Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Песин, А. А. Юрченко, Некоторые физические модели, описываемые уравнением реакции-диффузии, и цепочки связанных отображений, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 81–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:01:17

УДК 517.91/.93

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ, И ЦЕПОЧКИ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Я. Б. Песин, А. А. Юрченко

Мы рассматриваем ряд моделей, возникающих в физике, биологии, химии и т.д., которые описываются уравнением реакции-диффузии. Дискретизируя это уравнение, мы получаем соответствующую цепочку связанных отображений (ЦСО). Мы классифицируем эти ЦСО по типу динамики локального отображения и показываем, что наблюдаются разные типы поведения, а именно, системы типа Морса–Смейла, системы с аттракторами и системы с подковой Смейла.

Библиография: 21 название.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	81
2. Модели в естественных науках	83
3. Классификация моделей	92
4. Цепочки связанных отображений (ЦСО)	94
5. Динамика локального отображения: одномерные отображения	96
6. Динамика локального отображения для уравнения ФитцХью–Нагумо	102
Приложение. Необходимые сведения (см. [13], [18], [17])	113
Список литературы	113

1. Введение

В этой статье приводится обзор ряда моделей, возникающих в физике, биологии и химии, которые описываются уравнением реакции-диффузии

$$u_t = h(u) + \mathcal{A}\kappa\Delta u,$$

где $x \in \mathbb{R}^p$, $u = u(x, t)$ — функция со значениями в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ — матрица, а κ — параметр. Это уравнение описывает расширенные системы неограниченных равновесных сред с

Статья является изложением доклада, сделанного на Международной конференции “Колмогоров и современная математика”; работа частично поддержана грантом NSF #DMS-0088971 и грантом U.S.-Mexico Collaborative Research 0104675.

подкачкой энергии, а функция u является характеристикой среды (например, ее плотностью или распределением температур). Сами модели описываются в разделе 2, а в разделе 3 эти модели классифицируются по их типам.

Нас интересует динамика соответствующих цепочек связанных отображений (ЦСО), т.е. дискретных вариантов этого уравнения, имеющих вид

$$u_{\bar{j}}(n+1) = f(u_{\bar{j}}(n)) + \varepsilon g_{\bar{j}}(\{u_{\bar{i}}(n)\}_{|\bar{i}-\bar{j}| \leq s}),$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – дискретная временная координата и $\bar{j} = (j_k)$, $k = 1, \dots, p$, – дискретная пространственная координата. Предполагается, что $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ и $g_{\bar{j}}: (\mathbb{R}^d)^{(2s+1)^p} \rightarrow \mathbb{R}^d$ – гладкие отображения; f называется *локальным отображением* и действует в *локальном фазовом пространстве* (которое является либо пространством $\mathbb{R}^d$, либо его компактификацией S^d); g – *взаимодействие конечного размера* s . Предполагается также, что ε – достаточно малый параметр (см. раздел 4).

Цепочку связанных отображений можно рассматривать как бесконечный набор копий *локальной динамической системы* $(f, \mathbb{R}^d)$, помещенных в каждой точке цепочки $\mathbb{Z}^d$. При $\varepsilon = 0$ локальные динамики в разных точках цепочки независимы друг от друга. Однако при малых ε динамика в данной точке цепочки “чувствует” локальную динамику в соседних точках (внутри куба решетки размера s). Если локальная динамика демонстрирует гиперболическое поведение в достаточно сильной степени, то динамика всей ЦСО полностью определяется локальными динамиками (в предположении, что ε достаточно мало). См. [1], [2]. Цель настоящей статьи – проанализировать локальную динамику в некоторых “физически интересных” случаях.

Если ЦСО получена из дифференциального уравнения с частными производными, то есть два способа удостовериться, что ε мало: 1) потребовать, чтобы соответствующий параметр дифференциального уравнения с частными производными (обычно – коэффициент диффузии) был мал, и 2) подходящим образом выбрать малые шаги дискретизации.

В дальнейшем мы фиксируем шаг дискретизации и будем менять “физические параметры” системы. Оказывается, что получаемые таким способом цепочки связанных отображений могут часто рассматриваться как исходные феноменологические модели процессов, лежащих в их основе, и во многих случаях могут быть лучше приспособлены к этим процессам.

В разделах 5 и 6 ЦСО классифицируются по типу динамики их локальных отображений. Оказывается, если локальное отображение одномерно, то динамика имеет тип Морса–Смейла в некоторой области изменения параметров. Если локальное отображение двумерно, то динамика гораздо богаче: изменяя параметры системы, можно наблюдать поведение типа системы Морса–Смейла, существование подковы Смейла или “странные” аттракторы. Мы иллюстрируем этот факт изучением динамики локальных отображений уравнения ФитцХью–Нагумо (см. раздел 6).

Благодарности. Авторы хотели бы поблагодарить Д. В. Аносова за некоторые ценные замечания и Ке Жанга, студента университета штата Пенсильвания, за аккуратное чтение нашей рукописи и многочисленные исправления. Я. П. хотел бы также поблагодарить Научно-исследовательский институт математики университета Киото, где была подготовлена окончательная версия этой статьи, за поддержку и гостеприимство.

2. Модели в естественных науках

Мы приводим здесь несколько примеров (из различных областей естественных наук), описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями с частными производными.

2.1. Модель Фишера в генетике популяций [19]. Эта модель описывает популяцию диплоидных индивидуумов (т.е. несущих два гена), распределенных в двумерном ареале. Предполагая, что некоторый ген появляется в двух формах, a и A , так называемых *аллелях*, можно разделить популяцию на три генотипа, aa , aA и AA . Пусть $u_i = u_i(x, t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, – плотности популяций aa , aA и AA соответственно. Предположим, что члены популяций спариваются случайным образом, с уровнем рождаемости r , и диффундируют сквозь ареал с постоянной диффузией D . Предположим также, что уровни смертности τ_i , $i = 1, 2, 3$, зависят только от генотипов. Таким образом, величина $u_i(x, t)$ меняется из-за диффузии, спаривания и смерти.

В [3] показано, что если $|\tau_1 - \tau_2| + |\tau_3 - \tau_2| \ll 1$ и $r \gg 1$, то функция

$$u = \frac{u_3 + \frac{1}{2}u_2}{u_1 + u_2 + u_3}$$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с частными производными:

$$u_t = -\sigma u(u - \theta)(u - 1) + D\Delta u, \quad (2.1.1)$$

где $\sigma = \sigma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) > 0$ и $\theta = \theta(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $0 < \theta < 1$, – параметры.

2.2. Плоская модель. Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) развития полезных генов [14] Рассмотрим двумерную область, населенную индивидуумами данного биологического вида. Предположим, что популяция имеет доминантный аллель A , т.е. шанс выживания для индивидуумов с этим аллелем больше, чем у индивидуумов, не имеющих этого гена.

В случае, если доминантный аллель распределен по области с постоянной концентрацией p , изменение концентрации p за одно поколение выражается формулой (см. [8])

$$\delta p = \alpha p(1 - p)^2 + O(\alpha^2),$$

где $\alpha + 1$ – отношение вероятности выживания индивидуума с доминантным аллелем A к соответствующей вероятности для индивидуума без аллеля A .

Рассмотрим теперь случай, когда концентрация p меняется во времени и пространстве в соответствии с отбором в пользу доминантного аллеля A и случайными движениями индивидуумов. Предположим, наконец, что среднеквадратичный путь ρ индивидуума за одно поколение достаточно мал. Можно показать, что изменение концентрации за одно поколение может быть найдено по формуле

$$\delta p(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p(\zeta, \xi) \frac{f(r)}{2\pi r} d\zeta d\xi - p(x, y) + \alpha p(x, y)(1 - p(x, y))^2, \quad (2.2.2)$$

где $f(r) dr$ – вероятность того, что индивидуум проходит расстояние, лежащее между r и $r + dr$, при $r = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \xi)^2}$. Предполагая, что p дифференцируема по

Рис. 1. Идеализированный зародыш

координатам x и y и по времени t и что $\alpha \ll 1$, мы можем разложить функцию в (2.2.2) в ряд Тейлора и получить

$$p_t = \alpha p(1-p)^2 + \frac{\rho^2}{4} \Delta p. \quad (2.2.3)$$

2.3. Линейная модель Фишера для развития полезных генов [9]. Рассмотрим популяцию некоторого данного вида, равномерно распределенную вдоль линейной области обитания, например вдоль береговой линии. Предположим, что размер области обитания велик по сравнению с расстояниями, отделяющими местоположение потомков от местоположения их родителей. Предположим далее, что в некоторой точке области обитания происходит благоприятная мутация (т.е. мутация, тем или иным образом благоприятствующая выживанию членов популяции). Эта мутация диффундирует сначала в малую окрестность места, где произошла мутация, а затем в окружающую популяцию. Этот процесс связан с отбором в пользу благоприятной мутации и со случайными движениями индивидуумов.

