Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 115–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:16:10

УДК 517.927

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ

Ю. В. ПОКОРНЫЙ, В. Л. ПРЯДИЕВ

В работе строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций для задачи

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda tu, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (*)$$

на пространственной сети Γ (в других терминах Γ – метрический граф, клеточный комплекс, стратифицированное локально-одномерное многообразие, ветвящееся пространство, квантовый граф и проч.), где $\partial\Gamma$ – совокупность граничных вершин Γ .

Во внутренних точках ребер Γ квазипроизводная $\frac{d}{d\Gamma}(pu')$ имеет классический вид $(pu')'$, а во внутренних узлах она подразумевает

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu') = -\sum_{\gamma} \alpha_{\gamma}(a) u'_{\gamma}(a),$$

где суммирование происходит по примыкающим к a ребрам γ , а $u'_{\gamma}(a)$ – крайняя для γ производная сужения $u_{\gamma}(x)$ на γ функции $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Несмотря на ветвящийся аргумент, как бы промежуточного типа между одномерным и многомерным, внешний вид результатов оказывается вполне классическим.

Выясняется классическая природа оператора L , устанавливаются точные аналоги принципа максимума, теорем Штурма о перемежаемости нулей, а также осцилляционные знакорегулярные свойства спектра задачи $(*)$ (простота и положительность точек спектра, а также число нулей и их перемежаемость у собственных функций).

Библиография: 56 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	116
§ 2. Скалярное дифференциальное уравнение на сети	120
§ 3. Неосцилляция на пространственной сети	127
§ 4. Корневая простота	133
§ 5. Размерность корневого пространства – связь с распределением нулей	139
§ 6. Спектральная задача на сети в общем положении	142
§ 7. Некоторые комментарии	146
Список литературы	148

В работе строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций (см., например, [1]–[3]) для задачи

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda tu, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (1)$$

на пространственной сети Γ (в других терминах Γ – метрический граф, клеточный комплекс, стратифицированное локально-одномерное многообразие, ветвящееся пространство, квантовый граф и проч.), где $\partial\Gamma$ – совокупность граничных вершин Γ . Во внутренних точках ребер Γ квазипроизводная $\frac{d}{d\Gamma}(pu')$ имеет классический вид $(pu')'$, а во внутренних узлах она подразумевает

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu') = - \sum_{\gamma} \alpha_{\gamma}(a) u'_{\gamma}(a), \quad (2)$$

где суммирование происходит по примыкающим к a ребрам γ , а $u'_{\gamma}(a)$ – крайняя для γ производная сужения $u_{\gamma}(x)$ на γ функции $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Несмотря на ветвящийся аргумент, как бы промежуточного типа между одномерным и многомерным, внешнему описанию результатов удается придать вполне классический вид (положительность и простота всех точек спектра, перемежаемость нулей собственных функций и проч.).

Подобных аналогов осцилляционных свойств Штурма пока не было даже и для простейшего случая, когда сеть – всего лишь цепочка без самопересечений, и когда задача (1) допускает адекватную переформулировку на интервале $(0 \leq x \leq l)$:

$$-(pu')' + \left[q(x) + \sum_1^k \beta_i \delta(x - \xi_i) \right] u = \lambda m(x)u, \quad u(0) = u(l) = 0, \quad (3)$$

где $\delta(x)$ – обычная дельта-функция и $0 < \xi_1 < \dots < \xi_k < l$.

§1. Введение

Системы типа (1), (2) возникают в самых разнообразных задачах естествознания – от систем волноводов и нейронных сетей до дискретно-непрерывных аппроксимаций лапласиана на римановом многообразии. При этом обычно вместо уравнения (1) фигурирует система (по ребрам Γ) стандартных уравнений $-(pu')' + qu = \lambda tu$ с дополнительным набором условий вида $\sum_{\gamma} \alpha_{\gamma} u'_{\gamma}(a) = 0$ во внутренних узлах $a \in \Gamma$. Эти условия согласования вдоль ребер, примыкающих к a , часто называют условиями трансмиссии. В электрических цепях эти условия адекватны законам Кирхгофа, для упругих сеток – балансу натяжений и т. п.

Как правило, условия трансмиссии относят к краевым. У нас этот взгляд меняется: условия трансмиссии трактуются как реализация уравнения (1) во внутренних узлах, что позволяет учитывать сосредоточенные усилия, стоки, массы и проч.

При очевидной актуальности таких задач на сетях внимание математиков к ним было привлечено всего лишь около двух десятилетий назад.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-01-00417, 01-01-00418, 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект № Е00-1.0-154) и программы “Университеты России” (проект УР.04.01.047).

1.1. Скалярная теорема Штурма на фоне графа. Для случая задачи (1) на отрезке, когда $\Gamma = (a, b) \subset \mathbb{R}$, замечательные (по словам Гильберта) осцилляционные результаты Штурма в наиболее сильной формулировке звучат так (когда p, q, t не слишком плохие).

ТЕОРЕМА 1.1 (согласно [4]). *Спектр задачи (1) состоит из последовательности $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots$ простых вещественных положительных собственных значений ($\lambda_n \rightarrow \infty$). Соответствующие собственные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ обладают следующими свойствами:*

- (а) $\varphi_0(x) > 0$ при всех $x \in \Gamma$;
- (б) φ_k имеет в Γ точно k нулей, при этом нули φ_k и φ_{k+1} перемежаются ($k = 1, 2, \dots$);
- (в) последовательность $\{\varphi_k\}_0^\infty$ есть цепь Маркова на Γ , т.е. при каждом n система $\{\varphi_k\}_0^n$ – система Чебышёва (T_n -система) на Γ ;
- (г) при любых $k < t$ и вещественных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_t$ функция $\sum_k^t \alpha_i \varphi_i$ имеет не менее k перемен знака и не более t нулей.

К концу XIX века эти свойства в инженерных кругах считались неперенным атрибутом малых упругих колебаний. Однако для упругой балки подобные свойства собственных частот строгое объяснение получили лишь в 30-е годы XX века – см. [4]. Развита в [4] идеология, базирующаяся на фундаментальном результате Келлога об осцилляционных ядрах-функциях Грина, послужила основой для переноса подобных результатов на более широкие классы задач, в том числе для дифференциальных уравнений старших порядков. Достаточно высокая активность в этом направлении, связанная с именами М. Г. Крейна, П. Д. Калафати, С. Карлина, Л. Коллатца, А. Ю. Левина, Г. Д. Степанова и др. (см. комментарии в [5]), привела к осцилляционным спектральным теоремам для математических моделей весьма непростых упругих систем типа цепочек стержней. Высокая эффективность методов этого направления объясняется их опорой на хорошо развитую матрично-тензорную технику анализа интегральных операторов в косых произведениях и использованием достаточно глубокой теории T -систем: свойства (а) и (б) теоремы 1.1 обычно выводились из (в), (г).

Согласно Дж. Мерхьюберу [6] (см. также [7; с. 51]), если на абстрактном компакте можно определить T -систему (порядка $n \geq 1$) непрерывных функций, то этот компакт гомеоморфен окружности или ее части. Последний факт опрокинул надежды на использование концепции ядер Келлога применительно, например, к упругим сеткам из струн: для любого нетривиального графа Γ разговор о системе Чебышёва непрерывных на Γ функций запрещен!

Но, может быть, такой разговор возможен для первой части утверждений теоремы 1.1, в том числе для первых двух свойств (а), (б), характерных для основной версии (см. [1]–[3]) теоремы Штурма?

Именно в этом направлении и ведется излагаемое ниже исследование. Для случая произвольного конечного графа $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ мы реанимируем классическую схему Штурма, базирующуюся на его фундаментальной теореме сравнения, а затем строим и изучаем аналог решения Вейля (и функцию Вейля). Нам придется существенно углубить понятие “*между нулями*”, в обычном виде совершенно бессмысленное на графе. О том, что предстоящий разговор непрост, говорит следующий пример.

1.2. Пример. Пучок из трех одинаковых однородных струн единичной длины. Здесь при параметризации всех струн отрезком $[0, 1]$ в направлении от узла к концам имеем для каждой струны $-u_i'' = \lambda u_i$ ($i = 1, 2, 3$), а в узле – условие непрерывности $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0)$ и условие трансмиссии $u_1'(0) + u_2'(0) + u_3'(0) = 0$, а также условия $u_i(1) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) закрепления на границе. Прямой подсчет приводит к спектру $\lambda_k = \left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right)^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), причем все четные точки спектра являются простыми, а все нечетные имеют кратность два. То есть уже эта физически как бы реальная упругая задача не обладает гармоническим (как в теореме 1.1) спектром собственных частот.

Ниже свойство (а) нам удастся установить для произвольного графа. А вот для свойства (б) уже при $k = 1$ в данном примере получаем абсурдную ситуацию, когда любое из трех ребер может оказаться сплошным нулем одной из соответствующих $\lambda_1 (= \pi^2)$ собственных функций, нетривиальной в целом на Γ . И как этот сплошной нуль может оказаться “между нулями” собственной функции, соответствующей λ_2 ?

1.3. Еще два примера. Если в предыдущей системе третья струна не загружена массами, т.е. $-u_3''' \equiv 0$, то $u_3(x)$ есть линейная функция, для которой $u(1) = 0$, и потому $u_1'(0) = -u(0)$. Но тогда условие трансмиссии принимает вид $u_1'(0) + u_2'(0) = u(0)$. Если $u_1(x)$ развернуть и пару $u_1(x), u_2(x)$ непрерывно расположить вдоль $[-1, 1]$, то мы будем иметь для объединенного решения $-u''(x) + \delta(x)u(x) = \lambda u(x)$ при условиях $u(\pm 1) = 0$. Полученное уравнение Шрёдингера с сингулярным потенциалом вполне наглядно отражает специфику проблем склейки, когда для склеенных решений (собственных функций) приходится считать суммарное число нулей. Постоянное присутствие проблемы – главная неприятность изучаемой задачи.

Пусть Γ есть окружность. Уравнение $-u'' = \lambda u$ на Γ определяет задачу, адекватную периодической на отрезке. Спектр ее считается в лоб: $\lambda_0 = 0, \varphi_0 \equiv 1$, все остальные точки спектра положительны и имеют двойную кратность, соответствующие им собственные функции имеют удвоенное (против свойства (б)) число нулей. Таким образом, отсутствие циклов – вообще говоря, необходимое для (б) условие. Однако мы о проблеме циклов для (б) вспомним лишь в конце работы, когда оценим размерность корневого пространства через цикломатическое число графа. Прямое предположение об отсутствии циклов у нас возникает лишь в заключительных двух теоремах – вся предыдущая теория противопоказаний к циклам не имеет.

1.4. Дальнейшая структура работы такова. Параграф 2 “Скалярное дифференциальное уравнение на сети” посвящен точному описанию и первичному анализу уравнения на сети

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = f. \quad (1.1)$$

В п. 2.1 приводятся основные договоренности и функциональные пространства. В п. 2.2 к уравнению (1.1) добавляются граничные условия

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (1.2)$$

приводящие (1.1) к исходной краевой задаче типа (1), и проводится ее начальный анализ. Показывается дивергентная природа оператора $\frac{d}{d\Gamma}$, а также, что этот оператор

реализует слабую μ -производную, где μ – мера, линейная на ребрах графа Γ и атомарная в его вершинах. Описываются некоторые “сюрпризы” уравнения (1.1), порождаемые ветвящимся аргументом и лишающие всякой надежды на использование стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на отрезке: 1) интеграл с переменным верхним пределом не имеет разумного толкования, 2) начальная задача, как правило, неоднозначно разрешима, 3) размерность пространства решений уравнения (1.1) равна, вообще говоря, не двум, а числу граничных вершин Γ , и т. д. Пункт 2.3 посвящен критерию невырожденности краевой задачи и доказательству аналитичности аналога функции Вейля для (1). В п. 2.4 устанавливается ряд свойств эллиптического характера (в частности, принцип максимума). Доказывается аналог теоремы Штурма о перемежаемости.

§3. *Неосцилляция на пространственной сети.* Здесь вводится (п. 3.1) ключевое понятие неосциллирующего на Γ оператора L (и уравнения $Lu = 0$): любое решение ($\neq 0$) уравнения $Lu = 0$ не имеет в Γ непустых S -зон. Под S -зоной $u(x)$ понимается Γ -интервал Γ_0 (связный подграф) такой, что $u(x) \neq 0$ на Γ_0 и $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$ (ветвящийся аналог интервала между соседними нулями). Формулируемый здесь аналог классического условия Якоби (об отсутствии сопряженных точек) позволяет описать (теорема 3.1) серию условий, адекватных неосцилляции. Тривиальное следствие – неосцилляция обеспечивается равенством $q \equiv 0$. Более глубокий факт – нетривиальное решение уравнения $Lu = 0$, сохраняющее знак на границе $\partial\Gamma$, не имеет нулей внутри Γ . Для неосциллирующего L в п. 3.2 устанавливается (теорема 3.3), что из неравенств $(Lu)(x) \geq 0$ на Γ плюс $u|_{\partial\Gamma} \geq 0$ следует $u(x) > 0$ на Γ либо $u(x) \equiv 0$ на Γ . В п. 3.3 неосцилляция уточняется до свойства критической неосцилляции, что позволяет получить аналог теоремы сравнения Штурма и установить свойство, способное удивить даже в одномерной форме: если неотрицательная в точках $x = 0$ и $x = \pi$ функция $u(x)$ удовлетворяет на $[0, \pi]$ неравенству $u'' + u \leq 0$, то $u(x) \equiv C \sin x$ при некотором $C = \text{const}$.

