по правилу

$$[X_1, \dots, X_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}, \quad (16)$$

где S_n – группа перестановок n -го порядка [63]. Затем рассматривается алгебра $\mathcal{A}$, но уже с новой операцией $[\cdot, \dots, \cdot]$. В случае, когда число n четно, скобка (16) удовлетворяет обобщенному тождеству Якоби

$$\sum_{\sigma \in S_{2n-1}} \text{sign}(\sigma) [[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}], X_{\sigma(n+1)}, \dots, X_{\sigma(2n-1)}] = 0. \quad (17)$$

Под алгеброй Ли порядка n (n – четное) понимается векторное пространство V с определенной на нем полилинейной кососимметрической n -арной операцией (скобкой): $V^n \rightarrow V$, $(X_1, \dots, X_n) \rightarrow [X_1, \dots, X_n]$, удовлетворяющей обобщенному тождеству Якоби (17).

Классификация простых алгебр Ли порядка n приведена в [62]. Интересно отметить, что для простых алгебр Ли порядка $n = 2m - 2$ вида $\mathcal{A}_l$, $3 \leq m \leq l + 1$, скобка определяется так же, как в (16) [62]. Это означает, что теорема 27, в частности, может быть использована для описания автоморфизмов алгебр Ли порядка n вида $\mathcal{A}_l$, поскольку эта задача эквивалентна описанию отображений, сохраняющих полином (16).

Рассмотрим еще одну задачу, в которой на алгебраической структуре вводится новое умножение.

Для любой (не обязательно ассоциативной) алгебры $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, *)$ над полем $\mathcal{F}$ антикоммутативная алгебра $\mathcal{A}^- = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ – это векторное пространство $\mathcal{A}$ с произведением $[x, y] = x * y - y * x$. Алгебру $\mathcal{A}$ называют *Ли-допустимой*, если $\mathcal{A}^-$ является алгеброй Ли. Алгебру $\mathcal{A}$ называют *гибкой*, если $(x * y) * x = x * (y * x)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Эти понятия имеют интересный физический смысл.

В классической (ассоциативной) квантовой механике уравнение движения для оператора физической величины x в форме Гейзенберга имеет вид

$$\frac{d}{dt}x = i(Hx - xH),$$

где H – гамильтониан. Одной из естественных задач [100] был вопрос выяснения наиболее общей неассоциативной алгебры, совместимой с этим уравнением. Оказалось, что такие алгебры должны в точности быть гибкими и Ли-допустимыми.

С другой стороны, классификация гибких Ли-допустимых алгебр $\mathcal{A}$ представляла значительный интерес для алгебраистов. В случае, когда алгебра Ли $\mathcal{A}^-$ полупроста, эта задача была длительное время открытой проблемой, сформулированной Албертом [2] в 1948 году.

Лауфер и Томбер [76] дали классификацию конечномерных гибких Ли-допустимых алгебр $\mathcal{A}$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики таких, что операция возведения в степень ассоциативна и алгебры Ли $\mathcal{A}^-$ полупросты. Мьонг [97], [98] получил описание конечномерных гибких Ли-допустимых алгебр $\mathcal{A}$ над алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики таких, что операция возведения в степень ассоциативна и $\mathcal{A}^-$ – это либо классические алгебры Ли, либо обобщенные алгебры Витта.

В 1981 году Бенкарт и Осборн [33] и Окубо и Мьонг [101] независимо получили классификацию конечномерных гибких Ли-допустимых алгебр $\mathcal{A}$ над алгебраически

замкнутым полем нулевой характеристики таких, что алгебры Ли $\mathcal{A}^-$ полупросты, решив тем самым проблему Алберта.