Пусть $p = p(x, t)$ – концентрация членов популяции с мутантным геном и $q = q(x, t)$ – концентрация членов популяции, чьи потомки имеют мутантный ген (x – положение в области обитания). Можно предположить, что $q = 1 - p$. Обозначим через α интенсивность отбора в пользу мутантного гена, которую мы предположим не зависящей от p . При достаточно малых α концентрация p непрерывно меняется со временем от поколения к поколению. Предположим, что доля поколения, в которой члены популяции с мутантным геном проникли в популяцию в целом, равна $-\kappa \frac{\partial p}{\partial x}$, где $\kappa > 0$ – постоянная диффузии (предполагается, что она не зависит от x и p). Это соответствует *обычному закону диффузии*, при котором диффузия пропорциональна градиенту концентрации. Если выполнены все эти предположения, то можно показать, что концентрация мутантного гена удовлетворяет условию

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha p(1-p) + \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.3.4)$$

2.4. Тьюрингова непрерывная модель морфогенеза [21]. Морфогенез – это эмбриональное развитие структуры организма или некоторой части этого организма. Тьюринг предложил модель идеализированного зародыша, содержащего две ха-

рактерные химические субстанции $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, так называемые *морфогены*. Эти субстанции реагируют друг с другом в каждой клетке и диффундируют между соседними клетками с коэффициентами диффузии μ и ν соответственно. Рассмотрим модель идеализированного зародыша в виде кольца с внутренним радиусом ткани ρ (см. рис. 1). Обозначим через X и Y концентрации соответствующих химических соединений. Пусть $f(X, Y)$ и $g(X, Y)$ – скорости, с которыми концентрации X и Y соответственно меняются в ходе химического взаимодействия. Предполагается, что скорости реакций подчиняются *закону действия масс*, который утверждает, что скорость, с которой протекает реакция, пропорциональна концентрациям взаимодействующих субстанций. Предположим, что диффузия подчиняется *обычному закону диффузии*. В рассматриваемом случае этот закон означает, что морфоген движется из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией со скоростью, пропорциональной градиенту концентрации. Тогда уравнения, управляющие этим процессом, имеют вид

$$\begin{aligned}
 X_t &= f(X, Y) + \frac{\mu}{\rho^2} X_{\theta\theta}, \\
 Y_t &= g(X, Y) + \frac{\nu}{\rho^2} Y_{\theta\theta},
 \end{aligned}
 \tag{2.4.5}$$

где θ – угол между радиус-вектором, проведенным в точку (X, Y) , и фиксированным эталонным радиус-вектором (см. рис. 1). Тьюринг использовал следующие формулы для скоростных функций:

$$\begin{aligned}
 f(X, Y) &= -aX^2 - bXY + d, \\
 g(X, Y) &= aX^2 + bXY - cY + e,
 \end{aligned}$$

где $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ – параметры химической реакции.

2.5. Модель морфогенеза по Мажину [15]. Эта модель получается упрощением приведенной выше модели Тьюринга. Отдельная клетка рассматривается как электрическая цепь, подобная той, которой пользовался Нагумо (см. п. 2.8 ниже и рис. 3). Располагая эти клетки по кольцу путем спаривания соседних клеток, Мажину построил систему уравнений реакции-диффузии

$$\begin{aligned}
 X_t &= -aX(X-1)(X+1) - Y + \kappa_1 X_{\theta\theta}, \\
 Y_t &= \varepsilon(X - \gamma Y) + \kappa_2 Y_{\theta\theta},
 \end{aligned}
 \tag{2.5.6}$$

где X и Y – концентрации двух типов морфогенов, а $a, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon$ и γ – положительные параметры. Заметим, что нелинейный член в (2.5.6) проще, чем нелинейный член в (2.4.5).

2.6. Модель ФитцХью распространения импульса электрического напряжения через аксон нейрона. В [12] Ходжкин и Хаксли предложили модель описания ионных и электрических процессов, происходящих во время прохождения импульса сквозь поверхность мембраны и распространения импульса электрического напряжения через аксон нейрона. Аксон можно представлять себе как длинный цилиндрический кабель с проводящим ядром и частично изолирующей оболочкой, погруженный в большой объем проводящей жидкости – ионный раствор соды или хлорида.

Полная плотность I тока через мембрану равна

$$I = C_M \frac{dV}{dt} + I_i, \quad (2.6.7)$$

где V – смещение потенциала мембраны от его значения покоя, C_M – емкость мембраны на единицу площади (предполагаемая постоянной) и $I_i = I_{Na}(V) + I_K(V) + I_l(V)$ – плотность ионного потока, состоящая из трех компонент, составленных из ионов натрия (I_{Na}), ионов калия (I_K) и других ионов (I_l). Выражение для плотностей ионных токов I_{Na} , I_K и I_l было получено экспериментально.

Плотность тока через мембрану может быть вычислена по формуле

$$I = \frac{\rho}{2R} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (2.6.8)$$

где x – расстояние вдоль слоя, R – удельное сопротивление аксоплазмы¹, а ρ – радиус слоя. Объединяя (2.6.7) и (2.6.8), получаем

$$\frac{\rho}{2R} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_M \frac{dV}{dt} + I_i(V).$$

Модель Ходжкина–Хаксли состоит из четырех дифференциальных уравнений и является трудной для строгого математического анализа. Подробное обсуждение модели Ходжкина–Хаксли приведено в [5].

В [10] ФитцХью предложил модель распространения импульса электрического напряжения через аксон нейрона, которая существенно проще модели Ходжкина–Хаксли и поэтому часто используется в приложениях.

ФитцХью рассматривал нервную клетку как нелинейный электрический осциллятор

$$\ddot{v} + (v^2 - 1)\dot{v} + cv = 0,$$

где v – безразмерная переменная, соответствующая мембранному потенциалу V , а $c > 0$ – постоянная. Полагая

$$w = -\dot{v} + v - \frac{v^3}{3},$$

можно свести приведенное выше дифференциальное уравнение второго порядка к хорошо известной системе Бонхоффера–Ван дер Поля (БВП) дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - \frac{v^3}{3} - w, \\ \dot{w} &= cv. \end{aligned}$$

Переменная w называется *переменной восстановления*. ФитцХью видоизменил эту систему далее следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - \frac{v^3}{3} - w + i, \\ \dot{w} &= c(v + a - bw), \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

¹ Аксоплазма – протоплазма аксона. *Прим. ред.*

где a и b – положительные постоянные, а i – безразмерная переменная, соответствующая полной плотности тока в мембране. Объединяя (2.6.9) и (2.6.8), получаем систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v_t &= v - \frac{v^3}{3} - w + \kappa v_{xx}, \\ w_t &= c(v + a - bw), \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

где κ пропорционально $\frac{\rho}{2R}$. Если никакого восстановления нет (т.е. $w = 0$), мы получаем одномерную модель ФитцХью (см. [11]):

$$v_t = v - \frac{v^3}{3} + \kappa v_{xx}. \quad (2.6.11)$$

2.7. Модель брюсселятора для реакции Белоусова–Жаботинского [7].

Реакция Белоусова–Жаботинского (РБЖ) – химическая реакция, в которой концентрации реагентов имеют осциллирующее поведение. Модель брюсселятора для РБЖ описывает случай с одной модой осцилляции, к которой система возвращается, если подвергнуть ее возмущению. Химические реакции протекают по следующей схеме:

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – химические компоненты. Пусть x и y – концентрации компонент $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, а A и B – концентрации компонент $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Предполагая, что концентрации A и B остаются постоянными в течение химической реакции и что система имеет только одну пространственную переменную, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= A - (B + 1)x + x^2y + D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= Bx - x^2y + D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

где D_1 и D_2 – постоянные диффузии, а ξ – пространственная координата.

Рис. 3. Распределенная двухстойчивая кривая

Рис. 2. Цепь простой двуустойчивой кривой

2.8. Двуустойчивые кривые перехода [16]. Кривую активного перехода с двумя устойчивыми равновесными состояниями можно моделировать следующим образом. Рассмотрим цепь, состоящую из источника питания E_0 , сопротивления R , емкости C и туннельного диода с характеристической кривой $f(v)$, которая должна быть кубическим многочленом (см. рис. 2). Можно выбрать E_0 и R так, чтобы эта цепь действовала, как двуустойчивая (т.е. как цепь с двумя устойчивыми состояниями). Уравнения цепи имеют вид

$$j = C \frac{dv}{d\tau} + g(v),$$

$$g(v) = f(v) + \frac{v - E_0}{R},$$

где j – ток, а v – потенциал; функция $g(v)$ – это кубический многочлен,

$$g(v) = a(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3),$$

где $a > 0$ и $v_1 < v_2 < v_3$.

Рассматривая эту цепь как двуустойчивую кривую (см. рис. 3), получаем

$$j = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2},$$

где s – расстояние вдоль кривой, а r – межкаскадное спаривающее сопротивление на единицу длины кривой. При подходящей замене переменных мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u + 1)(u - \theta)(u - 1) + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad (2.8.13)$$

где θ , $-1 < \theta < 1$, и κ – параметры цепи, а u – напряжение в новом масштабе.