§4. *Корневая простота.* В п. 4.1 доказывается простота ведущего собственного значения в задаче (1) с неосциллирующим L и положительность соответствующей собственной функции. В п. 4.2 вопрос о размерности корневых подпространств связывается с распределением нулей собственных функций, что приводит к достаточным условиям простоты для остальных собственных значений. Здесь существенную роль играет возможность распространения свойств типа теоремы 3.3 на решения “знакопеременных” дифференциальных неравенств типа $v_0(x)Lu \geq 0$ ($x \in \Gamma$).

§5. *Размерность корневого пространства – связь с распределением нулей.* Здесь продолжается исследование размерности пространства E решений задачи (1) в связи с цикломатическим числом графа Γ . В п. 5.2 полученные результаты уточняются для графа без циклов, т.е. графа-дерева. Заканчивается пункт описанием условия общего положения задачи (1), обеспечивающего неравенство $\dim E \leq 1$, где E – пространство решений (1).

§6. *Спектральная задача на сети в общем положении.* Результаты предыдущих двух параграфов позволяют установить (п. 6.1) вещественность и простоту всех точек спектра задачи (1). В п. 6.2 устанавливается (в условиях общего положения) полный комплект осцилляционных свойств спектра, в частности, что k -я собственная функция имеет на Γ ровно k нулей.

В §7 изложены некоторые комментарии.

1.5. В центре нашего внимания – методы анализа распределения нулей и их эволюции по λ у аналога решения $u(x, \lambda)$ Вейля для построения спектрального описания, как у Штурма.

Следует отметить, что предположение об отсутствии циклов у нас возникает лишь начиная с § 5 (п. 5.2).

Авторы благодарны правлению Московского математического общества за возможность выступления на заседании ММО и лично академику Д. В. Аносову за полезные рекомендации.

§ 2. Скалярное дифференциальное уравнение на сети

В настоящем параграфе приводится точная постановка и первичный анализ основного объекта работы – обыкновенного уравнения вида

$$-\frac{d}{d\Gamma}(p(x)u') + q(x)u = f(x) \quad (2.0)$$

на геометрической сети Γ . Оно подразумевает классическую форму

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \quad (2.0_1)$$

на каждом ребре сети, а в ее внутренних узлах трактуется как

$$-\left(\sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{d}{d\gamma} u(x)\right) + q(x)u = f(x), \quad (2.0_2)$$

где суммирование проводится по всем ребрам γ , примыкающим к x , а $\frac{d}{d\gamma} u(x)$ подразумевает производную $u(\cdot)$ внутрь ребра γ .

Начав с необходимых понятий и договоренностей, мы показываем в п. 2.2 дивергентную природу $\frac{d}{d\Gamma}$, устанавливаем, что (2.0₂) является “слабой реализацией (2.0₁)” в узлах. В п. 2.4 доказываются два качественных результата, играющих важную роль в дальнейшем.

2.1. Основные договоренности.

2.1.1. Всюду далее Γ – геометрическая сеть из $\mathbb{R}^n$, реализованная в виде открытого связного геометрического графа. Если ребра сети допускают достаточно гладкую параметризацию и не имеют самопересечений, мы можем считать их прямолинейными интервалами (не включая в них внутренние узлы). Поэтому нам можно считать, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов $\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}$ ($i = \overline{1, m}$), называемых *ребрами* (дополнительно предполагается, что $a_i, b_i \notin \gamma_j$ при любых i и j), и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается далее через $J(\Gamma)$, каждая точка из него называется *внутренней вершиной (узлом)* графа Γ . Концы интервалов γ_i , не включенные в $J(\Gamma)$, называются *граничными* или *тупиковыми вершинами* Γ , их множество обозначается через $\partial\Gamma$. Объединение всех ребер обозначается через $R(\Gamma)$. Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup J(\Gamma)$.

На Γ индуцируется топология из $\mathbb{R}^n$. Всюду далее, при разговоре об открытых и замкнутых подмножествах Γ , будет иметься в виду именно эта топология.

Изложенные выше термины – граф (сеть), ребро, вершина (узел) – традиционны для алгебраической теории графов [8]–[11]. Ниже вводятся понятия, метрически дополняющие термины из [8]–[11]. Например – *подграф* или Γ -интервал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любое связное непустое открытое подмножество Γ называется *подграфом* Γ или Γ -интервалом.

Ребра графа Γ предполагаются занумерованными произвольно, их набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ вместе с $J(\Gamma)$ определяет Γ , их объединение мы договорились обозначать через $R(\Gamma)$. Чтобы выделить из $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ те ребра, которые примыкают к данной вершине a , мы вводим множество $\Gamma(a)$, обозначая так подграф (Γ -интервал), состоящий из a и точек примыкающих к a ребер. Тем самым высказывание “ γ_i примыкает к a ” адекватно записи $\gamma_i \subset \Gamma(a)$.

2.1.2. Функции на сети. Через $C[\Gamma]$ обозначается множество скалярнозначных функций, определенных и равномерно непрерывных на Γ . Последнее адекватно тому, что они допускают непрерывное доопределение на $\partial\Gamma$.

Говоря о непрерывности на $R(\Gamma)$ какой-либо функции, мы подразумеваем ее равномерную непрерывность на каждом ребре Γ . Множество таких функций обозначается далее через $C[R(\Gamma)]$. Во внутренних узлах Γ каждая из таких функций может иметь различные пределы вдоль различных ребер, примыкающих к этому узлу. Естественно считать, что $C[\Gamma] \subset C[R(\Gamma)]$.

Для заданной на $R(\Gamma)$ функции $z(x)$ ее сужение на ребро γ обозначается через $z_\gamma(x)$, а $z_i(x)$ означает $z_{\gamma_i}(x)$, т.е. сужение $z(x)$ на γ_i .

Заданная на Γ функция $z(x)$, лежащая в $C[R(\Gamma)]$, может иметь в точках $J(\Gamma)$ (т.е. во внутренних узлах) значения, никак не связанные с ее пределами вдоль примыкающих ребер. Поэтому для $a \in J(\Gamma)$ мы будем отличать обозначения $z(a)$ от $z_\gamma(a)$, где $z_\gamma(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a, x \in \gamma} z(x)$.

2.1.3. Дифференцирование на Γ . Дифференцирование $u(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ внутри каждого ребра γ осуществляется по натуральному параметру, причем предполагается, что для этого на ребре выбрана ориентация – одно из двух возможных направлений. При изменении ориентации знак u' меняется на противоположный. Знак второй производной u'' (или квазипроизводной $(pu')'$) уже не зависит от ориентации ребра. Множество функций из $C[R(\Gamma)]$, сужения которых на ребра Γ обладают равномерно непрерывными производными 1-го (2-го) порядка, будем обозначать через $C^1[R(\Gamma)]$ (соответственно через $C^2[R(\Gamma)]$).

С производными первого порядка нам придется иметь дело в основном в концах ребер. Не желая обременять себя оговорками о временной (на несколько фраз) локальной ориентации, введем понятие *крайней производной*. Так мы называем производную $u'(x)$ в точке $x = a$ – конце интервала $\gamma = (a, b)$ – при его параметризации “от a ”, т.е. *внутри* γ . Обозначать *крайнюю производную* мы будем через $\frac{du}{d\gamma}(a)$ или $u'_\gamma(a)$.

2.2. Уравнение на сети.

2.2.1. Банальный взгляд на задачу на сети. Всюду далее предполагается, что уравнения в системах (1) и (2.0₁) регулярны, т.е. что $q, m, f \in C[R(\Gamma)]$, $p \in C^1[R(\Gamma)]$.

Обычно уравнение (2.0) сопровождается дополнительными условиями в граничных вершинах: $u_\gamma(a) = 0$ ($a \in \partial\Gamma$, γ примыкает к a), или, более сжато,

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем мы будем вести речь только о непрерывных на Γ решениях. Это означает присутствие в каждой внутренней вершине условий непрерывности, т.е.

$$u_{\gamma_i}(a) = u_{\gamma_k}(a) \quad (\gamma_i, \gamma_k \subset \Gamma(a)). \quad (2.2)$$

В целом задача (2.0₁), (2.0₂), (2.1), (2.2) может пониматься как обычная краевая задача. В самом деле, равенства (2.0₁) на каждом ребре γ – обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Семейство решений на всех ребрах в целом зависит от $2m$ неизвестных параметров (здесь, как и всюду, m – число ребер Γ). Количество условий (2.1) равно $\sum_{a \in \partial\Gamma} \text{ind}(a)$, где $\text{ind}(a)$ – индекс вершины a , т.е. количество примыкающих к a ребер. Число условий (2.0₂) равно $|J(\Gamma)|$ (здесь и далее через $|X|$ обозначается число элементов в X). Кроме того, в каждой точке $a \in J(\Gamma)$ будет $(\text{ind}(a) - 1)$ штук условий (2.2), а всего этих последних условий будет $\sum_{a \in J(\Gamma)} (\text{ind}(a) - 1) = \sum_{a \in J(\Gamma)} \text{ind}(a) - |J(\Gamma)|$. Складывая количества условий трех типов, получаем сумму индексов всех вершин графа, которая, как известно, вдвое больше количества ребер, т.е. равна $2m$.

Таким образом, задача (2.0), (2.1) в классе непрерывных в целом на Γ и непрерывно дифференцируемых на каждом ребре функций поставлена вполне разумно.

Отличительной особенностью дальнейшего текста является отнесение к краевым лишь условий (2.1) и причисление условий (2.0₂) трансмиссии и условий (2.2) непрерывности к смыслу решения уравнения (2.0).

2.2.2. Обыкновенное дифференциальное уравнение на графе. Так мы будем именовать запись (2.0) с учетом расшифровки (2.0₁) и (2.0₂) в сочетании с предположением о непрерывности решений во внутренних узлах. Тем самым мы считаем

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} (pu')'(x), & x \in R(\Gamma), \\ \sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{d}{d\gamma} u(x), & x \in J(\Gamma). \end{cases} \quad (2.3)$$

Правомочно ли считать $(L_0 u) = \frac{d}{d\Gamma}(pu')$ в узлах из $J(\Gamma)$ аналогом обычной квази-производной $(pu')'$?

Во-первых, $\frac{d}{d\Gamma}(pu')$ имеет дивергентную природу. В самом деле, пусть u – достаточно гладкая на $R(\Gamma)$ функция, $\nabla u(x) = \text{grad } u(x)$ – задаваемое на $R(\Gamma)$ векторное поле. Воспользуемся гидродинамической интерпретацией и подсчитаем поток поля $p(\nabla u(x))$ через поверхность малой окрестности внутреннего узла $a \in J(\Gamma)$. Такая окрестность имеет вид “ ε -ежика” – пучка с узлом в точке a и достаточно малыми кусками $(a, a + \varepsilon_i)$ интервалов γ_i , примыкающих к a . Граница этой окрестности совпадает с набором точек $a + \varepsilon_i$ из $\gamma_i \subset \Gamma(a)$. В каждой такой точке проекция $\nabla u'(a + \varepsilon_i)$ на внешнюю к взятой окрестности нормаль совпадает с производной $u'(a + \varepsilon_i)$, вычисленной при ориентации γ_i в направлении “от a ”. Поэтому поток поля

$p(\nabla u')$ через рассматриваемую поверхность равен $\sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p(a + \varepsilon_i) u'(a + \varepsilon_i)$, что при стягивании этой окрестности к точке a (т.е. при $\varepsilon_i \downarrow 0$) стремится к $(L_0 u)(a)$ (если $\alpha_\gamma(a) = p_\gamma(a)$). Если при этом точке a приписать единичный объем, то оказывается, что $(L_0 u)(a) = \operatorname{div}(p \nabla u)(a)$.

Второе соображение – возможность взгляда на выражение $(L_0 u)(a)$ как на “слабую производную по Γ ” от (pu') в точке a .

Введем на Γ меру μ , полагая ее линейной (и единичной плотности) на каждом ребре γ_i и атомарной (сосредоточенной) в каждой из внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$, считая в них соответствующий дифференциал Стильеса $(d\mu)(a) = 1$.