В гибких алгебрах операция взятия третьей степени ассоциативна, т.е. $(x * x) * x = x * (x * x)$, и известно, что операция взятия любой степени ассоциативна тогда и только тогда, когда это справедливо для третьей и четвертой степеней [98]. В статье [34] Бенкарт и Осборн описали все умножения на алгебре матриц, относительно которых операция взятия степени ассоциативна, а в работе [32] Бенкарт дала классификацию Ли-допустимых алгебр $\mathcal{A}$ таких, что операция возведения в третью степень ассоциативна и алгебры Ли $\mathcal{A}^-$ полупросты. Подобные задачи изучались также в тех случаях, когда $\mathcal{A}^-$ – алгебра Вирасоро [99] или алгебра Каца–Мули [73]. Во всех этих работах используется техника работы с алгебрами Ли и матричными алгебрами. Применяя методы функциональных тождеств, К. И. Бейдар и М. А. Чеботарь в [23] описали все умножения на левых идеалах первичных алгебр и алгебрах Ли косимметрических элементов, относительно которых операция взятия степени ассоциативна.

Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – ассоциативная $\mathcal{F}$ -алгебра с умножением xu , и пусть $[x, y] = xu - yx$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Пусть $(\mathcal{L}, +, [\cdot, \cdot])$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $(\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$. Умножение $*$, определенное на векторном пространстве $\mathcal{L}$, называется *Ли-совместимым*, если $(\mathcal{L}, +, *)$ является $\mathcal{F}$ -алгеброй и существует ненулевой элемент $c \in \mathcal{F}$ такой, что

$$[x, y] = x * y - y * x = c[x, y] = cxy - cyx \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{L}.$$

ТЕОРЕМА 28 [23]. Пусть $\mathcal{F}$ – коммутативное кольцо с 1 и $\frac{1}{2}$, пусть $\mathcal{L}$ – первичная алгебра Ли над $\mathcal{F}$ и Ω – класс левых $\mathcal{F}$ -алгебр $\mathcal{R}$, удовлетворяющих одному из двух условий:

- (i) существует первичная $\mathcal{F}$ -алгебра $\mathcal{A}$ с расширенным центроидом $\mathcal{C}$ и центральным замыканием $\mathcal{A}\mathcal{C}$ такая, что $\deg(\mathcal{A}) \geq 5$, $\mathcal{R}$ – нецентральный лев идеал алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} \cap (\mathcal{C}\mathcal{R}) = 0$ и $\mathcal{C}\mathcal{R} + \mathcal{C}$ не является подкольцом в $\mathcal{A}\mathcal{C}$;
- (ii) существует первичная $\mathcal{F}$ -алгебра $\mathcal{A}$ с инволюцией первого рода, с расширенным центроидом $\mathcal{C}$ такая, что $\deg(\mathcal{A}) \geq 10$ и $\mathcal{R} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Пусть $*$: $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ – Ли-совместимое умножение на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}$ – расширенный центроид левой алгебры $\mathcal{L}$. Предположим, что $\mathcal{L}$ – подпрямое произведение алгебр из класса Ω . Тогда $\mathcal{T}$ – поле и справедливо:

- (а) операция взятия третьей степени относительно умножения $*$: $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ ассоциативна тогда и только тогда, когда существуют обратимый элемент $t \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ -линейное отображение $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ такие, что

$$x * y = \frac{1}{2} \{t[x, y] + \mu(x)y + \mu(y)x\} \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{L}; \quad (18)$$

- (б) алгебра $(\mathcal{L}, +, *)$ гибкая тогда и только тогда, когда выполнено (18) и $\mu([\mathcal{L}, \mathcal{L}]) = 0$;
- (с) если $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}$, то алгебра $(\mathcal{L}, +, *)$ гибкая тогда и только тогда, когда существует обратимый элемент $t \in \mathcal{F}$ такой, что $x * y = t[x, y]$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

Идея доказательства заключается в следующем. Определим отображение $B: \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ по правилу $B(x, y) = x * y$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$. Ясно, что отображение B билинейно. Поскольку умножение $*$ Ли-совместимо, получаем $x * y - y * x = c[x, y]$ для некоторого ненулевого элемента $c \in \mathcal{F}$, т.е.

$$B(x, y) - B(y, x) = [x, y] = c[x, y] \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{L}.$$

Если операция взятия третьей степени ассоциативна, то

$$0 = (x * x) * x - x * (x * x) = [B(x, x), x] = c[B(x, x), x] \quad \text{для всех } x \in \mathcal{L}. \quad (19)$$

Используя результаты раздела 2, получаем, что $x * y$ — квазиполином степени ≤ 2 , затем дается его строгое описание.