2.9. Система волн в потоке Пуазейля на плоскости [20]. Поток Пуазейля – поток вязкой несжимаемой жидкости под давлением в плоском канале, созданном двумя параллельными пластинами на расстоянии $2h$ друг от друга (см. рис. 4). Под

Рис. 4. Плоский поток Пуазейля

действием равномерного градиента давления поток приводит к полю скоростей, не зависящему от координаты x и принимающему наибольшее значение u_0 в центре канала. Уравнение потока имеет вид

$$\zeta_t + \psi_z \zeta_x - \psi_x \zeta_z = \frac{1}{R} \Delta \zeta, \quad (2.9.14)$$

где $R = \frac{1}{\gamma} u_0 h$ – число Рейнольдса, γ – кинетическая вязкость, $\psi = \psi(x, z, t, R)$ – функция тока, $\zeta = -\Delta \psi$, x – направление, параллельное пластинам, а z – направление, перпендикулярное пластинам. Время измеряется в единицах $\frac{h}{u_0}$, длина – в единицах h , а скорость – в единицах u_0 . Для несжимаемого течения (т.е. $\nabla \vec{u} = 0$) функция тока ψ определяется формулой

$$\vec{u} = \nabla^\perp \psi,$$

где $\vec{u}$ – поле скоростей и $\nabla^\perp := (\partial_z, -\partial_x)$.

В случае невозмущенного ламинарного течения (так называемого *основного потока*) движение параллельно пластинам и определяется средней скоростью по x :

$$\bar{u}_\ell := \frac{\partial \psi_\ell}{\partial z} = 1 - z^2,$$

где ψ_ℓ – функция тока невозмущенного ламинарного течения.

Рассмотрим небольшое возмущение, ограниченное пределами небольшой окрестности начала координат при $t = 0$. Линеаризация соотношения (2.9.14) вблизи основного потока приводит к следующему уравнению для возмущенной функции тока ψ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - z^2) \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta^2 \psi. \quad (2.9.15)$$

Можно получить формальное решение уравнения (2.9.15), используя преобразование Фурье–Лапласа

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z, \alpha, s, R) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} \psi(x, z, t, R) dx, \\ \psi(x, z, t, R) &= \psi(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha i x} d\alpha \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \hat{\psi}(z, \alpha, s, R) ds, \end{aligned}$$

где прямая $\operatorname{Re}(s) = \gamma$ расположена справа от всех особенностей функции $\widehat{\psi}$. Решение этого уравнения для ψ приводит к задаче Орра–Зоммерфельда о собственных значениях

$$-i\alpha \left(\left(1 - z^2 - \frac{is}{\alpha} \right) \left(\frac{d\widehat{\psi}^{(2)}}{dz^2} - \alpha^2 \widehat{\psi} \right) + 2\widehat{\psi} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{d\widehat{\psi}^{(4)}}{dz^4} - 2\alpha \frac{d\widehat{\psi}^{(2)}}{dz^2} + \alpha^4 \widehat{\psi} \right) = 0.$$

Зафиксируем R . Пусть $s(\alpha)$ – собственные значения нетривиального решения. Можно показать, что есть критическое значение R_c , удовлетворяющее следующему условию: для любого $R < R_c$ вещественная часть любого собственного значения $s(\alpha)$ меньше нуля, а при $R > R_c$ есть собственные значения с положительной вещественной частью. Следовательно, при $R > R_c$ основной поток неустойчив относительно малых возмущений, а при $R < R_c$ он устойчив.

Однако эксперименты показывают, что и при $R < R_c$ основной поток может быть неустойчив. Таким образом, линейный анализ недостаточен для изучения устойчивости основного потока, и нужно учитывать некоторые нелинейные члены.

Рис. 5. Стабильное состояние – основной поток

С этой целью мы рассмотрим малое возмущение основного потока, число Рейнольдса R которого достаточно близко к критическому значению R_c . Затем мы разложим решения по степеням $R - R_c$ и изучим ведущую моду Фурье этого разложения. Можно показать, что ее амплитуда A удовлетворяет следующему уравнению:

$$A_t = kA|A|^2 + \varepsilon A + aA_{xx}, \quad (2.9.16)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$ и k, a – комплексные параметры; кроме того, $\varepsilon > 0$ при $R > R_c$ и $\varepsilon < 0$ в противном случае.

2.10. Порождение волн ветром [4]. Рассмотрим установившийся ламинарный поток двух слоев жидкостей (например, воздуха и воды), заключенный между двумя бесконечными параллельными пластинами (см. рис. 5; термин “установившийся” поток означает совершенно вязкий поток со скоростью, не зависящей от положения на

горизонтали). Поток порождается градиентом давления и движением верхней пластины, параллельно градиенту давления, относительно нижней пластины. Предполагается, что жидкости несмешивающиеся, а в стабильном состоянии граница между двумя жидкостями параллельна граничным пластинам.

Движение жидкостей подчиняется уравнению Навье–Стокса

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \nu_2 \Delta \vec{V} &= -\frac{2}{\rho_1} D\tilde{P} + \vec{g}, \\ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \nu_1 \Delta \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_1} D\tilde{p} + \vec{g}.\end{aligned}\tag{2.10.17}$$

Здесь (x, y, z) – вектор положения с x -осью, параллельной пластинам в направлении потока, и y -осью, перпендикулярной пластинам и направленной противоположно ускорению свободного падения $\vec{g}$, $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – векторы скоростей для верхней и нижней жидкости, ρ_1 и ρ_2 – (постоянные) плотности этих жидкостей, ν_1 и ν_2 – их (постоянные) кинематические вязкости, а $\tilde{P}$ и $\tilde{p}$ – давления, приложенные к нижней и верхней жидкости.

Начнем с описания *основного потока*, т.е. стабильного установившегося ламинарного потока, параллельного пластинам (так что $\vec{V} = (V_1(y), 0, 0)$ и $\vec{v} = (v_1(y), 0, 0)$) с граничными условиями $V_1(D_1) = V_{\text{top}}$ и $V(-D_2) = 0$ (эти условия гарантируют, что на верхней и нижней пластине нет проскальзывания и поле скоростей непрерывно при переходе через границу между двумя жидкостями). Уравнения основного потока имеют вид

$$\begin{aligned}0 &= \frac{G}{\rho_2} + \nu_2 \frac{d^2 V_1}{dy^2}, \\ 0 &= \frac{G}{\rho_1} + \nu_1 \frac{d^2 v_1}{dy^2},\end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = -G$$

– постоянный градиент плотности, а $p = \tilde{p} + \rho_1 gy$ и $P = \tilde{P} + \rho_2 gy$ – модифицированные давления. Пусть $\tilde{V}_b(y)$, $\tilde{v}_b(y)$, P_b , p_b – решение этой системы (с граничными условиями, описанными выше). Эти решения линейно зависят от G и V_{top} . Введем безразмерные скорости

$$V_b = \frac{\tilde{V}_b}{V_{\text{mean}}}, \quad v_b = \frac{\tilde{v}_b}{V_{\text{mean}}},$$

где V_{mean} – средняя скорость

$$V_{\text{mean}} = \frac{1}{D_1 + D_2} \left(\int_{-D_1}^0 \tilde{v}_b dy + \int_0^{D_2} \tilde{V}_b dy \right).$$

Введем также *число Рейнольдса* $R = \frac{V_{\text{mean}} D_2}{\nu_2}$.

“Ветер” можно рассматривать как возмущение основного потока, для которого поле скоростей можно представить в виде

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_b, 0, 0) + \delta \cos(kx + lz - kct)(v_1(y), v_2(y), v_3(y)), \\ \vec{V} &= (V_b, 0, 0) + \delta \cos(kx + lz - kct)(V_1(y), V_2(y), V_3(y)),\end{aligned}$$

а давления – в виде

$$\begin{aligned}p &= p_b + \delta p(y) \cos(kx + lz - kct), \\ P &= P_b + \delta p(y) \cos(kx + lz - kct).\end{aligned}$$

Здесь $\delta \ll 1$, $k, l \in \mathbb{C}$ – волновые числа возмущения в направлениях x и z соответственно, а $c \in \mathbb{C}$ – фазовая скорость. Этот вид возмущений часто рассматривается в системах, инвариантных относительно сдвига, и соответствует устойчивым модам Фурье (представляющим нелокализованные возмущения) [6].

Возмущенная система описывается уравнением Навье–Стокса (2.10.17) с приведенными выше граничными условиями и с полем скоростей, непрерывным при переходе через границу $y = \eta(x, z, t)$, где

$$\eta(x, z, t) = \delta \cos(kx + lz - kct).$$

Для изучения устойчивости основного потока подставим значения давлений и скоростей в (2.10.17) и линеаризуем эту систему вдоль основного потока. Можно показать, что в (R, k) -плоскости существует *кривая устойчивости*, т.е. кривая, разделяющая (R, k) -плоскость на две области, в которых основной поток устойчив и неустойчив соответственно. Эта кривая имеет критическую точку (R_c, k_c) , в которой $k_c \neq 0$.

Рассмотрим теперь малое возмущение основного потока, число Рейнольдса R которого достаточно близко к критическому значению R_c . Разлагая решения (2.10.17) по степеням $R - R_c$, можно показать, что

$$A_t = bA + kA|A|^2 + aA_{xx}, \quad (2.10.18)$$

где A – ведущая мода Фурье этого разложения (т.е. амплитуда поверхностной волны пропорциональна A), a – комплексный параметр с положительной вещественной частью, b – комплексный параметр, связанный с экспоненциальным ростом волны при $R > R_c$, а k – комплексный параметр, связанный с движением в основной массе жидкости и нелинейными эффектами на границе.

3. Классификация моделей

Нелинейное уравнение реакции-диффузии – это дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$u_t(x, t) = h(u) + \mathcal{A}\kappa \Delta_x u(x, t), \quad (3.0.19)$$

где $u(x, t)$ – функция пространственной координаты $x \in \mathbb{R}^n$ и времени $t \geq 0$ со значениями в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ – матрица взаимодействия, а κ – коэффициент диффузии. При подходящем выборе нелинейного члена h получаются хорошо известные уравнения в частных производных.