Введем в рассмотрение достаточное множество Φ бесконечно дифференцируемых на $R(\Gamma)$ и непрерывных на Γ (т.е. в точках из $J(\Gamma)$) финитных функций с компактными относительно Γ носителями. Для любой функции $\varphi \in \Phi$, носитель которой U_φ содержит лишь одну внутреннюю вершину $a \in J(\Gamma)$, имеем (если pu' доопределить нулем в точке a)

$$\int_{\Gamma} (pu') \varphi' d\mu = - \int_{\Gamma} \frac{d}{d\Gamma} (pu') \varphi d\mu \quad (2.4)$$

(при $\alpha_\gamma(a) = p_\gamma(a)$). Поскольку любая $\varphi \in \Phi$ может быть представлена в виде конечной суммы функций, носитель каждой из которых содержит ровно одну внутреннюю вершину, то можно считать, что (2.4) выполняется при всех $\varphi \in \Phi$. А это означает, что функция $\frac{d}{d\Gamma} (pu')$ реализует слабую μ -производную от функции $(pu')(x)$, доопределяемой в $J(\Gamma)$ нулями. Таким образом, (2.0₁) и (2.0₂) могут считаться реализациями на Γ одного уравнения (2.0).

2.2.3. Сюрпризы ветвящегося аргумента. Уравнение (2.0) мы рассматриваем в классе непрерывных на Γ скалярнозначных функций, графики которых – паутинки “над Γ ”. Делая наглядным поведение решения на всем Γ , такой взгляд ставит вопрос о переносе на (2.0) методов теории ОДУ на отрезке, лежащих в основе всей теории Штурма. Однако при замене интервала на произвольный граф все основные факты теории ОДУ рушатся.

Все здесь не так!

На отличном от цепочки графе

(а) не имеет смысла интеграл с переменным верхним пределом, лишая надежды на описание функции Коши и на использование уравнений Вольтерра;

(б) даже при хороших коэффициентах нет гарантии нелокальной продолжимости решений на весь граф Γ ; пример: уравнение $-u'' = 1$ на окружности не имеет решений;

(в) размерность линейного многообразия решений совпадает, вообще говоря, с числом $|\partial\Gamma|$ крайних вершин; если оно больше двух, то задача Коши не имеет смысла и можно говорить лишь о задачах типа краевых;

(г) предыдущее обстоятельство делает бессмысленной попытку использования вронскианной техники – основы линейного анализа ОДУ;

(д) утрата традиционных методов сопровождается появлением новых для теории Штурма проблем: склейка решений во внутренних узлах означает присутствие сильных особенностей типа δ -функций в потенциале скалярного оператора Шрёдингера. Например, уже для системы п. 1.2, считая $m_1 \equiv m_2 \equiv 1$ и на третьем ребре массу отсутствующей, мы можем считать γ_1 и γ_2 расположенными на $(-1, 0)$ и на $(0, 1)$. Если для них использовать единое уравнение $-u'' = \lambda u$ на $(-1, 1)$ при $x \neq 0$, а при $x = 0$

условие трансмиссии дает $u'_2(+0) - u'_1(-0) = u'_3(0)$, то в силу $u''_3 = 0$ на γ_3 мы должны иметь $u_3(0) = u'_3(0)$, что в силу $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0)$ превращает условие трансмиссии в равенство $u'(+0) - u'(-0) = u(0)$. Поэтому пара $u_1(x), u_2(x)$ при единой параметризации $(-1, 1)$ слева направо оказывается обобщенным решением уравнения $-u'' + \delta(x)u = \lambda u$. Таким образом, уже для физически тривиальной ситуации вопрос об осцилляционных свойствах спектра приводит к аналогичной постановке для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Нечего говорить о том, что методы теории обобщенных функций, стандартные для таких особенностей, непригодны *в принципе* для анализа осцилляционных свойств;

(е) для любых двух точек $x_1, x_2 \in \Gamma$, не лежащих на одном ребре Γ , высказывание “между x_1 и x_2 ” лишено, вообще говоря, разумного смысла, очевидного в формулировках теорем Штурма о перемежаемости нулей разных решений. Подобные теоремы – корень всей теории Штурма.

2.3. Некоторые общие факты. На каждом ребре $\gamma \subseteq \Gamma$ наше уравнение (2.0) является объектом классической теории ОДУ. Склеивать общую картину из необходимых свойств мы поначалу будем с помощью стандартной теории краевых задач.

2.3.1. Невырожденность. Назовем *естественными* условия непрерывности на каждом $[\gamma]$ (замыкании γ) функций p', q, t и неотрицательности t и положительности инфимума p .

В естественных условиях уже банальный взгляд на исходную задачу с опорой на общую теорию краевых задач позволяет установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любой определенной на Γ функции $f \in C[R(\Gamma)]$ и любого набора чисел $\{\varphi(a) \mid a \in \partial\Gamma\}$ задача*

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = f, \quad u(a) = \varphi(a) \quad (a \in \partial\Gamma)$$

однозначно разрешима тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

В подобной ситуации исходную задачу мы будем называть *невырожденной*. В этом случае существует определенная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $G(x, s)$ такая, что для любой определенной на Γ функции $f \in C[R(\Gamma)]$ решение соответствующей полужоднородной задачи (2.0), (2.1) можно представить в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} G(x, a) f(a),$$

где интеграл по Γ означает сумму интегралов по всем ребрам. Правую часть последнего соотношения естественно называть оператором Грина.

2.3.2. Зависимость от параметра. Для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и примыкающего к ней ребра γ зададим начальные условия

$$u(a) = 0, \quad \frac{d}{d\gamma}u(a) = 1; \quad v(a) = 1, \quad \frac{d}{d\gamma}v(a) = 0.$$

Пусть $u_{\gamma}^{\lambda}(x), v_{\gamma}^{\lambda}(x)$ – решения этих задач для уравнения $-(pu')' + qu = \lambda tu$ на γ . Продолжим каждую из этих функций с γ на Γ тождественным нулем, сохранив при

этом обозначения. Ясно, что на Γ этот набор $\{u_\gamma^\lambda, v_\gamma^\lambda\}_\gamma$ линейно независим, содержа $2m$ функций (m – число ребер Γ). Перенумеруем эти функции единым образом в виде $z_1^\lambda(x), z_2^\lambda(x), \dots, z_{2m}^\lambda(x)$. Из классической теории следует, что каждая из них аналитична по λ на $R(\Gamma)$ (в норме $C^1[R(\Gamma)]$).

Перенумеровав также единым образом в виде $l_1(u), l_2(u), \dots, l_{2m}(u)$ все функционалы, определяющие дополнительные к уравнениям (2.0₁) условия (см. п. 2.2.1), рассмотрим определитель

$$\Delta_\Gamma(\lambda) = \det \|l_i(z_k^\lambda)\|_1^{2m}.$$

Эта функция, аналитичная по λ , определяет своими нулями спектр исходной задачи. Она поможет изучить нам и аналог решения Вейля.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u_\tau^\lambda(x)$ – решения уравнения $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda u$ при условиях $u_\tau(\tau) = 1$, $u_\tau(x) = 0$ ($x \neq \tau$, $x \in \partial\Gamma$) при каком-либо $\tau \in \partial\Gamma$. Тогда функция $\Delta_\Gamma(\lambda) \cdot u_\tau^\lambda(x)$ аналитична по λ в норме $C^1[R(\Gamma)]$.

Собственно аналогом решения Вейля будет не сама функция $u_\tau^\lambda(x)$, заданная при $x \in \Gamma$, а функция $\tilde{u}_\tau^\lambda(x)$, определяемая точно теми же условиями, но на графе “ $\Gamma + [\tau, \infty)$ ”, полученном из Γ наращиванием до полуоси примыкающего к τ тупикового ребра.

2.4. Эллиптичность однородного уравнения. Мы начинаем анализ однородного уравнения

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = 0 \quad (2.5)$$

в естественных условиях (см. п. 2.3.1).

Решения (2.5) будем искать лишь среди функций $u(x)$ из $C[\Gamma] \cap C^2[R(\Gamma)]$. Множество таких функций обозначается далее через $D^2[\Gamma]$.

2.4.1. Являясь промежуточным объектом между скалярным и многомерным уравнениями, (2.5) несет в себе заряд свойств эллиптического типа.

ТЕОРЕМА 2.3. Любое знакопостоянное решение $u(x)$ уравнения (2.5) либо тривиально ($\equiv 0$), либо не имеет нулей в Γ . В последнем случае равенство $u(a) = 0$ при $a \in \partial\Gamma$ влечет $u'(a) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \geq 0$ и Q – множество нулей $u(x)$ в Γ . Оно, очевидно, относительно замкнуто в Γ . Покажем, что оно и открыто в Γ , откуда будет следовать, что если Q не пусто, то $Q = \Gamma$ – этим и будет доказана первая часть теоремы.

Действительно, если $\tilde{x} \in Q$ есть внутренняя точка какого-то ребра γ_{i_0} , то $\tilde{x}$ есть точка минимума для $u_{i_0}(x)$ на γ_{i_0} , вследствие чего не только $u_{i_0}(\tilde{x}) = 0$, но и $u'_{i_0}(\tilde{x}) = 0$. Поэтому $u(x) \equiv 0$ на γ_{i_0} , т.е. $\gamma_{i_0} \subseteq Q$ и $\tilde{x}$ – внутренняя в Q . Если же $\tilde{x}$ совпадает с одной из внутренних вершин, то в силу неотрицательности (вследствие $u(x) \geq u(\tilde{x}) = 0$) всех $\frac{d}{d\gamma}u(\tilde{x})$ (для $\gamma \subset \Gamma(\tilde{x})$) должно быть $\frac{d}{d\gamma}u(\tilde{x}) = 0$ (для тех же γ), т.е. на каждом примыкающем к $\tilde{x}$ ребре γ функция $u(x)$ удовлетворяет нулевым начальным (в точке $x = \tilde{x}$) условиям и однородному линейному дифференциальному уравнению – и поэтому должна быть тождественным нулем. Значит, $u(x) \equiv 0$ на всех примыкающих к $\tilde{x}$ ребрах, и $\tilde{x}$ – опять же внутренняя точка для Q . Таким образом, Q открыто в Γ .

Если же $Q = \emptyset$, $u(a) = 0$ при $a \in \partial\Gamma$, то $u'(a) \neq 0$, так как иначе на примыкающем к a ребре $u(x) \equiv 0$, что противоречит $Q = \emptyset$. Теорема доказана.

2.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для функции $u \in C[\Gamma]$ под ее S -зоной будем понимать любой Γ -интервал $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, на котором u не имеет нулей и в граничных точках которого она обнуляется.

ТЕОРЕМА 2.4 (принцип сравнения). Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение (2.5) и Γ_0 – какая-либо из его S -зон. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (2.5) коллинеарно $u(x)$ на Γ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужая разговор на Γ_0 , можно считать, что $\Gamma_0 = \Gamma$, что $u(x) > 0$ на Γ и что $v(x) \geq 0$ на Γ . Если $v(x) \not\equiv 0$ на Γ , то в силу теоремы 2.3 $v(x) > 0$ на Γ , причем $v'(a) > 0$ во всех точках $a \in \partial\Gamma$, в которых $v(a) = 0$ (здесь и далее $z'(a)$ при $a \in \partial\Gamma$ означает крайнюю производную $\frac{dz}{d\gamma}(a)$ вдоль единственного ребра γ , примыкающего к a). А так как $u(a) = 0$ и $u'(a) > 0$ всюду на $\partial\Gamma$, то отношение $h(x) \equiv u(x)/v(x)$ может быть доопределено на $\partial\Gamma$ до непрерывной на $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ функции. Поэтому число $\lambda_0 = \sup_{\Gamma} h(x)$ конечно, причем, очевидно, $\lambda_0 > 0$. Предположим, что $h(x) \not\equiv \lambda_0$, и рассмотрим максимизирующую $h(x)$ последовательность $\{x_n\}$. Пусть $\tilde{x}$ – одна из ее предельных точек. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \lambda_0 v(x) - u(x).$$

Она неотрицательна в Γ , является решением уравнения (2.5) и, согласно теореме 2.3, не имеет нулей (т.е. положительна) в Γ . Поэтому включение $\tilde{x} \in \Gamma$ невозможно, так как иначе $z(\tilde{x}) = h(\tilde{x})v(\tilde{x}) - u(\tilde{x}) = 0$. Следовательно, $\tilde{x} \in \partial\Gamma$. Если $v(\tilde{x}) > 0$, то $\lambda_0 = \frac{u(\tilde{x})}{v(\tilde{x})} = 0$ (так как $u|_{\partial\Gamma} = 0$), что невозможно. Поэтому $v(\tilde{x}) = 0$, и, в силу теоремы 2.3, $v'(\tilde{x}) > 0$. Но тогда

$$\lambda_0 = \sup_{\Gamma} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(\tilde{x})}{v'(\tilde{x})}.$$

Отсюда следует, что $z'(\tilde{x}) = \lambda_0 v'(\tilde{x}) - u'(\tilde{x}) = 0$. Таким образом, для положительного решения z уравнения (2.5) мы имеем $z(\tilde{x}) = z'(\tilde{x}) = 0$, что противоречит теореме 2.3. Значит, $h(x) \equiv \lambda_0$. Теорема доказана.