5. Отображения, сохраняющие алгебраические свойства элементов

Первой задачей об отображениях, сохраняющих алгебраические свойства элементов, в которой использовались функциональные тождества, была задача об описании отображений, сохраняющих коммутативность. Линейное отображение $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{A}'$ называется *отображением, сохраняющим коммутативность*, если для всех $x, y \in \mathcal{A}$ таких, что $[x, y] = 0$, справедливо $[\alpha(x), \alpha(y)] = 0$.

Очевидными примерами биективных отображений, сохраняющих коммутативность, являются отображения вида $\alpha(x) = \lambda\varphi(x) + \mu(x)$, где $\lambda \in \mathcal{A}'$ — центральный элемент, μ — отображение алгебры $\mathcal{A}$ в центр алгебры $\mathcal{A}'$ и φ — это либо изоморфизм алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, либо их антиизоморфизм. Мы покажем, что во многих случаях только отображения такого вида являются биективными отображениями, сохраняющими коммутативность.

Задачи такого рода впервые появились в 1976 году в работе Уоткинса, где были описаны биективные отображения, сохраняющие коммутативность в кольцах матриц порядка $n \geq 4$ [111]. Затем аналогичная проблема изучалась для разных подпространств матричных алгебр и некоторых операторных алгебр [9], [57], [60], [102], [104], [1], [105]. Используя функциональные тождества, Брешар [39] описал биективные отображения, сохраняющие коммутативность в первичных кольцах.

Идея, использованная Брешаром, нам уже знакома: если α является биективным отображением, сохраняющим коммутативность, то, в частности, справедливо тождество $[\alpha(x), \alpha(x^2)] = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Мы получаем, что $[y, \alpha(\alpha^{-1}(y)^2)] = 0$ для всех $y \in \mathcal{A}'$, а это тождество нам уже встречалось в разделе 3.

ТЕОРЕМА 29 [39]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ — центрально замкнутые первичные алгебры над полем $\mathcal{F}$ характеристики, отличной от 2, 3, и пусть $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ — линейное отображение такое, что $[\alpha(x), \alpha(x^2)] = 0$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\deg(\mathcal{A}) > 2$ и $\deg(\mathcal{A}') > 2$. Тогда

$$\alpha(x) = \lambda\varphi(x) + \mu(x)$$

для всех $x \in \mathcal{A}$, где $\lambda \in \mathcal{F}$, $\lambda \neq 0$, μ — линейное отображение алгебры $\mathcal{A}$ в поле $\mathcal{F}$ и φ является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$.

Аналогичный результат для полупервичных колец был получен Р. Баннингом и М. Матье [8]. Мы дадим описание биективных отображений, сохраняющих коммутативность на односторонних идеалах первичных колец.

ТЕОРЕМА 30 [20]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – центрально замкнутые первичные алгебры с единицами над полем $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ – собственные левые идеалы алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ соответственно, и пусть $\alpha: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ – биективное линейное отображение. Пусть $\deg(\mathcal{R}), \deg(\mathcal{R}') > 4$ и $\text{char}(\mathcal{C}) \neq 2$. Предположим, что $[\alpha(a^2), \alpha(a)] = 0$ для всех $a \in \mathcal{R}$. Тогда существуют $0 \neq \lambda \in \mathcal{C}$, (анти)гомоморфизм $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' + \mathcal{C}$ и линейное отображение $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ такие, что $\alpha(x) = \lambda\varphi(x) + \mu(x)$ для всех $x \in \mathcal{R}$. Более того, если левый идеал $\mathcal{R}$ в $\mathcal{A}$ имеет ненулевой правый аннулятор, то $\mu = 0$ и $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ является изоморфизмом.

Завершая разговор об отображениях, сохраняющих коммутативность, следует упомянуть работу Омладича, Раджави и Шебрля [103], где описаны соответствующие отображения в кольце матриц без дополнительных предположений о сюръективности или инъективности.