3.1. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП). Линейная модель Фишера и модель КПП развития полезных генов (уравнения (2.3.4) и (2.2.3)) являются примерами обобщенного КПП-уравнения, введенного в [14]. Это – одномерное уравнение реакции-диффузии

$$u_t(x, t) = h(u) + \kappa \Delta u(x, t), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.1.20)$$

где нелинейный член $h(u) \in C^1([0, 1])$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h(0) = h(1) = 0, \quad h'(0) = \alpha > 0, \quad h'(u) < \alpha, \quad u \in (0, 1]. \quad (3.1.21)$$

Для модели Фишера имеем $h(u) = \alpha u(1 - u)$, а для КПП-модели получаем $h(u) = \alpha u(1 - u)^2$.

3.2. Уравнение ФитцХью–Нагумо. Модель ФитцХью распространения импульса электрического напряжения через аксон нейрона (уравнения (2.6.10)) и модель морфогенеза, предложенная Мажину (уравнения (2.5.6)), описываются обобщенным уравнением ФитцХью–Нагумо. Это – двумерное уравнение реакции-диффузии с $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $x \in \mathbb{R}$, и

$$h(u_1, u_2) = (n(u_1) - bu_2, cu_1 - du_2),$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d и σ_i – положительные параметры, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1$, и

$$n(u_1) = -au_1(u_1 - \theta)(u_1 - 1)$$

с $\theta \in (0, 1)$. Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -au_1(u_1 - \theta)(u_1 - 1) - bu_2 + \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= cu_1 - du_2 + \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

где $\kappa_i \geq 0$ и по крайней мере одно из этих чисел отлично от нуля.

3.3. Уравнение Нагумо. Одномерная модель ФитцХью распространения импульса электрического напряжения через аксон нейрона (уравнение (2.6.11)), модель Фишера в генетике популяций (уравнение (2.1.1)) и двустойчивые кривые перехода (уравнение (2.8.13)) описываются уравнением Нагумо. Это уравнение является частным случаем более общего нелинейного уравнения реакции-диффузии

$$u_t(x, t) = h(u) + \kappa u_{xx}(x, t), \quad (3.3.23)$$

где нелинейный член задается формулой

$$h(u) = -au(u - \theta)(u - 1)$$

с $a > 0$ и $\theta \in (0, 0.5]$. Заметим, что случай $\theta \in (0.5, 1)$ можно свести к предыдущему заменой u на $-u + 1$. Заметим также, что уравнение (3.3.23) является первым уравнением системы (3.2.22) при $b = 0$.

3.4. Вещественное (амплитудное) уравнение Гинзбурга–Ландау. И амплитуда возмущения в потоке Пуазейля (уравнение (2.9.16)), и амплитуда волн, порожденных ветром (уравнение (2.10.18)) описываются амплитудным уравнением. Общее комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау имеет вид

$$u_t(x, t) = \beta u|u|^2 - \gamma u + \alpha \Delta_x u(x, t),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ – параметры, а $u \in \mathbb{C}$. Здесь мы рассматриваем только вещественную одномерную версию этого уравнения, имеющую вид

$$u_t(x, t) = u(\gamma - \delta u^2) + \kappa u_{xx}(x, t), \quad (3.4.24)$$

где $\gamma, \delta, \kappa \in \mathbb{R}$. Заметим, что при $\gamma, \delta, \kappa > 0$ уравнение (3.4.24) становится (после изменения масштаба) уравнением Нагумо (3.3.23).

3.5. Некоторые другие нелинейные уравнения реакции-диффузии. Модель брюсселятора для реакции Белоусова–Жаботинского (уравнения (2.7.12)) дает другое двумерное уравнение реакции-диффузии,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= A - (B + 1)u_1 + u_1^2 u_2 + \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= Bu_1 - u_1^2 u_2 + \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

где A, B и $\kappa_i, i = 0, 1$, – положительные параметры.

Наконец, из модели морфогенеза, предложенной Тьюрингом (уравнения (2.4.5)), мы получаем еще одну двумерную систему,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -(au_1^2 + bu_1 u_2) + c + \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= (au_1^2 + bu_1 u_2) - du_2 + e + \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

где a, b, c, d, e и $\kappa_i, i = 0, 1$, – положительные параметры.

4. Цепочки связанных отображений (ЦСО)

Для построения ЦСО, соответствующих описанным выше дифференциальным уравнениям с частными производными, мы используем следующую дискретизацию. Для производной по времени положим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}.$$

Для пространственной производной можно выбрать любой метод дискретизации, включающий произвольное число точек. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &\rightarrow \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}, \end{aligned}$$

где Δt и Δx – шаги дискретизации.

Используя эту дискретизацию, мы получаем ЦСО, соответствующие указанным выше дифференциальным уравнениям с частными производными. Ниже мы описываем локальные отображения для этих ЦСО и указываем ведущие параметры, т.е. параметры, изменение которых приводит к различным типам динамики.

- Уравнение КПП

$$f(u) = u + \gamma h(u),$$

где $h(u)$ удовлетворяет условиям (3.1.21), величина $h'(0) = \alpha$ является ведущим параметром, а $\gamma = \Delta t > 0$ – параметр.

- Уравнение Нагумо

$$f(u) = u - Au(u - \theta)(u - 1),$$

где $A = \alpha\Delta t > 0$ – ведущий параметр и $\theta \in (0, 0.5)$ – параметр.

- Вещественное амплитудное уравнение

$$f(u) = Au - bu^3,$$

где $A = (1 + \gamma\Delta t) > 0$ – ведущий параметр и $b = \delta\Delta t \in \mathbb{R}$ – параметр.

- Уравнение ФитцХью–Нагумо

$$f(u_1, u_2) = (u_1 - Au_1(u_1 - \theta)(u_1 - 1) - \alpha u_2, \beta u_1 + \gamma u_2),$$

где $A = a\Delta t > 0$ – ведущий параметр и $\alpha = b\Delta t > 0$, $\beta = c\Delta t > 0$, $\gamma = (1 - d\Delta t) > 0$ и $\theta \in (0, 1)$ – параметры.

- Модель брюсселятора

$$f(u_1, u_2) = (a + (1 - \gamma - b)u_1 + \gamma u_1^2 u_2, u_2 + bu_1 - \gamma u_1^2 u_2),$$

где $a = A\Delta t > 0$ и $b = B\Delta t > 0$ – два ведущих параметра, а $\gamma = \Delta t > 0$ – параметр.

- Модель Тюринга

$$f(u_1, u_2) = (u_1 - Au_1^2 - Bu_1 u_2 + C, Au_1^2 + Bu_1 u_2 + (1 - D)u_2 + E),$$

где $A = a\Delta t > 0$, $B = b\Delta t > 0$, $C = c\Delta t > 0$, $D = d\Delta t > 0$ и $E = e\Delta t > 0$ – параметры.

Взаимодействие g является функцией $2s + 1$ переменных, где в нашем случае $s = 1$.

Рис. 7. Локальное отображение для уравнения КПП, $f(u) = u + \gamma u(1 - u)$, $0 < \gamma < 1$

Рис. 6. Фазовые портреты одномерных отображений: а) уравнение КПП, $f(u) = u + \gamma u(1 - u)$, $0 < \gamma < 1$; б) уравнение Нагумо, $f(u) = u - Au(u - \theta)(u - 1)$, $A < 1$; в) вещественное амплитудное уравнение, $f(u) = Au - bu^3$

Рис. 8. Модифицированное локальное отображение для уравнения КПП

5. Динамика локального отображения: одномерные отображения

Рассмотрим случай одномерных локальных отображений. Мы покажем, что в некоторой области параметров эти отображения демонстрируют поведение типа Морса–Смейла.

5.1. Уравнение КПП. Начнем с уравнения КПП и рассмотрим локальные отображения двух типов: (1) $f(u) = u + \gamma u(1 - u)$ и (2) $f(u) = u + \gamma u(1 - u)^2$.

5.1.1. *Локальное отображение $f(u) = u + \gamma u(1 - u)$.* Предположим, что $0 < \gamma < 1$, и

пусть $u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\gamma} > 1$. Производная $f'(u) = 1 + \gamma(1 - 2u)$ положительна при $u < u_1$, тогда как $f'(u_1) = 0$ (см. рис. 7). Локальное отображение имеет две неподвижные точки: $u = 0$ – отталкивающая ($f'(0) = 1 + \gamma > 1$), а $u = 1$ – притягивающая ($f'(1) = 1 - \gamma < 1$). Изменим f вне $[0, u_1]$ так, чтобы новое отображение (мы его по-прежнему обозначим через f) имело отталкивающую неподвижную точку $u = P$ и чтобы выполнялись неравенства $f'(u) > 0$ для всех $u \in \mathbb{R}$ и $f'(u) > 1$ при $u > P$ (см. рис. 8). Новое отображение – диффеоморфизм $\mathbb{R}$ с тремя неподвижными точками без других периодических точек. Пусть $\tilde{f}$ – компактифицирующее отображение f (см. приложение).