2.4.3. Последние две теоремы позволят далее построить на сети теорию неосцилляций. Содержательность этих теорем можно пояснить и сейчас сравнением с соответствующими классическими (одномерными) аналогами.

СЛЕДСТВИЕ 1 (перемежаемость нулей). Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение (2.5) и Γ_0 – какая-либо его S -зона. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (2.5), неколлинеарное $u(x)$ в Γ_0 , меняет знак в Γ_0 и в $\partial\Gamma_0$ (а потому значения u/v на $\bar{\Gamma}_0$ заполняют плоскость $(-\infty, +\infty)$).

Скалярный аналог известен – между нулями одного решения любое другое, неколлинеарное ему, меняет знак.

Доказательство напрямую следует из теоремы 2.4: если v неколлинеарно u на Γ_0 , то v не может сохранять знак в Γ_0 . Если бы v сохраняло знак на $\partial\Gamma_0$, меняя его в Γ_0 , то внутри Γ_0 существовала бы S -зона v , на которой u было бы знакопостоянным, что тоже невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 2 (аналог принципа максимума). Если $u(x)$ – решение (2.5) без нулей в Γ , а v – решение того же уравнения, неколлинеарное с u , то отношение v/u не может иметь внутри Γ ни глобальных максимумов, ни глобальных минимумов.

Действительно, если λ_0 – экстремальное значение v/u , то функция $h = v - \lambda_0 u$ должна быть знакопостоянной на Γ , имея внутри нулевое значение, что влечет по теореме 2.3 $h \equiv 0$, т.е. коллинеарность v и u .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если u – решение (2.5) без нулей в Γ , а v – решение того же уравнения, то отношение v/u , не может иметь в Γ нетривиальных локальных экстремумов. (Точку экстремума функции мы называем нетривиальной, если в любой ее окрестности функция отлична от постоянной.)

Действительно, если λ_0 – значение локального экстремума v/u , достигаемое в точке x_0 , то функция $h = v - \lambda_0 u$ в некоторой окрестности точки x_0 знакопостоянна и равна 0 в точке x_0 , и, значит, по теореме 2.3, $h \equiv 0$ в этой окрестности, т.е. x_0 – точка тривиального экстремума v/u .

§ 3. Неосцилляция на пространственной сети

Свойство неосцилляции для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -(pu')' + qu = 0 \quad (3.1)$$

на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ означает, что всякое нетривиальное решение (3.1) имеет в $[a, b]$ не более одного нуля. В вариационном исчислении это свойство эквивалентно условию Якоби. В ОДУ свойство неосцилляции играет ключевую роль в теории дифференциальных неравенств вида $Lu \geq 0$, где оно в силу теоремы Валле-Пуссена эквивалентно наличию у такого неравенства строго положительного на $[a, b]$ решения. Последнее имеет самые разные приложения в теории краевых задач для уравнения (3.1). Разумеется, подобные свойства играют решающую роль и для краевых задач на пространственных сетях, где на каждой дуге сети задано уравнение вида (3.1), а в узлах, где дуги смыкаются, решения смежных уравнений удовлетворяют условиям смычки или, как говорят, условиям согласования или условиям трансмиссии.

3.1. Неосцилляция уравнения (3.1) на отрезке означает отсутствие у его нетривиальных решений даже двух различных нулей. Для непрерывной на сети Γ функции $u(x)$ аналог промежутка между соседними нулями – это S -зона u , т.е. такой подграф $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $u(x) \neq 0$ на Γ_0 и $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$.

3.1.1. Далее рассматривается оператор $Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu$ и порождаемое им уравнение

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = 0 \quad (3.2)$$

в предположениях п. 2.3.1: p' и q лежат в $C[R(\Gamma)]$, т.е. равномерно непрерывны на каждом ребре, причем инфимум $p(x)$ на Γ положителен. Решения (3.2) ищутся в пространстве $D^2[\Gamma] (= C[\Gamma] \cap C^2[R(\Gamma)])$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение (3.2) и порождающий его оператор $Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu$ называются *неосциллирующими на графе* Γ , если любое нетривиальное решение (3.2) не может иметь S -зоны в Γ (не допускается, в частности, чтобы Γ был S -зоной, когда $u(x) \neq 0$ в Γ и $u|_{\partial\Gamma} = 0$).

Если L не осциллирует на Γ , то задача

$$Lu = f, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (3.3)$$

невырождена. В самом деле, для нетривиального решения $u(x)$ задачи (3.3) (при $f \equiv 0$) любая компонента связности непустого множества из Γ , где $u(x) > 0$ или $u(x) < 0$, оказывается подграфом, в граничных точках которого $u(x) = 0$, что делает этот подграф S -зоной u .

3.1.2. Пусть задача (3.3) невырождена. Введем в рассмотрение для каждой граничной вершины $\tau \in \partial\Gamma$ задачу

$$Lu = 0, \quad u(\tau) = 1, \quad u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma, x \neq \tau), \quad (3.4)$$

обозначив ее решение через u_τ .

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\partial\Gamma \neq \emptyset$, то следующие свойства эквивалентны:

- (а) каждая из задач (3.4) имеет неотрицательное на Γ решение;
- (б) существует решение w уравнения (3.2), положительное на $\bar{\Gamma}$, т.е. такое, что $\inf_\Gamma w > 0$;
- (в) существует неотрицательное на Γ решение, ненулевое хотя бы в одной из точек $\partial\Gamma$;
- (г) уравнение (3.2) не осциллирует на Γ ;
- (д) существует функция $h(x)$ такая, что $\inf_\Gamma h > 0$ и при всех $u \in D^2[\Gamma]$

$$Lu \equiv -\frac{1}{h} \frac{d}{d\Gamma} \left(ph^2 \left(\frac{u}{h} \right)' \right); \quad (3.5)$$

последнее в силу (2.3) означает, что для любой $u \in D^2[\Gamma]$

$$(Lu)(x) = -\frac{1}{h(x)} (p(x)h^2(x)(u(x)/h(x))')' \quad (x \in R(\Gamma)),$$

$$(Lu)(x) = -\frac{1}{h(x)} \sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) h^2(x) \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{u}{h} \right)(x) \quad (x \in J(\Gamma)).$$

3.1.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии (а) по теореме 2.3 каждая из u_τ положительна на Γ . Поэтому их сумма по всем $\tau \in \partial\Gamma$ не имеет нулей не только в $\partial\Gamma$, но и в Γ . Значит, (а) $\Rightarrow$ (б). Импликация (б) $\Rightarrow$ (в) очевидна, а (в) $\Rightarrow$ (г) легко следует из теоремы 2.2. При условии (г) каждая $u_\tau(x)$ существует в силу невырожденности задачи (3.3) и не может иметь отрицательных S -зон, а потому и отрицательных значений. Поэтому из (г) следует (а). Представление (3.5) справедливо, если положить $h = w$, где w взято из (б). Поэтому (б) $\Rightarrow$ (д). Наоборот, если L можно представить в виде (3.5) при некоторой $h(x) \in D^2[\Gamma]$, равномерно положительной на Γ , то из (3.5) сразу следует, что $(Lh)(x) \equiv 0$. А это есть условие (б). Таким образом, (б) и (д) эквивалентны, чем и завершается доказательство теоремы.

3.1.4. Следствие 1. При $q \equiv 0$ уравнение (3.2) не осциллирует на Γ , если $\partial\Gamma \neq \emptyset$.

В этом случае решением (3.2) является функция $u(x) \equiv 1$, и значит, выполнено свойство (б) из теоремы 3.1.

Следствие 2 (краевые неравенства). Если L не осциллирует на Γ , то для любого нетривиального решения (3.2) из неотрицательности на $\partial\Gamma (\neq \emptyset)$ следует строгая положительность на Γ .

Действительно, по теореме 3.1 все u_τ неотрицательны, а значит (см. теорему 2.3), и положительны на Γ . В то же время, если u – решение (3.2), то, с учетом невырожденности задачи (3.3), $u(x) = \sum_{\tau \in \partial\Gamma} u(\tau)u_\tau(x)$, откуда и получаем требуемое.

Следствие 3. Пусть $w(x)$ – сильно положительное на $\bar{\Gamma}$ решение уравнения $Lu = 0$. Тогда $(u_\tau/w)'|_{x=\tau} \neq 0$, где u_τ – решение задачи (3.4).

Доказательство. В силу теоремы 3.1 уравнение (3.2) не осциллирует на Γ . Поэтому, применив следствие 2, получим, что функция $h(x) = w(x) - w(\tau)u_\tau(x)$ положительна на Γ . Последнее, с учетом $h(\tau) = 0$, влечет (см. теорему 2.3) $h'(\tau) \neq 0$, откуда и следует требуемое.

3.2. Дифференциальные неравенства. Решением дифференциального неравенства

$$(Lu)(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma) \quad (3.6)$$

мы называем решение уравнения $Lu = f$ при некоторой неотрицательной $f \in C[R(\Gamma)]$. Аналогично эллиптическим задачам ряд важных свойств уравнений переносится на дифференциальные неравенства.

3.2.1. Ослабляя требование о “неосцилляции L на Γ ”, скажем, что L “не осциллирует внутри Γ ”, если L не осциллирует на любом собственном (отличном от Γ) подграфе Γ_0 графа Γ . Другими словами, это свойство означает, что у всякого нетривиального решения уравнения $Lu = 0$ не может быть S -зон, отличных от Γ . Понятно, что неосцилляция “на Γ ” влечет неосцилляцию “внутри Γ ”.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть L не осциллирует внутри Γ . Пусть для $u \in D^2[\Gamma]$ ($u \neq 0$) справедливы неравенства

$$(Lu)(x) \geq 0, \quad u(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma). \quad (3.7)$$

Тогда $u(x) > 0$ в Γ . Если при этом $u(a) = 0$ для какой-либо $a \in \partial\Gamma$, то $u'_\gamma(a) \neq 0$ для всех ребер γ , примыкающих к a .

3.2.2. Доказательство. Предположим, что в условиях теоремы некоторое неотрицательное на Γ решение $u(x)$ ($\neq 0$) не всюду на Γ строго положительно. Тогда множество $\Omega = \{x \mid u(x) > 0\}$ не совпадает с Γ . Пусть Ω_0 – какая-либо компонента связности Ω . Так как Ω_0 – подграф Γ , не совпадающий с Γ , то в $\partial\Omega_0$ существует точка $\hat{x}$, не лежащая в $\partial\Gamma$, т.е. принадлежащая Γ . В ней, очевидно, $u(\hat{x}) = 0$.

Так как $\hat{x}$ оказывается точкой минимума u в Γ , то если $\hat{x}$ лежит внутри какого-либо ребра Γ , то $u'(\hat{x}) = 0$ (при любой по направлению ориентации окрестности $\hat{x}$). Если

же $\hat{x} \in J(\Gamma)$, то $\frac{du}{d\gamma}(\hat{x}) \geq 0$ для любого $\gamma \subset \Gamma(\hat{x})$. Поэтому $\frac{d}{d\Gamma}(pu')(\hat{x}) \geq 0$. А так как $u(\hat{x}) = 0$, то $(Lu)(\hat{x}) \equiv -\frac{d}{d\Gamma}(pu')(\hat{x}) + q(\hat{x})u(\hat{x}) \leq 0$. Но $(Lu)(x) \geq 0$ при всех x , что влечет $(Lu)(\hat{x}) = 0$, т.е. $\frac{d}{d\Gamma}(pu')(\hat{x}) = 0$, что в силу неотрицательности всех слагаемых в $\sum_{\gamma \subset \Gamma(\hat{x})} \alpha_\gamma(\hat{x}) \frac{d}{d\gamma} u(\hat{x}) \left(= \frac{d}{d\Gamma}(pu')(\hat{x}) \right)$ означает, что $\frac{d}{d\gamma} u(\hat{x}) = 0$ при всех $\gamma \subset \Gamma(\hat{x})$. Таким образом, для любого ребра γ_0 подграфа Ω_0 , примыкающего к $\hat{x} (\in \partial\Omega_0)$, верны равенства

$$\frac{d}{d\gamma_0} u(\hat{x}) = 0, \quad u_{\gamma_0}(\hat{x}) = 0. \quad (3.8)$$

Так как Ω_0 не совпадает с Γ , то L не осциллирует на Ω_0 и (согласно теореме 3.1) существует решение $w(x)$ уравнения $Lu = 0$, равномерно положительное на Ω_0 . Очевидно, $w(\hat{x}) > 0$. Зададим на γ_0 ориентацию в направлении “от $\hat{x}$ ” и воспользуемся представлением $Lu = -\frac{1}{w} \frac{d}{d\Gamma} \left(w^2 p \left(\frac{u}{w} \right) \right)'$. Неравенство $Lu \geq 0$ означает здесь, что для функции $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} w^2(x) p(x) \left(\frac{u_{\gamma_0}(x)}{w(x)} \right)'$ на γ_0 имеет место $\varphi'(x) \leq 0$, т.е. $\varphi(x)$ не возрастает на γ_0 . Согласно (3.8) должно быть $\varphi(\hat{x}) = 0$. Поэтому $\varphi(x) \leq 0$ на γ_0 . Но тогда и $\left(\frac{u_{\gamma_0}}{w} \right)(x)$ не возрастает на γ_0 , что в силу $u(\hat{x}) = 0$ означает $\frac{u_{\gamma_0}}{w} \leq 0$ на γ_0 , что противоречит неравенству $u(x) > 0$ на Ω_0 . Поэтому Ω_0 не может отличаться от Γ . Значит, $u > 0$ на Γ . Если при этом окажется, что $u(\hat{z}) = 0$ для некоторой $\hat{z} \in \partial\Gamma$ и $u'(\hat{z}) = 0$, то в окрестности $\hat{z}$ (на примыкающем к $\hat{z}$ ребре) справедливы предыдущие рассуждения, приводящие к противоречию с неравенством $Lu \geq 0$.