Перейдем теперь к описанию операторов, сохраняющих нормальные элементы. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – алгебры с инволюцией, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ – их кососимметрические элементы, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ – их симметрические элементы. Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется *нормальным*, если он коммутирует с x^* . Рассмотрим линейное отображение $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ такое, что $\theta(x) \in \mathcal{A}'$ является нормальным элементом для всех нормальных элементов $x \in \mathcal{A}$. Также предполагается, что отображение θ является $*$ -линейным, т.е. $\theta(x^*) = \theta(x)^*$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Такие отображения изучались в работах [55], [60], [75].

Как использовать функциональные тождества для их описания? Заметим, что если $s \in \mathcal{S}$ и $k \in \mathcal{K}$ коммутируют, т.е. $[s, k] = 0$, то $x = s + k$ – нормальный элемент. По условию элемент $\theta(x) = \theta(s) + \theta(k)$ является нормальным, т.е. $\theta(x)$ коммутирует с $\theta(x)^* = \theta(s) - \theta(k)$. Однако в этом случае $[\theta(s), \theta(k)] = 0$ при условии, что в алгебре $\mathcal{A}'$ нет 2-кручения. В частности, $k^2 \in \mathcal{S}$ для любого элемента $k \in \mathcal{K}$ и k^2 коммутирует с k , $k^3 \in \mathcal{K}$. Следовательно,

$$[\theta(k^2), \theta(k)] = 0 \quad \text{и} \quad [\theta(k^2), \theta(k^3)] = 0$$