ТЕОРЕМА 5.1.1. Для любого $\gamma \in (0, 1)$ компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ есть диффеоморфизм Морса–Смейла окружности S^1 с четырьмя неподвижными точками, соответствующими $\{0, 1, P, \infty\}$ (см. рис. 6а)).

Рис. 9. Локальное отображение для уравнения КПП, $f(u) = u + \gamma u(1 - u)$, $\gamma > 1 + \sqrt{5}$

Мы рассмотрим теперь уравнение КПП для достаточно больших γ (см. рис. 9). Положим $u_0 = 2u_1 = 1 + \frac{1}{\gamma}$. Ясно, что $f(0) = f(u_0) = 0$ и $f(u_1) > u_0$ при $\gamma > 3$. Так как $f'(u) = 1 + \gamma - 2\gamma u$, то $f'(\frac{1}{2}) = 1$ и $f'(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}) = -1$. Кроме того, $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}) > u_0$ при $\gamma > 1 + \sqrt{5}$. Поэтому для любого малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$, что $|f'(u)| \geq \lambda$ для любого $u \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \cup [\frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma}, u_0]$, т.е. отображение f – растягивающее.

ТЕОРЕМА 5.1.2. Предположим, что $\gamma > 1 + \sqrt{5}$, и пусть

$$U = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}, 1 + \frac{1}{\gamma}\right].$$

Тогда множество

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$$

Рис. 10. Локальное отображение для уравнения КПП, $f(u) = u + \gamma u(1 - u)^2$

является подмножеством U типа канторова множества, и на Λ отображение f сопряжено полному сдвигу на пространстве Σ_2^+ односторонне бесконечных двоичных последовательностей.

5.1.2. Локальное отображение $f(u) = u + \gamma u(1 - u)^2$. Предположим, что $\gamma > 0$. Локальное отображение $f(u) = u + \gamma u(1 - u)^2$ имеет две неподвижные точки на $[0, 1]$ (см. рис. 10): $u = 0$ – отталкивающая ($f'(0) = 1 + \gamma > 1$), а $u = 1$ – нейтральная ($f'(1) = 1$). Легко проверить, что если $\gamma > 0$ и $u \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$, то $f'(u) > 1$, и, следовательно, $f(u)$ – растягивающее на $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, так что есть только две неподвижные точки для всех $u \in \mathbb{R}$. Следовательно, при $0 < \gamma < 1$ отображение $f(u)$ есть гомеоморфизм $\mathbb{R}$ с двумя неподвижными точками, и легко видеть, что других периодических точек нет. Компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ имеет три неподвижные точки: 0 и ∞ являются гиперболическими точками, а $u = 1$ нейтральна. Фазовый портрет $\tilde{f}$ напоминает фазовый портрет отображения Морса–Смейла (см. рис. 6).

Рис. 11. Локальное отображение для уравнения Нагумо, $f(u) = u - Au(u - \theta)(u - 1)$

Рис. 12. Модифицированное локальное отображение для уравнения Нагумо

5.2. Уравнение Нагумо. Локальное отображение является кубическим многочленом, $f(u) = u - Au(u - \theta)(u - 1)$ (см. рис. 11). Оно имеет три неподвижные точки $\{0, \theta, 1\}$, которые гиперболически при достаточно малом A :

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= |1 - A\theta| < 1, \\ |f'(\theta)| &= |1 + A\theta(1 - \theta)| > 1, \\ |f'(1)| &= |1 - A(1 - \theta)| < 1. \end{aligned}$$

Производная равна $f'(u) = 1 + Ah(u)$, где $h(u) = -3u^2 + 2(\theta + 1)u - \theta$.

Изменим отображение f вне некоторого большого интервала $[-R, R]$, $R \gg 1$, так, чтобы новое отображение $\hat{f}$ удовлетворяло следующим условиям:

- (1) $\hat{f}(x) = f(x)$ при $x \in [-R, R]$;
- (2) при $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ отображение $\hat{f}(x)$ устроено так, как показано на рис. 12;
- (3) $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ и, кроме того, $\hat{f}'$ и $\hat{f}''$ ограничены на $\mathbb{R}$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{f} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{f} = +\infty$.

ТЕОРЕМА 5.2.1. Для всех достаточно малых A компактифицирующее отображение $\hat{f}$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла окружности S^1 с четырьмя неподвижными точками, соответствующими $\{0, \theta, 1, \infty\}$ (см. рис. 6b)).

5.3. Вещественное амплитудное уравнение. Локальное отображение – кубический многочлен, $f(u) = Au - bu^3$. Пусть $A \in (0, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$ и $b > 0$. Отображение f – эндоморфизм с одной неподвижной точкой 0 при $A < 1$ (см. рис. 13) и с тремя неподвижными точками $\left\{0, \pm \sqrt{\frac{A-1}{b}}\right\}$ при $A \in (1, \frac{3}{2})$ (см. рис. 14). Все неподвижные точки – гиперболические.

Положим $u_0 = \sqrt{\frac{A}{3b}}$. Тогда $f'(u_0) = 0$. Пусть $R = u_0 - \epsilon$ при достаточно малом ϵ . Мы можем изменить f вне $[-R, R]$ так, чтобы производная $f'(u)$ нового отображения f была положительна при $u \in \mathbb{R}$ (здесь нам нужно условие, что $A < \frac{3}{2}$) и чтобы

Рис. 13. Локальное отображение для вещественного амплитудного уравнения, $f(u) = Au - bu^3$, $A \in (0, 1)$

Рис. 14. Локальное отображение для вещественного амплитудного уравнения, $f(u) = Au - bu^3$, $A \in (1, \frac{3}{2})$

выполнялось условие $f'(u) < 1$ при $u \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$. Новое отображение – диффеоморфизм $\mathbb{R}$ с четырьмя гиперболическими неподвижными точками (одна из них $-\infty$) при $A \in (1, \frac{3}{2})$ и двумя гиперболическими неподвижными точками при $A \in (0, 1)$. Отображение не имеет других периодических точек.

ТЕОРЕМА 5.3.1. Если $b > 0$ и $A \in (0, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$, то компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ – диффеоморфизм Морса–Смейла окружности S^1 с четырьмя неподвижными точками при $A \in (1, \frac{3}{2})$ и двумя неподвижными точками при $A \in (0, 1)$ (см. рис. 6с)).

Рассмотрим теперь вещественное амплитудное уравнение при больших значениях A . При $A > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ абсолютные значения локального максимума и локального минимума превосходят $\sqrt{\frac{A}{b}}$, где $f\left(\sqrt{\frac{A}{b}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{A}{b}}\right) = 0$ (см. рис. 15). Пусть $m_1 >$

Рис. 15. Локальное отображение для вещественного амплитудного уравнения, $f(u) = Au - bu^3$, $A > 3$

$m_2 > 0$ – два положительных решения уравнения

$$f(x) = \sqrt{\frac{A}{b}}$$

и $n_1 < n_2 < 0$ – два отрицательных решения уравнения

$$f(x) = -\sqrt{\frac{A}{b}}.$$

Положим $I_1 = \left[-\sqrt{\frac{A}{b}}, n_2\right]$, $I_2 = [n_2, m_2]$ и $I_3 = \left[m_1, \sqrt{\frac{A}{b}}\right]$. Имеем

$$\left|f'\left(\sqrt{\frac{A-1}{3b}}\right)\right| = \left|f'\left(-\sqrt{\frac{A-1}{3b}}\right)\right| = \left|f'\left(\sqrt{\frac{A+1}{3b}}\right)\right| = \left|f'\left(-\sqrt{\frac{A+1}{3b}}\right)\right| = 1,$$

и при $A > 3$ непосредственное вычисление показывает, что $m_2 < \sqrt{\frac{A-1}{3b}}$. Следовательно, справедливы следующие утверждения:

- (1) $|f'(x)| > 1$ при $x \in I_i$, $i = 1, 2, 3$;
- (2) $f^{-1}\left(\left[-\sqrt{\frac{A}{b}}, \sqrt{\frac{A}{b}}\right]\right) = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

Пусть

$$\Lambda = \bigcap_{i \geq 0} f^{-i}\left(\left[-\sqrt{\frac{A}{b}}, \sqrt{\frac{A}{b}}\right]\right).$$

Рис. 16. Локальное отображение для уравнения ФитцХью–Нагумо а) с одной притягивающей неподвижной точкой; б) с двумя притягивающими неподвижными точками и одним седлом; в) с тремя седлами

Следующее утверждение – хорошо известный факт для случая кубической нелинейности.

ТЕОРЕМА 5.3.2. Если $A > 3$, то $f|_{\Lambda}$ сопряжена марковской цепи $\Omega|_{\mathcal{B}}$, где

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Динамика локального отображения для уравнения ФитцХью–Нагумо

В этом разделе мы приводим строгие и численные результаты о локальных отображениях для уравнения ФитцХью–Нагумо (которое является двумерным уравнением).

6.1. Строгие результаты. Локальное отображение задается формулой

$$f(u_1, u_2) = (u_1 - Au_1(u_1 - \theta)(u_1 - 1) - \alpha u_2, \beta u_1 + \gamma u_2),$$

где $A, \alpha, \beta > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ и $\theta \in (0, 1)$ – параметры. Мы изменим кубический нелинейный член вдоль u_1 -координаты вне некоторого большого интервала $[-R, R]$ как в п. 5.2 (и по-прежнему будем обозначать это отображение через f). Рассмотрим также компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ на S^2 .