Теорема полностью доказана.

3.2.3. Являя собою точный аналог теоремы 2.3 для неравенства с неосциллирующим оператором, предыдущее утверждение допускает эффективное уточнение: свойство $u(x) \geq 0$ достаточно проверить лишь на границе $\partial\Gamma$, о чем и говорит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть L не осциллирует внутри Γ . Тогда любое нетривиальное решение $u(x)$ неравенства $Lu \geq 0$, неотрицательное на $\partial\Gamma$, т.е. такое, что $u|_{\partial\Gamma} \geq 0$, строго положительно внутри Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что $u(x)$ неотрицательно в Γ . Предполагая противное, рассмотрим какую-либо его отрицательную S -зону Γ_0 . Положим $\lambda_0 = \inf_{\Gamma_0} \varphi$, где $\varphi = u/w$ и w — строго положительное на Γ_0 решение уравнения $Lu = 0$. Очевидно, $\lambda_0 < 0$ и $\lambda_0 = \varphi(\tilde{x})$ при некотором $\tilde{x} \in \Gamma_0$. Поэтому функция $h = u - \lambda_0 w$ удовлетворяет на Γ_0 неравенству $Lh \geq 0$, неотрицательна (и нетривиальна) на Γ_0 и имеет нулевое значение в Γ_0 , что противоречит теореме 3.2. Поэтому $u(x) \geq 0$ на Γ . Но теперь мы для $u(x)$ оказываемся в условиях теоремы 3.2, что и завершает доказательство.

3.2.4. СЛЕДСТВИЕ 1. Если L не осциллирует внутри Γ , то для любых двух решений v и w неравенства (3.6) при условиях $u|_{\partial\Gamma} = 0$ существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что $\alpha v(x) \leq w(x) \leq \beta v(x)$ на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.3 обе функции v и w строго положительны в Γ , имея (см. теорему 3.2) ненулевые производные в $\partial\Gamma$. Поэтому отношение w/v допускает доопределение до непрерывной и положительной на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ функции, откуда и следует требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 2 (обобщенная выпуклость). Пусть L не осциллирует внутри Γ . Пусть $u(x)$ – произвольное решение неравенства $Lu \geq 0$. Тогда для любого подграфа Γ_0 графа Γ либо $u(x) = h(x)$ ($x \in \Gamma_0$), либо $u(x) > h(x)$ ($x \in \Gamma_0$), где h – решение задачи

$$Lh = 0, \quad (h - u)|_{\partial\Gamma_0} = 0. \quad (3.9)$$

В самом деле, функция $(u - h)$ оказывается в условиях теоремы 3.3.

Условие (3.9) в скалярном случае $Lu = -u''$ на отрезке определяет обычную секунду ($h'' = 0$), проходящую через точки $u(\xi_1)$, $u(\xi_2)$ при $(\xi_1, \xi_2) = \Gamma_0$, так что описанное свойство адекватно строгой выпуклости вверх скалярной функции. Это свойство является достаточно глубоким обобщением обычной выпуклости уже для скалярного оператора $Lu \stackrel{\text{def}}{=} -(pu')' + qu$ при $q \geq 0$.

3.3. Критическая неосцилляция. В этом пункте мы продолжаем анализ неравенства $Lu \geq 0$. Нам потребуется выделить из свойства неосцилляции внутри Γ более тонкого свойства критической неосцилляции в Γ .

3.3.1. В случае скалярного уравнения $Lu = 0$ на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ неосцилляция на $[a, b]$ означает отсутствие у любого нетривиального решения двух различных нулей в $[a, b]$. Таким образом, если $\xi_1 < \xi_2$ – два различных соседних нуля решения $u(x) \not\equiv 0$ уравнения $Lu = 0$, то свойства неосцилляции на $[\xi_1, \xi_2]$ наверняка нет, а свойство неосцилляции внутри $\Gamma_0 = (\xi_1, \xi_2)$ наверняка есть, как и неосцилляция на любом подынтервале $(\eta_1, \eta_2) \subset (\xi_1, \xi_2)$. Выделяя критичность свойства неосцилляции внутри S -зоны относительно неосцилляции на любом ее собственном подграфе, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение $Lu = 0$ (и оператор L) назовем критически неосциллирующим на Γ , если оно не осциллирует на любом отличном от Γ подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$, осциллируя на Γ .

Согласно теореме 3.1 ((в) $\Rightarrow$ (г)) уравнение $Lu = 0$ критически не осциллирует на Γ , если Γ есть S -зона одного из его решений.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть L критически не осциллирует на Γ . Тогда любое решение неравенств

$$Lu \geq 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geq 0 \quad (3.10)$$

превращает их в равенства, т.е. оказывается решением задачи

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (3.11)$$

3.3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию Γ является S -зоной некоторого решения $v(x)$ (> 0) уравнения $Lu = 0$, т.е. решения задачи (3.11). Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение (3.10). В силу теоремы 3.3 $u(x) > 0$ на Γ . Рассмотрим функцию $\varphi = u/v$. Пусть $\lambda_0 = \inf_{\Gamma} \varphi$ достигается в точке $x_0 \in \Gamma$. Тогда функция $h = u - \lambda_0 v$ в силу теоремы 3.3 есть тождественный нуль, что влечет утверждение теоремы. Пусть теперь $\lambda_0 = \inf_{\Gamma} \varphi$ достигается в одной из граничных точек $a \in \partial\Gamma$. Так как $\lambda_0 \geq 0$ и, очевидно, $\lambda_0 < +\infty$, то из равенства $v(a) = 0$ следует, что $u(a) = 0$. Но тогда $\lambda_0 = u'(a)/v'(a)$ и неотрицательная на Γ функция $h = u - \lambda_0 v$, удовлетворяя неравенству $Lh \geq 0$ на Γ , имеет в точке $x = a$ нулевое значение и нулевую производную, что в силу теоремы 3.2 влечет $h \equiv 0$. Теорема доказана.

3.3.3. Доказанное свойство может вызвать удивление даже в скалярном случае: если $u(x)$ – решение неравенства

$$u''(x) + u(x) \leq 0 \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

неотрицательное в точках $x = 0$ и $x = \pi$, то $u(x) \equiv C \sin x$ при некотором $C = \text{const}$.

3.3.4. СЛЕДСТВИЕ (аналог теоремы сравнения Штурма). Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения, соответственно, уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu &= 0, \\ \frac{d}{d\Gamma}(pv') + Qv &= 0, \end{aligned}$$

в которых $Q \geq q$ на Γ . Пусть Γ_0 – S -зона функции $u(x)$. Тогда функция $v(x)$ на Γ_0 либо коллинеарна $u(x)$ (что возможно только при $Q \equiv q$ на Γ_0), либо меняет знак.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, будем считать $v(x) \geq 0$ на Γ_0 . Тогда функция $h = v - u$ будет удовлетворять на Γ_0 равенству $-\frac{d}{d\Gamma}(ph') - qh = (Q - q)v$, т.е. неравенству $Lh \geq 0$, удовлетворяя на Γ_0 условиям теоремы 3.4. Значит, $Lh \equiv 0$ (и $Q - q \equiv 0$), и остается применить следствие 1 из п. 2.4.3.

Классическую теорему Штурма мы получаем, заменяя слова “на S -зоне” на адекватное для $\Gamma \subset \mathbb{R}$ выражение “между соседними нулями”.

3.3.5. СЛЕДСТВИЕ. Если L критически не осциллирует на Γ , то пространство решений задачи (3.11) одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальное решение задачи (3.11) не может иметь нулей в Γ , так как иначе одна из компонент связности множества ненулевых точек этого решения будет его S -зоной, отличной от Γ , что противоречит критической неосцилляции L на Γ . Значит, для любых двух нетривиальных решений задачи (3.11) Γ будет S -зоной, и, применяя предыдущее следствие, получим требуемое.

3.3.6. СЛЕДСТВИЕ (критерий неосцилляции). Для неосцилляции L на Γ необходимо и достаточно существование строго положительного на $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ решения неравенства $Lu \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость тривиально следует из теоремы 3.1 ((г) $\Rightarrow$ (б)). Пусть теперь $u(x)$ – строго положительное на $\bar{\Gamma}$ решение неравенства $Lu \geq 0$. Если v – какое-либо решение уравнения $Lu = 0$ и Γ_0 – его S -зона, то на Γ_0 мы оказываемся в условиях теоремы 3.4, и, следовательно, должно быть $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$, что противоречит предположению $u(x) > 0$ на $\bar{\Gamma}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенный результат есть точный аналог теоремы Валле-Пуссена для скалярного уравнения второго порядка на отрезке из $\mathbb{R}$. Если взять $u(x) \equiv 1$, то получим вариант достаточного условия неосцилляции – неравенство $q(x) \geq 0$.

§ 4. Корневая простота

4.1. Неосцилляция пучка $L - \lambda mI$. Изложенные выше результаты п. 3.3 уже сейчас позволяют исследовать знакорегулярные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля на графе Γ

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda mu, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (4.1)$$

Предполагая уравнение $Lu = 0$ неосциллирующим на Γ , мы будем связывать эти свойства со свойствами решений пучка уравнений

$$L_\lambda u \stackrel{\text{def}}{=} Lu - \lambda mu = -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + (q - \lambda m)u = 0 \quad (4.2)$$

или пучка операторов $(L - \lambda mI)$. Напомним, что ограничений на знак q мы выше не накладывали. Далее предполагается, что $m(x) \geq 0$ ($\neq 0$) на Γ и $m \in C[R(\Gamma)]$.

4.1.1. Полученные выше осцилляционные факты позволяют сравнивать собственные функции $u_\lambda(x)$ и $u_\mu(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ и $\mu > \lambda$: нули u_λ и u_μ перемежаются в том смысле, что в любой S -зоне u_λ заведомо u_μ меняет знак (теорема сравнения, п. 3.3.4). Однако пока мы имеем лишь основу для более глубокого анализа.

ТЕОРЕМА 4.1. *Множество M вещественных λ , при которых уравнение (4.2) не осциллирует на Γ , ограничено сверху и не пересекается со спектром Λ задачи (4.1). При этом*

- (а) точка $\lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup M$ принадлежит Λ ;
- (б) $M = (-\infty, \lambda_0)$.

4.1.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пустота пересечения $M \cap \Lambda$ очевидна. Предположение о неограниченности M сверху означает, что при сколь угодно больших значениях λ уравнение (4.2) не осциллирует на отрезке строгой положительности m ; а это противоречит классической теореме сравнения Штурма на этом отрезке. Из теоремы сравнения (см. п. 3.3.4) следует, что если $\lambda \in M$, то $(-\infty, \lambda) \subset M$, т.е. M связно. Покажем, что $\lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup M$ не принадлежит M .

Обозначим через $w(x, \lambda)$ сумму по всем $s \in \partial\Gamma$ решений $u_s(x, \lambda)$ задачи

$$L_\lambda u = 0, \quad u(s) = 1, \quad u(b) = 0 \quad (b \in \partial\Gamma \setminus \{s\}). \quad (4.3)$$

Согласно теореме 2.2 каждая из функций $u_s(x, \lambda)$ мероморфна по λ , а ее полюсы содержатся в Λ . При каждом $\lambda \in M$ функция $w(x, \lambda)$ строго положительна не только на Γ , но и на $\partial\Gamma$. Если $\lambda_0 \in M$, то функция $w(x, \lambda_0 + \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ строго положительна на компакте $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Но тогда в силу теоремы 3.1 в M входят и значения $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ при таких ε , что противоречит определению λ_0 . Этим доказано в силу связности M свойство (б).