для всех $k \in \mathcal{K}$. С помощью этих тождеств доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 31 [15]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – центрально замкнутые первичные алгебры над полем $\mathcal{F}$ с инволюцией второго рода. Предположим, что $\deg(\mathcal{A}) > 2$, $\deg(\mathcal{A}') > 2$ и характеристика $\mathcal{F}$ отлична от 2, 3. Пусть $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – биективное линейное отображение такое, что элемент $\theta(x)$ является нормальным при условии, что $x \in \mathcal{A}$ является нормальным. Тогда существуют $0 \neq \lambda \in \mathcal{F}$, линейное отображение $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ и $*$ -(анти)эпиморфизм φ алгебры $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}'$ такие, что $\theta(x) = \lambda\varphi(x) + \mu(x)$ для всех $x \in \mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 32 [15]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – центрально замкнутые первичные алгебры над полем $\mathcal{F}$ с инволюцией первого рода. Предположим, что $\deg(\mathcal{A}) > 6$, $\deg(\mathcal{A}') > 13$ и характеристика $\mathcal{F}$ отлична от 2, 3. Пусть $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ – биективное $*$ -линейное отображение такое, что элемент $\theta(x)$ является нормальным при условии, что $x \in \mathcal{A}$ является нормальным. Тогда существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, линейное отображение $\mu: \langle \mathcal{K} \rangle \rightarrow \mathcal{F}$ и $*$ -эпиморфизм φ алгебры $\langle \mathcal{K} \rangle$ на $\langle \mathcal{K}' \rangle$ такие, что $\theta(x) = \varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 x^*) + \mu(x + x^*)$ для всех $x \in \langle \mathcal{K} \rangle$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A Survey of Linear Presever Problems. Yverdon: Gordon & Breach, 1992. (Linear and Multilinear Algebra. 1992. V. 33. № 1–2.)
- [2] A. A. Albert. Power-associative rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 64. P. 552–593.
- [3] P. Ara, M. Mathieu. An application of local multipliers to centralizing mappings of C^* -algebras // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. 1993. V. 44. № 174. P. 129–138.
- [4] S. A. Ayupov. Anti-automorphisms of factors and Lie operator algebras // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. 1995. V. 46. № 182. P. 129–140.
- [5] S. A. Ayupov. Skew commutators and Lie isomorphisms in real von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1996. V. 138. № 1. P. 170–187.
- [6] S. A. Ayupov, N. A. Azamov. Commutators and Lie isomorphisms of skew elements in prime operator algebras // Comm. Algebra. 1996. V. 24. № 4. P. 1501–1520.
- [7] S. A. Ayupov, A. Rakhimov, S. Usmanov. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [8] R. Banning, M. Mathieu. Commutativity preserving mappings on semiprime rings // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 1. P. 247–265.
- [9] L. B. Beasley. Linear transformations on matrices: the invariance of commuting pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. 1978/1979. V. 6. № 3. P. 179–183.
- [10] K. I. Beidar. On functional identities and commuting additive mappings // Comm. Algebra. 1998. V. 26. № 6. P. 1819–1850.
- [11] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar. Generalized functional identities with (anti-)automorphisms and derivations on prime rings // J. Algebra. 1999. V. 215. № 2. P. 644–665.
- [12] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar. Functional identities on upper triangular matrices algebras // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. № 6. P. 4557–4565.
- [13] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar. Functional identities revised: the fractional and the strong degree // Comm. Algebra. 2002. V. 30. № 2. P. 935–969.
- [14] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar. Functional identities with r -independent coefficients // Comm. Algebra. 2002. V. 30. № 12. P. 5725–5755.
- [15] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, Y. Fong. Applying functional identities to some linear preserver problems // Pacific J. Math. 2002. V. 204. № 2. P. 257–271.
- [16] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3-rd. On functional identities in prime rings with involution. II // Comm. Algebra. 2000. V. 28. № 7. P. 3169–3183.
- [17] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3-rd. On Herstein's Lie map conjectures. I // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353. № 10. P. 4235–4260.
- [18] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3-rd. On Herstein's Lie map conjectures. II // J. Algebra. 2001. V. 238. № 1. P. 239–264.
- [19] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3-rd. On Herstein's Lie map conjectures. III // J. Algebra. 2002. V. 249. № 1. P. 59–94.
- [20] K. I. Beidar, S.-C. Chang, M. A. Chebotar, Y. Fong. On functional identities in left ideals of prime rings // Comm. Algebra. 2000. V. 28. № 6. P. 3041–3058.
- [21] K. I. Beidar, M. A. Chebotar. On functional identities and d -free subsets of rings. I // Comm. Algebra. 2000. V. 28. № 8. P. 3925–3951.
- [22] K. I. Beidar, M. A. Chebotar. On functional identities and d -free subsets of rings. II // Comm. Algebra. 2000. V. 28. № 8. P. 3953–3972.
- [23] K. I. Beidar, M. A. Chebotar. On Lie-admissible algebras whose commutator Lie algebras are Lie subalgebras of prime associative algebras // J. Algebra. 2000. V. 233. № 2. P. 675–703.
- [24] K. I. Beidar, M. A. Chebotar. On surjective Lie homomorphisms onto Lie ideals of prime rings // Comm. Algebra. 2001. V. 29. № 10. P. 4775–4793.
- [25] K. I. Beidar, M. A. Chebotar. On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras // Israel J. Math. 2001. V. 123. P. 131–148.