Мы покажем, что 1) для всех достаточно больших значений A отображение f имеет подкову Смейла, 2) для всех достаточно малых значений A компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ есть отображение типа Морса–Смейла и 3) для промежуточных значений A отображение f имеет притягивающую область и “странный” аттрактор. Нам кажется, что для некоторых значений параметров этот аттрактор – типа Эно.

Легко видеть, что отображение f имеет одну неподвижную точку, $O = (0, 0)$, если

$$A < \frac{4\alpha\beta}{(1-\gamma)(1-\theta)^2}, \quad (6.1.27)$$

и три неподвижные точки, $O = (0, 0)$ и $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, где

$$x_i = \frac{1}{2} \left(\theta + 1 \mp \sqrt{(\theta - 1)^2 - \frac{4\alpha\beta}{A(1-\gamma)}} \right), \quad y_i = \frac{\beta}{1-\gamma} x_i, \quad (6.1.28)$$

если

$$A > \frac{4\alpha\beta}{(1-\gamma)(1-\theta)^2}. \quad (6.1.29)$$

ТЕОРЕМА 6.1.1. *Существуют такие положительные значения α_0 , β_0 и A_0 , что если*

$$0 < A < A_0, \quad 0 < \alpha < \alpha_0, \quad 0 < \beta < \beta_0, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \gamma < 1$$

и

$$A \neq \frac{4\alpha\beta}{(1-\gamma)(1-\theta)^2},$$

то компактифицирующее отображение $\tilde{f}$ есть диффеоморфизм Морса–Смейла сферы S^2 . Кроме того,

- (1) *если выполнено соотношение (6.1.27), то отображение $\tilde{f}$ имеет две неподвижные точки – 0 (притягивающая) и ∞ (отталкивающая) (см. рис. 16а));*
- (2) *если выполняется (6.1.29), то отображение $\tilde{f}$ имеет четыре неподвижные точки – $0 = (0, 0)$ (притягивающая), ∞ (отталкивающая), $P_1 = (x_1, y_1)$ (седло) и $P_2 = (x_2, y_2)$ (притягивающая) (см. рис. 16б)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим отображение f в виде

$$f(u_1, u_2) = f_0(u_1, u_2) + f_1(u_1, u_2),$$

где $f_1(u_1, u_2) = (-\alpha u_2, \beta u_1)$, $f_0(u_1, u_2) = (u_1 - Au_1(u_1 - 1)(u_1 - \theta), \gamma u_2)$ на $[-R, R]$ и $f_0(u_1, u_2)$ изменена так же, как и выше, при $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$. Пусть $\tilde{f}_0$ – компактификация отображения f_0 . Тогда $\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1$ – малое возмущение $\tilde{f}_0$ при достаточно малом α и β . Из п. 5.2 следует, что при $\gamma \in (0, 1)$ и всех достаточно малых A отображение $\tilde{f}_0$ есть диффеоморфизм Морса–Смейла сферы S^2 . Требуемый результат вытекает из структурной устойчивости систем Морса–Смейла (т.е. малое возмущение диффеоморфизма Морса–Смейла снова является диффеоморфизмом Морса–Смейла; см. [18]).

Рис. 17. Атрактор для отображения ФитцХью–Нагумо: первый образ прямоугольника $\mathbf{R}$

ТЕОРЕМА 6.1.2. *Существует такой прямоугольник $\mathbf{R} = [t, \ell] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^2$ (для некоторых $\ell > 1 > 0 > t$ и $s > 0 > r$) и такие числа*

$$\alpha_0 > 0, \quad 0 < A_2 < A_3, \quad 0 < \theta_1 < \frac{1}{2} < \theta_2 < 1,$$

что если

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \alpha < \alpha_0, \quad 0 < \beta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad A_2 < A < A_3,$$

то

- (1) выполняется условие (6.1.29) и все три неподвижные точки, $O = (0, 0)$ и $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, являются седлами, причем они лежат внутри $\mathbf{R}$ (см. рис. 16b), c);
- (2) $\overline{f(\mathbf{R})} \subset \mathbf{R}$, т.е. $\mathbf{R}$ – область притягивания (см. рис. 17).

Отсюда непосредственно следует, что отображение f имеет аттрактор

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\mathbf{R}).$$

Мы обсудим структуру этого аттрактора в следующем пункте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{R} = [t, \ell] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^2$, $\ell > 1 > 0 > t$, $s > 0 > r$, – прямоугольник.

Мы требуем, чтобы образ точки $\mathbf{B} = (\ell, s)$ лежал под прямой $u_2 = s$, а образ точки $\mathbf{C} = (t, r)$ – над прямой $u_2 = r$, т.е.

$$\beta\ell + \gamma s < s, \quad \beta t + \gamma r > r.$$

Следовательно,

$$s > \frac{\beta\ell}{1-\gamma}, \quad r < \frac{\beta t}{1-\gamma}. \quad (6.1.30)$$

В дальнейшем мы выбираем $|\ell| < 2$ и $|t| < 1$. Поэтому справедливость условия (6.1.30) может быть гарантирована при любом выборе $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$.

Образы горизонтальных сторон прямоугольника $\mathbf{R}$ имеют вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{AB}) &= (k(u_1) - \alpha s, \beta u_1 + \gamma s), \\ f(\mathbf{CD}) &= (k(u_1) - \alpha r, \beta u_1 + \gamma r), \quad u_1 \in [t, \ell], \end{aligned}$$

где $k(u_1) = u_1 - Au_1(u_1 - \theta)(u_1 - 1)$. Мы требуем, чтобы образы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ лежали в $\mathbf{R}$, т.е. при $u_1 \in (t, \ell)$ должны выполняться соотношения

$$t < k(u_1) - \alpha s < k(u_1) - \alpha r < \ell. \quad (6.1.31)$$

Мы хотим показать, что можно выбрать ℓ и t так, чтобы соотношение (6.1.31) выполнялось при любом выборе параметров A , θ и α .

Мы сначала рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$ и $\theta = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что при любом $A > 4$ все три неподвижные точки – гиперболические. Чтобы гарантировать справедливость соотношения (6.1.31), достаточно выбрать ℓ и t так, чтобы

$$k(c_2) < \ell, \quad k(c_1) > t, \quad (6.1.32)$$

$$k(t) < \ell, \quad k(\ell) > t, \quad (6.1.33)$$

где c_1 – локальный минимум, а c_2 – локальный максимум $k(u_1)$. Соотношения (6.1.33) заведомо выполняются, если выбрать A так, чтобы

$$A < \hat{A}(t, \ell) = \min \left\{ \frac{\ell - t}{-t(t-1)(t-\frac{1}{2})}, \frac{\ell - t}{\ell(\ell-1)(\ell-\frac{1}{2})} \right\}.$$

Заметим, что $\hat{A}(-0.044, 1.045) > 4$. Поэтому существуют такие t_0 и ℓ_0 , что $\hat{A}(t, \ell) > 4$ при любых $t_0 < t < -0.044$ и $1.045 < \ell < \ell_0$. С другой стороны, при $A = 4$ имеем

$$k(c_2) < 1.045, \quad k(c_1) > -0.044.$$

Следовательно, по непрерывности, существует такое $4 < \tilde{A}_3 < B$, что неравенства (6.1.32) выполняются для всех $4 < A < \tilde{A}_3$.

Рис. 18. Подкова Смейла для отображения ФитцХью–Нагумо

Заметим, что отображения

$$(\alpha, \theta) \mapsto f(u_1, u_2), \quad (\alpha, \theta) \mapsto D_{(u_1, u_2)} f$$

непрерывны. Поэтому существуют такие окрестности точки $\theta = \frac{1}{2}, (\theta_1, \theta_2), 0 < \theta_1 < \frac{1}{2} < \theta_2 < 1$, и точки $\alpha = 0, (0, \alpha_0), \alpha_0 > 0$, что для некоторых ℓ, t и $A_2 < A_3$ продолжается оценка (6.1.31). Отсюда следует, что $\overline{f(\mathbf{R})} \subset \mathbf{R}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.1.3. *Существуют такой прямоугольник $\mathbf{R} = [t, \ell] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^2$ (для некоторых $\ell > 1 > 0 > t$ и $s > 0 > r$) и такое число $A_4 > 0$, что для любого $A > A_4$ можно указать такие $\alpha_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$, что если*

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \alpha < \alpha_0, \quad 0 < \beta < \beta_0,$$

то

- (1) выполняется условие (6.1.29) и все три неподвижные точки $O = (0, 0)$ и $P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2$, являются седлами, причем они лежат внутри $\mathbf{R}$ (см. рис. 18);
- (2) множество

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\mathbf{R})$$

– локально максимальное гиперболическое множество для f .

Заметим, что множество Λ есть подкова Смейла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для некоторых $s > 0 > r$ и $\ell > 1 > 0 > t$ положим $\mathbf{R} = [t, \ell] \times [r, s] \subset \mathbb{R}^2$. Покажем, что справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\mathbf{R}) \cap \mathbf{R}$ имеет три непересекающиеся связные “горизонтальные” компоненты (см. рис. 18);
- 2) $f^{-1}(\mathbf{R}) \cap \mathbf{R}$ имеет три непересекающиеся связные “вертикальные” компоненты;
- 3) Λ – гиперболическое множество;
- 4) $O, P_1, P_2 \in \mathbf{R}$.