Покажем теперь, что $\lambda_0 = \sup M$ принадлежит спектру Λ . Если бы $\lambda_0 \notin \Lambda$, то при стремлении $\lambda \rightarrow \lambda_0$ при $\lambda < \lambda_0$ функция $w(x, \lambda)$ имела бы в пределе $w(x, \lambda_0) \geq 0$ на Γ и сохраняла бы значения $w(b, \lambda_0) = 1$ во всех граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$. Наличие у уравнения (4.2) при $\lambda = \lambda_0$ неотрицательного решения без нулей в $\partial\Gamma$ означает неосцилляцию (4.2) (теорема 3.1, (в) $\Rightarrow$ (г)), т.е. включение $\lambda_0 \in M$, что противоречит доказанному выше. Таким образом, $\lambda_0 = \sup M$ есть вещественное собственное значение задачи (4.1).

4.1.3. Предыдущие свойства дополняет

ТЕОРЕМА 4.2. *Отвечающая λ_0 собственная функция задачи (4.1) не имеет нулей в Γ . Алгебраическая кратность λ_0 равна 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем какую-либо вершину $b_0 \in \partial\Gamma$. Обозначим соответствующее ей при $s = b_0$ решение задачи (4.3) через $u_0(x, \lambda)$. Пусть μ_k – некоторая сходящаяся к λ_0 последовательность, причем $\mu_k < \lambda_0$. Соответствующая ей последовательность $u_k(x) = u_0(x, \mu_k)$ не ограничена (так как λ_0 – полюс). Нормируем ее с помощью нормы $C[\Gamma]$. Функции $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ удовлетворяют уравнению (4.2) при $\lambda = \mu_k$, и $v_k(a) = 0$ при всех $a \in \partial\Gamma$, отличных от выбранной выше вершины b_0 . В самой этой вершине $v_k(b_0) = \frac{u_k(b_0)}{\|u_k\|} = \frac{1}{\|u_k\|}$, т.е. $v_k(b_0) \rightarrow 0$. Если подставить $v_k(x)$ в (4.2) (при $\lambda = \mu_k$), то из ограниченности $\|v_k\|$ можно сделать вывод об относительной компактности последовательности $\{v_k\}$ в $C^1[R(\Gamma)]$. Пусть $v_0(x)$ – ее предельная точка. Можно считать, что $v_k \rightarrow v_0$ в $C^1[R(\Gamma)]$. Из интегральной обратимости оператора L следует его естественная замкнутость, что позволяет считать предельную функцию $v_0(x)$ решением задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_0$. Неотрицательность $v_0(x)$ и отличие от тождественного нуля следует из неравенств $v_k(x) > 0$ на Γ и $\|v_k\| = 1$ при всех k . Последнее свойство v_0 в силу теоремы 2.1 означает $v_0(x) > 0$ на Γ . Отсюда, в свою очередь, следует, что соответствующее λ_0 инвариантное пространство имеет единичную размерность (см. п. 3.3.5). Если бы v_0 имела присоединенный элемент, то он был бы нетривиальным решением уравнения

$$Lu - \lambda_0 tu = tv_0$$

при условиях $u|_{\partial\Gamma} = 0$. Но это невозможно, так как $tv_0 \geq 0$ (и $\neq 0$) и $(L - \lambda_0 t)$ критически не осциллирует на Γ (см. теорему 3.4).

4.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если L не осциллирует на Γ , то все комплексные точки $\lambda \in \Lambda$ удовлетворяют неравенству $|\lambda| > \lambda_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Остается рассмотреть невещественные точки спектра Λ . Пусть $\lambda = |\lambda|(\alpha + i\beta)$ — одна из таких точек, причем α и β вещественны и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Из вещественности коэффициентов исходного уравнения следует, что для λ существует пара вещественных функций $u(x), v(x)$ (из $D^2(\Gamma)$) с нулями на $\partial\Gamma$ и таких, что

$$Lu = |\lambda|m(\alpha u - \beta v), \quad Lv = |\lambda|m(\beta u + \alpha v).$$

Последнее означает, что в линейной оболочке E_2 элементов u и v оператор $\frac{1}{|\lambda|m}L$ (при положительной m) осуществляет поворот. Без ограничения общности можно предполагать, что как u , так и v принимают положительное значение хотя бы в одной точке.

Пусть $u_0(x)$ — соответствующая λ_0 положительная собственная функция задачи (4.1). Рассмотрим на E_2 множество функций вида $\nu u + \mu v$ таких, что

$$u_0 \geq \nu u + \mu v,$$

и максимизируем на нем $\nu^2 + \mu^2$, полагая $\sup(\nu^2 + \mu^2) = T_0$. Пусть ν_0 и μ_0 — соответствующая максимизирующая пара, т.е. $\nu_0^2 + \mu_0^2 = T_0$ и $\nu_0 u(x) + \mu_0 v(x) \leq u_0(x)$ на Γ . Для неотрицательной функции

$$f = (u_0 - \nu_0 u - \mu_0 v)m$$

решение $z(x)$ задачи $Lz = f, z|_{\partial\Gamma} = 0$ должно удовлетворять согласно следствию 1 из п. 3.2.4 при некотором $\varepsilon \in (0, 1/\lambda_0)$ неравенству $z(x) \geq \varepsilon u_0(x)$ на Γ . Но тогда из равенств

$$mu_0 = \frac{1}{\lambda_0}Lu_0, \quad mu = \frac{1}{|\lambda|}L(\alpha u + \beta v), \quad mv = \frac{1}{|\lambda|}L(\alpha v - \beta u)$$

должно следовать, что $Lz = f = L\left(\frac{u_0}{\lambda_0} - \frac{\nu_0}{|\lambda|}(\alpha u + \beta v) - \frac{\mu_0}{|\lambda|}(\alpha v - \beta u)\right)$, что ввиду неосцилляции L дает $z = \frac{u_0}{\lambda_0} - \frac{\nu_0}{|\lambda|}(\alpha u + \beta v) - \frac{\mu_0}{|\lambda|}(\alpha v - \beta u)$. Таким образом,

$$\varepsilon u_0 \leq \frac{1}{\lambda_0}u_0 - \frac{\nu_0}{|\lambda|}(\alpha u + \beta v) - \frac{\mu_0}{|\lambda|}(\alpha v - \beta u),$$

откуда $|\lambda|(1/\lambda_0 - \varepsilon)u_0 \geq (\nu_0\alpha - \mu_0\beta)u + (\nu_0\beta + \mu_0\alpha)v$. Но тогда

$$u_0 \geq \frac{\lambda_0/|\lambda|}{1 - \varepsilon\lambda_0}[(\nu_0\alpha - \mu_0\beta)u + (\nu_0\beta + \mu_0\alpha)v],$$

откуда по определению числа T_0 должно следовать

$$T_0 \geq \left(\frac{\lambda_0}{|\lambda|(1 - \varepsilon\lambda_0)}\right)^2 [(\nu_0\alpha - \mu_0\beta)^2 + (\nu_0\beta + \mu_0\alpha)^2] = \left(\frac{\lambda_0}{|\lambda|(1 - \varepsilon\lambda_0)}\right)^2 (\nu_0^2 + \mu_0^2),$$

т.е. $T_0 \geq \left(\frac{\lambda_0}{|\lambda|(1 - \varepsilon\lambda_0)}\right)^2 T_0$, что ввиду $\varepsilon \in (0, 1/\lambda_0)$ влечет $|\lambda| > \lambda_0$. Следствие доказано.

4.1.5. СЛЕДСТВИЕ. Любое нетривиальное решение неравенства $Lu \leq \lambda_0 tu$ (или $Lu \geq \lambda_0 tu$) при условиях $u|_{\partial\Gamma} = 0$ пропорционально $u_0(x)$.

Очевидно ввиду теоремы 3.4.

Итак, ведущее собственное значение задачи (4.1) на произвольном графе обладает всеми ключевыми свойствами, присущими аналогичной задаче на отрезке. С остальными точками спектра дело обстоит значительно сложнее – об этом свидетельствуют самые разные примеры.

4.2. Простые задачи. Мы по-прежнему интересуемся вопросом о том, при каких условиях вещественные точки спектра задачи (4.1) имеют единичную алгебраическую кратность (являются простыми), т.е. соответствующие корневые пространства одномерны. В этих целях мы используем развитую в §3 теорию, усиливая теорему 3.4.

4.2.1. Интересующий нас вопрос будем изучать в форме вопроса о размерности пространства всех решений задачи

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (4.4)$$

Обозначая это пространство через $E(L)$, мы ищем в итоге условия, обеспечивающие равенство

$$\dim E(L) = 1, \quad (4.5)$$

которое означает геометрическую простоту соответствующей точки спектра. Нас будет интересовать также и вопрос об алгебраической простоте, означающей при условии (4.5) отсутствие решений у задачи

$$Lz = tu, \quad z|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (4.6)$$

в которой $u(x)$ – нетривиальное решение (4.4). От знаковых ограничений на коэффициент q оператора $Lu \equiv -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu$ мы пока отказываемся, так как вместо L в (4.4) мы допускаем $L_\lambda = (L - \lambda tI)$; в частности, мы не исключаем далее и осцилляцию L на Γ .

4.2.2. Необходимое условие равенства (4.5) дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.3. Если $\dim E(L) \geq 2$, то для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ и любого примыкающего к a ребра существует нетривиальное решение $w(x)$ задачи (4.4), равное тождественному нулю на этом ребре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти очевидно. Пусть a – какая-то вершина из $\partial\Gamma$ и γ – примыкающее к ней ребро. Пусть $u(x), v(x)$ – линейно независимые нетривиальные решения (4.4), ненулевые на γ . Каждое из них должно иметь в точке $x = a$ ненулевую производную (иначе, имея нулевые начальные данные в точке $x = a$, оно должно быть тождественным нулем на γ). Функция $w(x) = u'(a)v(x) - v'(a)u(x)$ в точке $x = a$ удовлетворяет равенствам $w(a) = w'(a) = 0$ (напомним: если $a \in \partial\Gamma$, то $z'(a)$ – крайняя производная), и потому $w(x) \equiv 0$ на γ .

Здесь сыграло роль то обстоятельство, что на каждом ребре уравнение $Lu = 0$ является по сути обычным однородным уравнением на отрезке.

4.2.3. СЛЕДСТВИЕ. Если задача (4.4) вырождена, причем каждое ее нетривиальное решение имеет в Γ только изолированные нули, то справедливо (4.5).

Полученное условие вполне рельефно, однако малоэффективно ввиду необходимости анализировать структуру множества нулей у “каждого решения”. Гипотеза о возможности замены оговорки о “каждом решении” на, скажем, “некоторое решение” опровергается примером п. 1.2. Сказанное означает необходимость учитывать связь между структурой множества нулей функций из $E(L)$ и структурой графа.

4.2.4. Точку $x \in \Gamma$ назовем *простой*, если $\Gamma \setminus \{x\}$ состоит из двух компонент связности. Если Γ есть *дерево*, т.е. не содержит циклов (подмножеств, гомеоморфных окружности), то простыми оказываются все точки ребер. А также “фиктивные узлы” – вершины из $J(\Gamma)$, к которым примыкают лишь по два ребра. Наличие таких фиктивных вершин не влияет на существо излагаемых далее методов и результатов, усложняя без нужды разговор. Поэтому мы позволим себе в дальнейшем считать, что любая из внутренних вершин ($a \in J(\Gamma)$) имеет $\text{ind } a \geq 3$, т.е. имеет не менее трех примыкающих к ней ребер. Поэтому в общем случае простые точки – это точки $\Gamma \setminus J(\Gamma)$, не лежащие в циклах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем задачу (4.4) *простой*, если у некоторого ее нетривиального решения все нули в Γ являются простыми точками.

4.2.5. ТЕОРЕМА 4.4. Если задача (4.4) простая, то верно (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_0(x)$ – какая-либо функция из $E(L)$, имеющая в Γ лишь простые нули. Число нулей у $v_0(x)$ конечно, так как в противном случае $v_0(x) \equiv 0$ на некотором ребре с одним из концов в $Y(\Gamma)$.