- [26] K. I. Beidar, Y. Fong. On additive isomorphisms of prime rings preserving polynomials // *J. Algebra*. 1999. V. 217. №2. P. 650–667.
- [27] K. I. Beidar, Y. Fong, P.-H. Lee, T.-L. Wong. On additive maps of prime rings satisfying the Engel condition // *Comm. Algebra*. 1997. V. 25. №12. P. 3889–3902.
- [28] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3-rd. On functional identities in prime rings with involution // *J. Algebra*. 1998. V. 203. №2. P. 491–532.
- [29] К. И. Бейдар, У. Мартиндейл, А. В. Михалев. Лиевские изоморфизмы первичных колец с инволюцией // *Алгебраические структуры и теория сингулярных возмущений*. М.: МГСУ, 1993. С. 8–13.
- [30] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3-rd, A. V. Mikhalev. Lie isomorphisms in prime rings with involution // *J. Algebra*. 1994. V. 169. №1. P. 304–327.
- [31] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3-rd, A. V. Mikhalev. Rings with generalized identities. New York: Dekker, 1996.
- [32] G. M. Benkart. Power-associative Lie-admissible algebras // *J. Algebra*. 1984. V. 90. №1. P. 37–58.
- [33] G. M. Benkart, G. M. Osborn. Flexible Lie-admissible algebras // *J. Algebra*. 1981. V. 71. №1. P. 11–31.
- [34] G. M. Benkart, G. M. Osborn. Power-associative products on matrices // *Hadronic J.* 1981/82. V. 5. №5. P. 1859–1892.
- [35] M. Brešar. Centralizing mappings on von Neumann algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 111. №2. P. 501–510.
- [36] M. Brešar. On a generalization of the notion of centralizing mappings // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1992. V. 114. №3. P. 641–649.
- [37] M. Brešar. Centralizing mappings and derivations in prime rings // *J. Algebra*. 1993. V. 156. №2. P. 385–394.
- [38] M. Brešar. On skew-commuting mappings of rings // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1993. V. 47. №2. P. 291–296.
- [39] M. Brešar. Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings, and Lie mappings // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 335. №2. P. 525–546.
- [40] M. Brešar. Derivations of noncommutative Banach algebras. II // *Arch. Math. (Basel)*. 1994. V. 63. №1. P. 56–59.
- [41] M. Brešar. On certain pairs of functions of semiprime rings // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 120. №3. P. 709–713.
- [42] M. Brešar. On generalized biderivations and related maps // *J. Algebra*. 1995. V. 172. №3. P. 764–786.
- [43] M. Brešar. Functional identities of degree two // *J. Algebra*. 1995. V. 172. №3. P. 690–720.
- [44] M. Brešar. Applying the theorem on functional identities // *Nova J. Math. Game Theory Algebra*. 1996. V. 4. №1. P. 43–54.
- [45] M. Brešar. On a certain identity satisfied by a derivation and an arbitrary additive mapping. II // *Aequationes Math.* 1996. V. 51. №1–2. P. 83–85.
- [46] M. Brešar. Functional identities: a survey // *Contemp. Math.* 2000. V. 259. P. 93–109.
- [47] M. Brešar, M. A. Chebotar. On a certain functional identity in prime rings // *Comm. Algebra*. 1998. V. 26. №11. P. 3765–3781.
- [48] M. Brešar, M. A. Chebotar. On a certain functional identity in prime rings. II // *Beiträge Algebra Geom.* 2002. V. 43. №2. P. 333–338.
- [49] M. Brešar, B. Hvala. On additive maps of prime rings // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1995. V. 51. №3. P. 377–381.
- [50] M. Brešar, W. S. Martindale 3-rd, C. R. Miers. Centralizing maps in prime rings with involution // *J. Algebra*. 1993. V. 161. №2. P. 342–357.
- [51] M. Brešar, W. S. Martindale 3-rd, C. R. Miers. Maps preserving n th powers // *Comm. Algebra*. 1998. V. 26. №1. P. 117–138.
- [52] M. Brešar, C. R. Miers. Commutativity preserving maps of von Neumann algebras // *Canad. J. Math.* 1993. V. 45. №4. P. 695–708.