Нам нужна следующая простая лемма.

ЛЕММА 6.1.4. *Пусть $n(x) = -x(x-1)(x-\theta)$, $h(x) = n'(x) = -3x^2 + 2(\theta+1)x - \theta$, и пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ – корни многочлена $h(x)$. Тогда*

$$0 < \tilde{x}_1 < \theta < \tilde{x}_2 < 1, \quad n(\tilde{x}_1) < 0, \quad n(\tilde{x}_2) > 0,$$

$n(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (\theta, 1)$ и $n(x) < 0$ при $x \in (0, \theta) \cup (1, +\infty)$.

Чтобы доказать утверждение 1), рассмотрим образы следующих отрезков прямых (см. рис. 18):

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \{(t, u_2) \mid u_2 \in [r, s]\}, \\ \mathbf{MN} &= \{(k, u_2) \mid u_2 \in [r, s]\}, \quad 0 < k < \theta, \\ \mathbf{KG} &= \left\{ \left(\frac{\theta+1}{2}, u_2 \right) \mid u_2 \in [r, s] \right\}, \quad \mathbf{BD} = \{(\ell, u_2) \mid u_2 \in [r, s]\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{AC}) &= (t - At(t-1)(t-\theta) - \alpha u_2, \beta t + \gamma u_2), \\ f(\mathbf{MN}) &= (k - Ak(k-1)(k-\theta) - \alpha u_2, \beta k + \gamma u_2), \\ f(\mathbf{KG}) &= \left(\frac{\theta+1}{2} + A \frac{(\theta+1)(\theta-1)^2}{8} - \alpha u_2, \beta \frac{\theta+1}{2} + \gamma u_2 \right), \\ f(\mathbf{BD}) &= (\ell - A\ell(\ell-1)(\ell-\theta) - \alpha u_2, \beta \ell + \gamma u_2), \end{aligned}$$

где $u_2 \in [r, s]$.

Для всех достаточно больших значений A отрезки прямых $f(\mathbf{BD})$ и $f(\mathbf{MN})$ лежат слева от прямой $u_1 = t$, а отрезки прямых $f(\mathbf{AC})$ и $f(\mathbf{KG})$ лежат справа от прямой $u_1 = \ell$. Из последнего замечания следует, что

$$\theta + A \frac{(\theta+1)(\theta-1)^2}{4} > \ell + 2\alpha s. \quad (6.1.34)$$

Мы требуем также, чтобы образы четырех угловых точек $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ лежали между прямыми $u_2 = r$ и $u_2 = s$, т.е.

$$r < \frac{\beta t}{1-\gamma}, \quad s > \frac{\beta \ell}{1-\gamma}. \quad (6.1.35)$$

Далее, мы хотим, чтобы образы точек, в которых отображение f не является локально взаимно однозначным, находились вне $\mathbf{R}$. Имеем

$$D_{(u_1, u_2)} f = \begin{pmatrix} 1 + Ah(u_1) & -\alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

где $h(u_1) = -3u_1^2 + 2(1+\theta)u_1 - \theta$. Есть два значения величины u_1 , $u_1 = e_{1,2}$, в которых оператор $D_{(u_1, u_2)} f$ не является обратимым:

$$e_{1,2} = \frac{1}{3}(\theta+1) \mp \frac{1}{3} \sqrt{\theta^2 - \theta + 1 + \frac{3}{A} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} + 1 \right)}.$$

Легко проверить, что для всех $A \gg 1$ и при достаточно малых α и β имеем

$$0 < e_1 < \theta < e_2 < 1.$$

Следовательно, образы двух отрезков прямых

$$\{(e_1, u_2) : u_2 \in [r, s]\}, \quad \{(e_2, u_2) : u_2 \in [r, s]\}$$

лежат вне прямоугольника $\mathbf{R}$. Чтобы завершить доказательство утверждения 1), нам нужно доказать, что три непересекающиеся связные “горизонтальные” компоненты множества $f(\mathbf{R}) \cap \mathbf{R}$ не перекрываются. Достаточно показать, что

$$f_2(u_1, u_2) \neq f(u'_1, u'_2),$$

если (u_1, u_2) и (u'_1, u'_2) различны. Действительно, из соотношения $\beta u_1 + \gamma u_2 = \beta u'_1 + \gamma u'_2$ следует, что $u_1 = u'_1 + \frac{\gamma}{\beta}(u'_2 - u_2)$. Так как отображение f локально диффеоморфно на $f(\mathbf{R}) \cap \mathbf{R}$, то $|u'_2 - u_2| > \varepsilon$. Следовательно, при достаточно малом β величина $|u_1 - u'_1|$ становится столь большой, что точки u_1 и u'_1 не могут одновременно лежать в $\mathbf{R}$. Это завершает доказательство утверждения 1). Второе утверждение следует из первого.

Докажем теперь третье утверждение. Для любого $p \in \mathbf{R}$ и $\lambda > 1$ введем два конуса

$$\begin{aligned} C^u(p) &= \{v = (v_1, v_2) \in T_p \mathbb{R}^2 : |v_2| \leq \lambda^{-1}|v_1|\}, \\ C^s(p) &= \{v = (v_1, v_2) \in T_p \mathbb{R}^2 : |v_2| \geq \lambda|v_1|\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $C^u(p)$ и $C^s(p)$ непрерывно зависят от p , причем $C^u(p) \cap C^s(p) = \{p\}$ и угол между $C^u(p)$ и $C^s(p)$ – ненулевая постоянная. При $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ введем $\|v\| = \|(v_1, v_2)\| = \max(|v_1|, |v_2|)$.

ЛЕММА 6.1.5. *Существует такое $\lambda > 1$, что*

- (а) *если $p \in \mathbf{R} \cap f^{-1}(\mathbf{R})$ и $v \in C^u(p)$, то $Df_p v \in C^u(f(p))$ и $\|Df_p v\| \geq \lambda\|v\|$;*
- (б) *если $p \in \mathbf{R} \cap f(\mathbf{R})$ и $v \in C^s(p)$, то $Df_p^{-1} v \in C^s(f^{-1}(p))$ и $\|Df_p^{-1} v\| \geq \lambda\|v\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = (x, y)$, $f(p) \in \mathbf{R}$. Для любого $\gamma > 1$ мы можем определить конусы $C^{s,u}(p)$. Пусть $v = (v_1, v_2) \in C^u(p)$. Тогда $|v_1| \geq \lambda|v_2| > |v_2|$, и поэтому $\|(v_1, v_2)\| = |v_1|$. Положим $(w_1, w_2) = Df_p(v_1, v_2)$. Пусть $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ – корни многочлена $h(x)$, определенные в лемме 6.1.4. При достаточно большом A имеем $f(\tilde{x}_2, y) > \ell$ и $f(\tilde{x}_1, y) < r$. Следовательно, если $(x, y), f(x, y) \in \mathbf{R}$, то $h(x) \neq 0$. При достаточно большом A мы можем выбрать такое $\lambda_1 > 1$, что

$$\frac{|1 + Ah(x)| - \alpha}{\beta + 1} > \lambda_1 > 1. \quad (6.1.36)$$

Тогда

$$|w_2| = |\beta v_1 + \gamma v_2| \leq \beta|v_1| + |v_2| \leq (\beta + 1)|v_1|$$

и

$$\begin{aligned} |w_1| &= |(1 + Ah(x))v_1 - \alpha v_2| \geq |(1 + Ah(x))| \cdot |v_1| - \alpha|v_2| \\ &\geq |1 + Ah(x)| \cdot |v_1| - \alpha|v_1| = (|1 + Ah(x)| - \alpha)|v_1|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|w_1| \geq \frac{|1 + Ah(x)| - \alpha}{\beta + 1} |w_2| \geq \lambda_1 |w_2|$$

при достаточно большом A . Отсюда следует, что $(w_1, w_2) \in C^u(f(p))$ и

$$\|(w_1, w_2)\| = |w_1| \geq (1 + \beta)\lambda_1|v_1| > \lambda_1|v_1| = \lambda_1\|(v_1, v_2)\|.$$

Это доказывает утверждение (а).

Чтобы доказать утверждение (b), положим $p = (x, y)$, $f^{-1}(p) \in \mathbf{R}$ и $v = (v_1, v_2) \in C^s(p)$. Тогда $|v_1| \leq \lambda |v_2| < |v_2|$, и поэтому $\|(v_1, v_2)\| = |v_2|$. Пусть $(w_1, w_2) = Df_p^{-1}(v_1, v_2)$. Имеем

$$Df_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m(x)} & \frac{\alpha}{m(x)} \\ -\frac{\beta}{m(x)} & \frac{1 + Ah(x)}{m(x)} \end{pmatrix},$$

где $m(x) = \alpha\beta + \gamma(1 + Ah(x))$. Отсюда следует, что

$$|w_1| = \frac{1}{|m(x)|} |\gamma v_1 + \alpha v_2| \leq \frac{1}{|m(x)|} (\gamma |v_1| + \alpha |v_2|) \leq \frac{\alpha + \gamma}{|m(x)|} |v_2|$$

и

$$\begin{aligned} |w_2| &= \frac{1}{|m(x)|} |(1 + Ah(x))v_2 - \beta v_1| \geq \frac{1}{|m(x)|} |(1 + Ah(x))| \cdot |v_2| - \beta |v_1| \\ &\geq \frac{|1 + Ah(x)| - \beta}{|m(x)|} |v_2|. \end{aligned}$$

При достаточно большом A и достаточно малых α и β можно выбрать такое $\lambda_2 > 1$, что

$$\frac{|1 + Ah(x)| - \beta}{|m(x)|} > \lambda_2.$$

Отсюда следует, что

$$|w_2| \geq \frac{|1 + Ah(x)| - \beta}{|m(x)|} |v_2| \geq \frac{|m(x)|}{\gamma + \alpha} \lambda_2 |w_1| \geq \lambda_2 |w_1|.$$

Поэтому $(w_1, w_2) \in C^s(f^{-1}(p))$. Таким образом,

$$\|(w_1, w_2)\| = |w_2| > \lambda_2 |v_2| = \lambda_2 \|(v_1, v_2)\|.$$

Искомый результат получается, если положить $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Из леммы следует, что Λ – гиперболическое множество.