Дальнейшие рассуждения мы проведем индукцией по числу S -зон функции $v_0(x)$. Если v_0 имеет только одну S -зону, то требуемое вытекает из следствия п. 3.3.5. Пусть теперь теорема верна для любой простой задачи в случае, когда некоторое ее решение имеет нули только в простых точках, имея в Γ число S -зон, не превосходящее k . Пусть для некоторой простой задачи имеется функция $v_0(x) \in E(L)$ с числом S -зон $(k+1)$ и только с простыми нулями. Обозначим через $\{\Gamma_i\}_1^{k+1}$ совокупность этих S -зон. Назовем S -зоны Γ_i, Γ_j смежными, если $\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j \neq \emptyset$. Каждая нулевая точка v_0 , будучи простой в Γ , является граничной точкой (индекса 1) для двух (и только двух) смежных S -зон. И наоборот, если Γ_i и Γ_j смежны, то $|\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j| = 1$ и единственная точка $\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$ (к которой и Γ_i , и Γ_j примыкают ровно одним ребром) является простым нулем v_0 . Поэтому отношение смежности на множестве $\{\Gamma_i\}_1^{k+1}$ позволяет рассматривать эти S -зоны как вершины дискретного (алгебраического) графа, ребра которого определяются указанным отношением смежности и могут считаться реализованными в виде простых нулей v_0 . Этот “надграф” – назовем его S -графом – является деревом. В самом деле, наличие цикла $(\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \dots, \Gamma_{i_\alpha}, \Gamma_{i_1})$ в S -графе повлекло бы существование цикла графа Γ , содержащегося в $\bigcup_{j=1}^{\alpha} \Gamma_{i_j}$ и содержащего в себе простой нуль v_0 (например, определяющий смежность Γ_{i_1} и Γ_{i_2}), а это невозможно.

Итак, построенный S -граф из S -зон является деревом, а потому имеет хотя бы один крайний элемент. Обозначим его через Γ_{i_0} . К Γ_{i_0} может примыкать только один элемент S -графа. Обозначим его через Γ_{j_0} . Обозначим через b общую точку для $\partial\Gamma_{i_0}$ и $\partial\Gamma_{j_0}$ (такая точка единственна).

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из $E(L)$. Так как, кроме b , в $\partial\Gamma_{i_0}$ входят лишь точки из $\partial\Gamma$, то $u(x) = 0$ при всех $x \in \partial\Gamma_{i_0}$, $x \neq b$. Отсюда в силу следствия 1 из п. 2.4.3 следует, что $u(x) \equiv Cv_0(x)$ на Γ_{i_0} (так как u не меняет знак в $\partial\Gamma_{i_0}$). Но тогда функция $\omega = u - Cv$ тождественно равна нулю не только на Γ_{i_0} , но, заодно, и на единственном ребре Γ_{j_0} , примыкающем к b , т.е. $\omega(x)$ имеет в Γ_{j_0} , а значит – и в $\Gamma \setminus (\Gamma_{i_0} \cup \{b\})$, неизолированные нули. А на графе $\Gamma \setminus (\Gamma_{i_0} \cup \{b\})$ в силу предположения индукции $\omega \equiv C_1 v_0$, что ввиду конечности числа нулей v_0 и бесконечности числа нулей (в $\Gamma \setminus (\Gamma_{i_0} \cup \{b\})$) функции ω возможно, лишь если $\omega(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus (\Gamma_{i_0} \cup \{b\})$, т.е. $u(x) \equiv Cv_0(x)$ на Γ . Теорема доказана.

4.2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Условие *простоты* задачи допускает по сути своей проверку редукцией к менее сложным задачам. Например, если Γ – пучок, т.е. внутренняя вершина у Γ единственна, то простота исходной задачи гарантируется невырожденностью аналогичных (двухточечных) задач на каждом ребре (если, конечно, исходная задача на Γ вырождена).

4.2.7. Рассуждения, проведенные выше, сохраняют силу и в более общей ситуации “краевых неравенств” (развивая теорему 3.4).

Пусть задача (4.4) простая и $v_0(x)$ – какое-нибудь ее нетривиальное решение. Пусть $s_0 \in \partial\Gamma$, а γ – примыкающее к s_0 ребро. И пусть $u(x)$ – нетривиальное решение неравенств

$$v_0(x)Lu \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad \frac{dv_0}{d\gamma}(s_0)u(s_0) \geq 0, \quad (4.7)$$

причем $u(x) = 0$ во всех точках из $\partial\Gamma$, кроме, может быть, s_0 .

ТЕОРЕМА 4.5. В перечисленных условиях $u(x) \in E(L)$, т.е. $u(x)$ обращает оба неравенства в (4.7) в равенства; при этом в каждой граничной вершине Γ все крайние производные функции $u(x)$ отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует рассуждениям из доказательства предыдущей теоремы и проводится индукцией по числу S -зон функции $v_0(x)$. В случае одной S -зоны – в силу теоремы 3.4. В условиях перехода от k к $k + 1$ (по числу S -зон) выберем произвольно $x_0 \in \Gamma$, являющуюся простым нулем v_0 . Обозначим через Γ_1 и Γ_2 компоненты связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$. Пусть γ' и γ'' – ребра, соответственно Γ_1 и Γ_2 , примыкающие к x_0 . Тогда верно хотя бы одно из неравенств: $\frac{d}{d\gamma'}v_0(x_0)u(x_0) \geq 0$ или $\frac{d}{d\gamma''}v_0(x_0)u(x_0) \geq 0$. Поэтому хотя бы на одном из подграфов (можно считать, что на Γ_1) утверждение доказываемой теоремы верно (в силу предположения индукции). Но тогда $Lu \equiv 0$ на Γ_1 и $u|_{\partial\Gamma_1} = 0$, откуда, во-первых, в силу теоремы 4.4 следует $u \equiv C_1 v$ на Γ_1 , во-вторых, $u(x_0) = 0$. Последнее влечет, в частности, что сужение u на Γ_2 тоже удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, и, значит (опять-таки в силу предположения индукции), $Lu \equiv 0$ и на Γ_2 и $u|_{\partial\Gamma_2} = 0$. По теореме 4.4 получаем отсюда $u \equiv C_2 v_0$ на Γ_2 . Но тогда, независимо от того, является x_0 вершиной Γ или нет,

$$\begin{aligned} C_1 &= \lim_{\gamma' \ni x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v_0(x)} = \frac{d}{d\gamma'}u(x_0) \Big/ \frac{d}{d\gamma'}v_0(x_0) \\ &= \frac{d}{d\gamma''}u(x_0) \Big/ \frac{d}{d\gamma''}v_0(x_0) = \lim_{\gamma'' \ni x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v_0(x)} = C_2 \end{aligned}$$

и, значит, $u \equiv C_1 v$ на всем Γ . Этим теорема и доказана.

4.2.8. Следующее обобщение только что доказанной теоремы нам понадобится при анализе распределения нулей собственных функций.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть v_0 – нетривиальное решение задачи (4.4) без нулей в циклах Γ . Пусть $u(x)$ – решение неравенств

$$v_0 Lu \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad \frac{dv_0}{d\gamma}(x)u(x) \geq 0 \quad (x \in \partial\Gamma, [\gamma] \ni x).$$

Тогда на любой S -зоне $v_0(x)$ функция $u(x)$ коллинеарна $v_0(x)$, причем если какие-то две S -зоны $v_0(x)$ имеют общую граничную вершину x_0 и x_0 не является граничной вершиной для других S -зон $v_0(x)$, то коэффициенты коллинеарности на этих двух S -зонах совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически дублирует предыдущее после перехода к графу $\Gamma \setminus Z$, где Z – множество тривиальных нулей v_0 (нуль функции мы называем *тривиальным*, если в некоторой его окрестности эта функция тождественно равна нулю).

4.2.9. Для спектральной задачи (4.1) свойство простоты может быть проверено всего лишь на одной из собственных функций соответствующего собственного значения $\lambda \in \Lambda$. Выполнение этого свойства влечет *простоту не только геометрическую, но и алгебраическую*. В самом деле, если $u(x) \in E(L)$, то умножение (4.6) на $u(x)$ приводит к неравенству $u(x)(Lz)(x) = m(x)u^2(x) \geq 0$, которое в силу теоремы 4.5 приводит к $mu^2 \equiv 0$, чего не может быть.

Если Γ является *деревом*, то простота задачи (4.4) следует из отсутствия у некоторой функции $u(x) \in E(L)$ нулей в вершинах графа.

§ 5. Размерность корневого пространства – связь с распределением нулей

5.1. Локальная вырожденность. Пусть $E(L)$, как и ранее, – пространство решений задачи $Lu = 0, u|_{\partial\Gamma} = 0$ для данного графа Γ . В условиях п. 4.2 $\dim E(L) = 1$, если нетривиальные элементы $u \in E(L)$ обнуляются лишь в конечном фиксированном наборе простых точек из Γ .

5.1.1. Скажем, что $E(L)$ *вырождено в точке* $x_0 \in \Gamma$, если некоторая нетривиальная функция $u(x) \in E(L)$ обращается в этой точке в нуль. *Дефектом вырождения* $E(L)$ в точке x_0 мы будем называть размерность пространства $H(x_0)$ функций из $E(L)$, обращающихся в нуль в точке x_0 . Дефект назовем *полным*, если $\dim H(x_0) = \dim E(L)$.

Если $\dim E(L) \geq 2$, то $E(L)$ вырождено в каждой точке $x \in E(L)$, ибо для любой линейно независимой пары $u, v \in E(L)$ функция $h(x) = u(x_0)v(x) - v(x_0)u(x)$ обращается в нуль в точке x_0 , причем хотя бы одна из функций u, v, h нетривиальна, аннулируясь в точке x_0 . Более того, согласно п. 4.2.2 в этом случае каждое ребро, примыкающее к одной из граничных вершин, служит сплошным нулем какой-то нетривиальной функции из $E(L)$.

5.1.2. ЛЕММА. Пусть $x_0 \in \Gamma$ и $H(x_0) \neq E(L)$, т.е. $u(x_0) = 0$ не для всех $u(x) \in E(L)$ (x_0 не есть точка полного вырождения). Тогда $\dim H(x_0) = \dim E(L) - 1$.

Для доказательства достаточно отметить, что функционал $l(u) = u(x_0)$ линейен на конечномерном $E(L)$ и его гиперплоскость, совпадая с $H(x_0)$, отличается от $E(L)$.

Эта лемма позволяет оценивать $\dim E(L)$ редукцией по размерности.

5.1.3. Обозначим через $Z(\Gamma)$ множество точек, содержащихся в циклах Γ . Пусть N – количество простых циклов в Γ , т.е. минимальное количество ребер, после удаления которых из Γ получается дерево.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть некоторое решение $v_0 \in E(L)$ имеет вне $Z(\Gamma)$ нули лишь в простых точках Γ . Тогда $\dim E(L) \leq N + 1$.

Точность (неулучшаемость по N) этой оценки подтверждается не только теоремой 4.4, но и простыми примерами при $N \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по N . При $N = 0$ исходный граф Γ является деревом, и требуемое следует из теоремы 4.4. Пусть утверждение верно при $N \leq k$. Допустим противное при $N = k + 1$. Если v_0 не имеет нулей в $Z(\Gamma)$, то задача простая и $\dim E(L) = 1$. Пусть у v_0 найдется нулевая точка $x_0 \in Z(\Gamma)$. Выбрасывая x_0 из Γ , мы превращаем ее в граничную для оставшегося графа, для которого число простых циклов не превосходит k . Это означает по предположению индукции, что $\dim H(x_0) \leq k + 1$. Но тогда в силу леммы п. 5.1.2 $\dim E(L) \leq \dim H(x_0) + 1 \leq k + 2 = N + 1$, что и требовалось доказать.

5.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что Γ ветвится в точке x_0 из $J(\Gamma)$, а x_0 назовем точкой ветвления Γ , если при выбрасывании x_0 из Γ каждая из компонент связности оставшегося множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$ является ветвью, т.е. примыкает к x_0 лишь одним ребром. Для ветвления Γ в x_0 необходимо и достаточно, чтобы x_0 не принадлежала ни одному циклу из Γ .

Пусть x_0 – одна из ветвящихся вершин Γ . Обозначим через Γ_i ($i = \overline{1, k}$) все компоненты связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$. Каждая из них – ветвь с основанием x_0 . Очевидно, $(\bigcup_i \partial \Gamma_i) \setminus \{x_0\} = \partial \Gamma$. Рассмотрим на ветви Γ_i соответствующее “сужение” $E(L)$, определяемое задачей

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial \Gamma_i} = 0. \quad (5.1)$$

Множество решений такой задачи обозначим через $H(\Gamma_i)$.

Скажем, что функция $u(x) \in H(\Gamma_i)$ гладко примыкает к x_0 , если $u'(x_0) = 0$. Очевидно, это возможно, лишь если $u(x) \equiv 0$ на ребре из Γ_i , примыкающем к x_0 . Если этим свойством обладают все функции из $H(\Gamma_i)$, то пространство $H(\Gamma_i)$ назовем гладко примыкающим к x_0 . Положим $d_i = \dim H(\Gamma_i)$ ($i = \overline{1, k}$).