- [53] M. Brešar, C. R. Miers. Strong commutativity preserving maps of semiprime rings // *Canad. Math. Bull.* 1994. V. 37. № 4. P. 457–460.
- [54] M. Brešar, C. R. Miers. Commuting maps on Lie ideals // *Comm. Algebra.* 1995. V. 23. № 14. P. 5539–5553.
- [55] M. Brešar, P. Šemrl. Normal-preserving linear maps // *Canad. Math. Bull.* 1994. V. 37. № 3. P. 306–309.
- [56] M. Brešar, J. Škarabot, J. Vukman. On a certain identity satisfied by a derivation and an arbitrary additive mapping // *Aequationes Math.* 1993. V. 45. № 2–3. P. 219–231.
- [57] G. H. Chan, M. H. Lim. Linear transformations on symmetric matrices that preserve commutativity // *Linear Algebra Appl.* 1982. V. 47. P. 11–22.
- [58] M. A. Chebotar. On generalized functional identities on prime rings // *J. Algebra.* 1998. V. 202. № 2. P. 655–670.
- [59] М. А. Чеботарь. Функциональные тождества в первичных кольцах // *УМН.* 1998. Т. 53. № 1. С. 207–208.
- [60] M. D. Choi, A. A. Jafarian, H. Radjavi. Linear maps preserving commutativity // *Linear Algebra Appl.* 1987. V. 87. P. 227–241.
- [61] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. C. Pérez Bueno. An introduction to some novel applications of Lie algebra cohomology in mathematics and physics // *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat.* 2001. V. 95. № 2. P. 225–248.
- [62] J. A. de Azcárraga, J. C. Pérez Bueno. Higher-order simple Lie algebras // *Comm. Math. Phys.* 1997. V. 184. № 3. P. 669–681.
- [63] P. Hanlon, M. Wachs. On Lie k -algebras // *Adv. in Math.* 1995. V. 113. № 2. P. 206–236.
- [64] P. de la Harpe. *Classical Banach–Lie Algebras and Banach–Lie Groups of Operators in Hilbert Spaces.* Berlin: Springer-Verlag, 1972. (Lecture Notes in Math. V. 285.)
- [65] I. N. Herstein. Jordan homomorphisms // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. V. 81. P. 331–341.
- [66] I. N. Herstein. Lie and Jordan structures in simple associative rings // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1961. V. 67. P. 517–531.
- [67] I. N. Herstein. *Topics in Ring Theory.* Chicago: University of Chicago Press, 1969.
- [68] I. N. Herstein, E. Kleinfeld. Lie mappings in characteristic 2 // *Pacific J. Math.* 1960. V. 10. P. 843–852.
- [69] R. A. Howland. Lie isomorphisms of derived rings of simple rings // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. V. 145. P. 383–396.
- [70] L.-K. Hua. A theorem on matrices over a sfield and its applications // *J. Chinese Math. Soc. (N.S.).* 1951. V. 1. P. 110–163.
- [71] Н. Джекобсон. *Алгебры Ли.* М.: Мир, 1964.
- [72] N. Jacobson. Structure groups and Lie algebras of Jordan algebras of symmetric elements of associative algebras with involution // *Adv. Math.* 1976. V. 20. № 2. P. 106–150.
- [73] K. Jeong, S.-J. Kang, H. Lee. Lie-admissible algebras and Kac–Moody algebras // *J. Algebra.* 1997. V. 197. № 2. P. 492–505.
- [74] E. Killam. Lie derivations on skew elements in prime rings with involution // *Canad. Math. Bull.* 1987. V. 30. № 3. P. 344–350.
- [75] C. M. Kunicki, R. D. Hill. Normal-preserving linear transformations // *Linear Algebra Appl.* 1992. V. 170. P. 107–115.
- [76] P. J. Laufer, M. L. Tomber. Some Lie-admissible algebras // *Canad. J. Math.* 1962. V. 14. P. 287–292.
- [77] P.-H. Lee, T.-K. Lee. Linear identities and commuting maps in rings with involution // *Comm. Algebra.* 1997. V. 25. № 9. P. 2881–2895.
- [78] P.-H. Lee, T.-L. Wong, J.-S. Lin, R.-J. Wang. Commuting traces of multiadditive mappings // *J. Algebra.* 1997. V. 193. № 2. P. 709–723.
- [79] T.-K. Lee, T.-C. Lee. Commuting additive mappings in semiprime rings // *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica.* 1996. V. 24. № 4. P. 259–268.
- [80] T.-K. Lee. Derivations and centralizing mappings in prime rings // *Taiwanese J. Math.* 1997. V. 1. № 3. P. 333–342.