Докажем теперь утверждение 4) (см. начало доказательства нашей теоремы). Ясно, что $O \in \mathbf{R}$. Из (6.1.35) и (6.1.34) следует, что

$$A > \frac{4(1 + 2\alpha s - \theta)}{(\theta + 1)(\theta - 1)^2} > \frac{4\left(1 + 2\frac{\alpha\beta}{1 - \gamma} - \theta\right)}{(\theta + 1)(\theta - 1)^2} > \frac{4\alpha\beta}{(1 - \gamma)(1 - \theta)^2}.$$

Таким образом, выполняется условие (6.1.29), и поэтому есть три неподвижные точки, O и P_i , $i = 1, 2$. Наконец,

$$\theta < x_1 < x_2 < 1, \quad \frac{\beta\theta}{1 - \gamma} < y_1 < y_2 < \frac{\beta}{1 - \gamma}$$

для x_i и y_i , $i = 1, 2$, определенных формулами (6.1.28). Из (6.1.35) следует, что

$$0 < y_1 < y_2 < s.$$

Рис. 19. Бифуркационная диаграмма для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$

Рис. 20. Бифуркационная диаграмма для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.52$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$

Таким образом, $P_1, P_2 \in \mathbf{R}$.

6.2. Бифуркационные диаграммы для уравнения ФитцХью–Нагумо.

В этом пункте мы приводим анализ перехода от поведения типа Морса–Смейла к существованию аттрактора типа Эно с ростом A , полученный с помощью компьютера.

Положим $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$ и $\theta = 0.51$, что удовлетворяет требованиям теорем 6.1.1–6.1.3. Заметим, что бифуркационные диаграммы оказываются идентичными при различных значениях γ (см. рис. 19–21). Кроме того, бифуркационная диаграмма для уравнения ФитцХью–Нагумо (при различных значениях γ) и бифуркационная диаграмма для уравнения Нагумо (см. п. 5.2) тоже совпадают. В дальнейшем мы считаем, что $\gamma = 0.2$.

Есть только одна неподвижная точка при $A < 4.1649313 \times 10^{-3}$ и три при $A > 4.1649313 \times 10^{-3}$ (см. (6.1.27) и (6.1.29)).

Из теоремы 6.1.1 следует, что при малых значениях A система имеет тип Морса–Смейла. При возрастании A мы наблюдаем две последовательности бифуркаций

Рис. 21. Бифуркационная диаграмма для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.9$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$

Рис. 22. Бифуркационная диаграмма для отображения ФитцХью–Нагумо, $\theta = 0.51$

Рис. 23. Аттрактор для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$, $A = 6.1$, $\mathbf{R} = [-0.21, 1.23] \times [-0.02, 0.031]$

Рис. 24. Аттрактор для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$, $A = 6.4$, $\mathbf{R} = [-0.21, 1.23] \times [-0.02, 0.031]$

Рис. 25. Аттрактор для отображения ФитцХью–Нагумо, $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.02$, $\theta = 0.51$, $A = 7.75$, $\mathbf{R} = [-0.21, 1.21] \times [-0.02, 0.031]$

удвоения периодов около $A = 4$. Первая последовательность рождается из точки O , а другая – из P_2 . Из теоремы 6.1.2 следует, что при A , лежащем между приблизительно 4 и 7.8, существуют область притяжения (прямоугольник) $\mathbf{R}$, содержащая все три неподвижные точки, и аттрактор внутри $\mathbf{R}$.

Вначале аттрактор содержит лишь конечное число притягивающих и гиперболических точек и их неустойчивых многообразий. Но с ростом A продолжается удвоение периодов и, как мы полагаем, оно заканчивается на двух аттракторах Фейгенбаума (вообще говоря, эти аттракторы появляются при различных значениях A), один – около P_2 , а другой – около O .

Когда A превышает значение $A = 6$, возникают два аттрактора типа Эно около тех же неподвижных точек P_2 и O (они могут соответствовать различным значениям A). В каждом из этих аттракторов всюду плотно неустойчивое многообразие соответствующей неподвижной точки. Области притяжения этих аттракторов разделены устойчивой сепаратрисой неподвижной точки P_1 (см. рис. 23).

При $A \approx 6.3$ неустойчивая сепаратриса неподвижной точки O пересекает устойчи-

вую сепаратрису P_1 , и все орбиты в $\mathbf{R}$ уходят в единственный аттрактор типа Эно P_2 (см. рис. 24). Это явление не имеет места в симметричном случае, при $\theta = 0.5$.

Когда A увеличивается дальше (приблизительно до значения 6.5), два аттрактора сливаются, и неустойчивые сепаратрисы неподвижных точек P_2 и O всюду плотны в получаемом таким образом аттракторе типа Эно (см. рис. 25).

Из теоремы 6.1.3 следует, что при больших значениях A наша система имеет подкову.

Приложение. Необходимые сведения (см. [13], [18], [17])

Рассмотрим C^1 -дiffeоморфизм $f: M \rightarrow M$ компактного гладкого риманова многообразия M . Обозначим через $\Omega(f)$ множество всех неблуждающих точек и через $\text{Per}(f)$ множество периодических точек f .

Напомним, что diffeоморфизм (эндоморфизм) f называется *диффеоморфизмом (эндоморфизмом) Морса–Смейла*, если

- (1) $\Omega(f) = \text{Per}(f)$;
- (2) любая периодическая точка – гиперболическая;
- (3) глобально (локально) устойчивое и неустойчивое многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Если точка ∞ является неподвижной точкой для отображения $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (отталкивающей или притягивающей), можно определить *компактифицирующее отображение* $\tilde{f}: S^d \rightarrow S^d$ формулой

$$\tilde{f} = P \circ f \circ P^{-1},$$

где $P: S^d \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^d$ – стереографическая проекция, а N – северный полюс сферы S^d .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. S. Afraimovich, Ya. Pesin. Travelling waves in lattice models of multidimensional and multi-component media. I. general hyperbolic properties // Nonlinearity. 1993. V. 6. № 3. P. 429–455.
- [2] V. S. Afraimovich, Ya. B. Pesin, A. A. Tempelman. Travelling waves in lattice models of multidimensional and multi-component media. II. Ergodic Properties and Dimension // Chaos. 1993. V. 3. № 2. P. 233–241.
- [3] D. G. Aronson, H. F. Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation // Lecture Notes in Math. 1975. V. 446. P. 5–49.
- [4] P. J. Blennerhassett. On the Generation of Waves by Wind // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 298. 1980/81. № 1441. P. 451–494.
- [5] J. Cronin. Mathematical Aspects of Hodgkin–Huxley Neural Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [6] M. C. Cross, P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Modern Phys. 1993. V. 65. № 3. P. 851–1112.
- [7] I. R. Epstein, J. A. Pojman. An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics. New York: Oxford Univ. Press, 1998.
- [8] R. A. Fisher. The Genetical Theory of Natural Selection. Oxford: Clarendon Univ. Press, 1930.
- [9] R. A. Fisher. The advance of advantageous genes // Annu. Eugenics. 1937. V. 7. P. 355–369.
- [10] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445–466.
- [11] R. FitzHugh. Mathematical models of excitation and propagation in nerve // Biological Engineering / ed. H. P. Schwan. New York: McGraw-Hill, 1969. P. 1–85.

- [12] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. V. 117. P. 500–544.
- [13] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [14] А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Секц. А, матем. мех. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26; А. Н. Колмогоров // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 221–246.
- [15] K. Maginu. Reaction-diffusion equation describing morphogenesis. I. Waveform stability of stationary wave solutions in a one dimensional model // Math. Biosci. 1975. V. 27. № 1/2. P. 17–98.
- [16] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa. Bistable transmission lines // IEEE Trans. Circuit Theory. 1965. V. 12. P. 400–412.
- [17] Z. Nitecki. Differentiable Dynamics. An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms. Cambridge: The MIT Press, 1971.
- [18] J. Palis, Jr. W. de Melo. Geometric Theory of Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [19] C. V. Pao. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.
- [20] K. Stewartson, J. T. Stuart. A Non-linear instability theory for a wave system in plane poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. № 3. P. 529–545.
- [21] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis // R. Soc. Zond. Philos. Trans. Ser. B Biol. Sci. 1952. V. 237. P. 5–72.

Pennsylvania State University, USA;

Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA

E-mail: pesin@math.psu.edu, yurchenk@math.gatech.edu

Поступила в редакцию

24.06.2003