- [81] W. S. Martindale 3-rd. Lie isomorphisms of primitive rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 909–916.
- [82] W. S. Martindale 3-rd. Lie derivations of primitive rings // Michigan Math. J. 1964. V. 11. P. 183–187.
- [83] W. S. Martindale 3-rd. Jordan homomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution // J. Algebra. 1967. V. 5. P. 232–249.
- [84] W. S. Martindale 3-rd. Lie isomorphisms of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 142. P. 437–455.
- [85] W. S. Martindale 3-rd. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.
- [86] W. S. Martindale 3-rd. Lie isomorphisms of simple rings // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. P. 213–221.
- [87] W. S. Martindale 3-rd. Lie isomorphisms of the skew elements of a simple ring with involution // J. Algebra. 1975. V. 36. №3. P. 408–415.
- [88] W. S. Martindale 3-rd. Lie isomorphisms of the skew elements of a prime ring with involution // Comm. Algebra. 1976. V. 4. №10. P. 929–977.
- [89] W. S. Martindale 3-rd. Lie and Jordan mappings // Contemp. Math. 1982. V. 13. P. 173–177.
- [90] W. S. Martindale 3-rd. Jordan homomorphisms onto nondegenerate Jordan algebras // J. Algebra. 1990. V. 133. №2. P. 500–511.
- [91] J. H. Mayne. Centralizing automorphisms of prime rings // Canad. Math. Bull. 1976. V. 19. №1. P. 113–115.
- [92] K. McCrimmon. The Zel'manov approach to Jordan homomorphisms of associative algebras // J. Algebra. 1989. V. 123. №2. P. 457–477.
- [93] C. R. Miers. Lie isomorphisms of factors // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 147. P. 55–63.
- [94] C. R. Miers. Lie isomorphisms of operator algebras // Pacific J. Math. 1971. V. 38. P. 717–735.
- [95] C. R. Miers. Lie $\ast$ -triple homomorphisms into von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 58. P. 169–172.
- [96] C. R. Miers. Lie triple derivations of von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 71. №1. P. 57–61.
- [97] H. C. Myung. Some classes of flexible Lie-admissible algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 167. P. 79–88.
- [98] H. C. Myung. Malcev-admissible Algebras. Boston: Birkhäuser, 1986. (Progr. Math. V. 64.)
- [99] H. C. Myung. Lie-admissible algebras and the Virasoro algebra // J. Korean Math. Soc. 1996. V. 33. №4. P. 1123–1128.
- [100] S. Okubo. Introduction to Octonion and Other Non-associative Algebras in Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [101] S. Okubo, H. C. Myung. Adjoint operators in Lie algebras and the classification of simple flexible Lie-admissible algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 264. №2. P. 459–472.
- [102] M. Omladič. On operators preserving commutativity // J. Funct. Anal. 1986. V. 66. №1. P. 105–122.
- [103] M. Omladič, H. Radjavi, P. Šemrl. Preserving commutativity // J. Pure Appl. Algebra. 2001. V. 156. №2–3. P. 309–328.
- [104] T. Petek. Additive mappings preserving commutativity // Linear and Multilinear Algebra. 1997. V. 42. №3. P. 205–211.
- [105] S. Pierce, W. Watkins. Invariant of linear maps on matrix algebras // Linear and Multilinear Algebra. 1978/79. V. 6. №3. P. 185–200.
- [106] E. C. Posner. Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.

- [107] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. 1976. V. 19. №3. P. 306–381.
- [108] Ю. П. Размыслов. Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. №4. С. 723–756.
- [109] M. P. Rosen. Isomorphisms of a certain class of prime Lie rings // J. Algebra. 1984. V. 89. №2. P. 291–317.
- [110] G. A. Swain. Lie derivations of the skew elements of prime rings with involution // J. Algebra. 1996. V. 184. №2. P. 679–704.
- [111] W. Watkins. Linear maps that preserve commuting pairs of matrices // Linear Algebra Appl. 1976. V. 14. №1. P. 29–35.
- [112] Е. И. Зельманов. О первичных йордановых алгебрах. II // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. №1. С. 89–104.

Университет им. Чен Гуна, Тайнань, Тайвань;

Поступила в редакцию

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

15.09.2003

Тульский государственный университет

E-mail: beidar@mail.ncku.edu.tw; mikhalev@shade.msu.ru; mchebotar@tula.net