ЛЕММА. $\dim H(x_0) = d_1 + \dots + d_k$ в том и только том случае, когда все пространства $H(\Gamma_i)$ гладко примыкают к x_0 . В противном случае $\dim H(x_0) = (\sum d_i) - 1$.

5.1.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H^0 прямую сумму всех пространств $H(\Gamma_i)$. Если функции из каждого $H(\Gamma_i)$, определенные лишь на Γ_i , считать продолженными на остальную часть Γ тождественным нулем, то H^0 оказывается и алгебраической суммой $H(\Gamma_i)$ ($i = \overline{1, k}$).

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из $H(x_0)$. Обозначим через $u^i(x)$ ее сужение на Γ_i , т.е. положим $u^i(x) = u(x)$ при $x \in \Gamma_i$ и $u^i(x) = 0$ при $x \notin \Gamma_i$. Очевидно, $u^i(x) \in H(\Gamma_i)$, причем $u^1 + \dots + u^k = u$. Поэтому $H(x_0) \subseteq H^0$. Если все $H(\Gamma_i)$

гладко примыкают к x_0 , то для любой $u(x) \in H^0$ соответствующие ей $u^i(x)$ удовлетворяют в точке x_0 условиям гладкости и, значит, $u^i(x)$ также принадлежат $H(x_0)$, откуда следует равенство $H(x_0) = H^0$. Если же хотя бы одно из $H(\Gamma_i)$ не примыкает гладко к x_0 , то $H(x_0)$ есть правильная часть H^0 . При этом $H(x_0)$ есть гиперплоскость в H^0 , порождаемая условием гладкости, что означает $\dim H(x_0) = \dim H^0 - 1$. Для завершения доказательства достаточно отметить само собой разумеющееся равенство $\dim H^0 = d_1 + \dots + d_k$.

5.2. Осцилляция на дереве. Отсутствие циклов у графа-дерева позволяет довести предыдущие условия (наподобие гладкого примыкания) до эффективных признаков. Ниже всюду Γ предполагается деревом.

5.2.1. Приводимое ниже свойство, полезное в первую очередь для компонент типа ветвей, представляет интерес и с общих позиций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть b – некоторая граничная вершина Γ с единственным примыкающим к ней ребром. Пусть существует решение v_0 уравнения $Lu = 0$, нулевое во всех точках $\partial\Gamma$, кроме b . Тогда $E(L)$ гладко примыкает к b , т.е. любое решение из $E(L)$ имеет в точке b не только нулевое значение, но и нулевую производную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении противного существует функция $z(x) \in E(L)$, для которой $z'_\gamma(b) \neq 0$. Можно считать, что $z'_\gamma(b)v_0(b) > 0$. Но тогда к паре функций z и v_0 применима теорема 4.6, в силу которой z и v_0 линейно зависимы на той S -зоне z , для которой b является граничной вершиной. Последнее противоречит тому, что $z(b) = 0 \neq v_0(b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее предложение означает по сути дела, что любая функция $u(x) \in E(L)$ есть тождественный нуль на всем примыкающем к b подграфе Γ_0 , на котором $v_0(x) \neq 0$. В самом деле, условия этого предложения верны и для любой точки $x_0 \in \Gamma_0$ и компоненты связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$, не содержащей b в качестве граничной вершины.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях последнего предложения пространство $E(L)$, если оно нетривиально, совпадает с $H(x_0)$ при некотором $x_0 \in J(\Gamma)$.

Пусть Γ_1 – максимальный по включению Γ -интервал, для которого b является граничной вершиной и на котором все функции из $E(L)$ равны тождественно нулю. Так как $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_0$ (см. последнее замечание), то $\Gamma_1 \neq \emptyset$, и, значит, с учетом условия гладкости (трансмиссии) $\partial\Gamma_1 \subseteq \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$. И утверждение следствия получим, взяв $x_0 \in J(\Gamma) \cap \partial\Gamma_1$. Если же $J(\Gamma) \cap \partial\Gamma_1 = \emptyset$, то $\Gamma_1 = \Gamma$, т.е. $E(L)$ тривиально.

5.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точку $x_0 \in J(\Gamma)$ назовем *полным нулем* для $u(x) \in E(L)$, если $\frac{d}{d\gamma}u(x_0) = 0$ для всех $\gamma \subset \Gamma(x_0)$. Ясно, что в этом случае $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах $\gamma \subset \Gamma(x_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $x_0 \in J(\Gamma)$ и $H(x_0) \neq E(L)$, т.е. существует хотя бы одно решение $u(x) \in E(L)$, отличное от нуля в точке x_0 . Тогда x_0 есть полный нуль для всех функций из $H(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_0(x) \in E(L)$ и $v_0(x_0) > 0$. На каждой компоненте связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$ для v_0 выполняются все условия предложения п. 5.2.1. Поэтому любая функция из $H(x_0)$ есть тождественный нуль на каждом ребре, примыкающем к x_0 .

СЛЕДСТВИЕ. Если вершина $x_0 \in J(\Gamma)$ не является полным нулем хотя бы для одной функции $u(x) \in H(x_0)$, то $E(L) = H(x_0)$, т.е. точка x_0 является нулем для всех функций из $E(L)$.

5.2.3. Далее через $\Gamma_1(x_0), \dots, \Gamma_k(x_0)$ мы обозначаем полный набор компонент связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$. Скажем, что компонента $\Gamma_i(x_0)$ тривиальна для $E(L)$, если размерность соответствующего пространства $H(\Gamma_i(x_0))$ нулевая, т.е. $H(\Gamma_i(x_0)) = \{0\}$. Для тривиальности компоненты достаточно, чтобы на ней L не осциллировал.

Назовем вершину $x_0 \in Y(\Gamma)$ регулярной, если тривиальны все примыкающие к ней ветви, исключая, может быть, одну. Скажем, что $E(L)$ находится в общем положении для Γ , если все вершины из $J(\Gamma)$ регулярны.

ТЕОРЕМА 5.2. Если $E(L)$ находится в общем положении для Γ , то $\dim E(L) \leq 1$. При этом $\dim E(L) = 1$, если $E(L) \neq H(x_0)$ при всех $x_0 \in Y(\Gamma)$, и $\dim E(L) = 0$ в противном случае.

5.2.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 5.1.2 достаточно показать, что $\dim H(x_0) = 0$ для любой $x_0 \in J(\Gamma)$. Предполагая противное, придем к существованию нетривиальной функции $v \in E(L)$, обнуляющейся в некоторой точке $x_1 \in Y(\Gamma)$. Можно сразу считать, что x_1 не является полным нулем v , так как иначе, рассмотрев максимальный по включению подграф $\Gamma_1 \ni x_1$, на котором $v \equiv 0$, мы бы пришли к непустоте множества $\partial\Gamma_1 \cap Y(\Gamma)$, и в качестве x_1 можно было бы взять любую точку из этого множества. Но тогда $\frac{dv}{d\gamma_0}(x_1) \neq 0$ для некоторого $\gamma_0 \subset \Gamma(x_1)$, что ввиду

$$\sum_{\gamma \subset \Gamma(x_1)} \alpha_\gamma(x_1) \frac{dv}{d\gamma}(x_1) = 0 \text{ влечет существование } \gamma_1 \neq \gamma_0 \text{ такого, что и } \frac{dv}{d\gamma_1}(x_1) \neq 0.$$

И значит, v нетривиальна, как минимум, на двух компонентах связности множества $\Gamma \setminus \{x_1\}$, что противоречит тому, что $E(L)$ находится в общем положении для Γ . Теорема доказана.

§ 6. Спектральная задача на сети в общем положении

6.1. Вещественность и простота спектра. Итак, теперь в нашем распоряжении есть серьезный задел для анализа всех точек спектра задачи

$$Lu = \lambda tu, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (6.1)$$

в предположении, что Γ является деревом.

6.1.1. Общность положения спектральной задачи (6.1) в случае, когда Γ есть дерево, мы понимаем в полном соответствии с п. 5.2.3. В переводе на спектральный язык это означает следующее.

Пусть $x_0 \in J(\Gamma)$ и $\Gamma_1(x_0), \dots, \Gamma_k(x_0)$ – полный набор компонент связности множества $\Gamma \setminus \{x_0\}$. Обозначим через $\Lambda_i(x_0)$ ($i = \overline{1, k}$) спектр краевой задачи

$$Lu = \lambda tu, \quad u|_{\partial\Gamma_i(x_0)} = 0.$$

Будем говорить, что *точка* $x_0 \in J(\Gamma)$ *находится в общем положении для задачи* (6.1), если $\Lambda_i(x_0) \cap \Lambda_j(x_0) = \emptyset$ при $i \neq j$, т.е. спектры $\Lambda_1(x_0), \dots, \Lambda_k(x_0)$ попарно не пересекаются.

Скажем, что *задача* (6.1) *на дереве* Γ *удовлетворяет условию общности положения*, если в общем положении находятся все вершины $J(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть Γ является деревом, и пусть задача (6.1) находится в общем положении. Тогда все ее точки спектра вещественны и имеют единичную как геометрическую, так и алгебраическую кратность, а собственные функции не имеют нулей в $J(\Gamma)$.*

6.1.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественность спектра вытекает из возможности преобразовать исходную задачу к эквивалентной самосопряженной. Поскольку Γ является деревом, то, взяв любую из его граничных вершин и упорядочив Γ от нее иерархией по возрастанию (как от корня), мы можем поочередно преобразовать каждое из уравнений на ребрах домножением на константу так, что для вновь образованных коэффициентов $\tilde{p}_\gamma(x)$ (пропорциональных исходным $p_\gamma(x)$) в точках $a \in J(\Gamma)$ будет выполняться $\alpha_\gamma(a) = \tilde{p}_\gamma(a)$. Это придаст уравнениям в этих точках самосопряженную форму

$$-\sum_{\gamma \subset \Gamma(a)} \left(\tilde{p}_\gamma(a) \frac{d}{d\gamma} u(a) \right) + q(a)u = \lambda m(a)u.$$

Самосопряженность полученной задачи проверяется непосредственно. Спектр при таком подходе не меняется.

Пусть λ_k – какая-то точка спектра из Λ . Положим $L_0 u \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + (q - \lambda_k m)u$, а через E обозначим соответствующее пространство решений задачи

$$L_0 u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Так как $\lambda_k \in \Lambda$, то $\dim E \geq 1$. Пусть x_0 – произвольная вершина из $Y(\Gamma)$. Точка λ_k может по условию входить лишь в один из соответствующих спектров $\Lambda_i(x_0)$, а потому нетривиальной для E может быть только одна из соответствующих компонент $\Gamma_i(x_0)$. Поэтому x_0 – регулярная вершина. То же и для других точек из $J(\Gamma)$. Поэтому E находится в общем положении для Γ . Отсюда, согласно теореме 5.2, вытекает $\dim E = 1$, причем $u(x_0) \neq 0$ для любой $u(x) \in E$. В силу произвольности $x_0 \in J(\Gamma)$ любая $u(x) \in E$ ($u(x) \neq 0$) не имеет нулей во всех точках из $J(\Gamma)$. Если $h(x)$ – присоединенная для $u(x)$ функция, то для нее должно быть верно тождество

$$u(x)(L_0 h)(x) \equiv m(x)u^2(x) \geq 0,$$

и на каждой ветви, примыкающей к любой $a \in J(\Gamma)$, мы оказываемся в условиях теоремы 4.5, в силу чего $u(x) \equiv 0$ там, где $m(x) > 0$, т.е. $u(x)$ имеет бесконечно много нулей на одном из ребер Γ , а значит, $u(x)$ имеет нули и в $Y(\Gamma)$ – противоречие. Теорема полностью доказана.

6.2. Об осцилляционных спектральных свойствах на дереве.

6.2.1. Вещественность и простота всех точек спектра задачи (6.1), установленные в теореме 6.1, дополняются в случае неосцилляции L положительностью спектра (см.

теорему 4.1). Если перенумеровать точки спектра в порядке возрастания $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и через $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ обозначить соответствующие им собственные функции, то в силу теоремы сравнения (из п. 3.3.4) нули φ_{k+1} расположены “чаще”, чем у φ_k , в том смысле, что φ_{k+1} меняет знак в любой S -зоне φ_k . Обратное заключение, позволяющее доказать, что φ_k имеет точно k нулей, весьма нетривиально даже и в скалярной теории Штурма–Лиувилля (см. [1]–[3]).

6.2.2. Ниже, кроме непустоты $\partial\Gamma$, мы будем предполагать еще и строгую положительность функции $m(x)$ на $R(\Gamma)$. Последнее – исключительно ради упрощения некоторых рассуждений, так как излагаемые результаты верны и для произвольного распределения масс с бесконечным числом атомов.

Основной результат настоящего параграфа дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть Γ является деревом и L не осциллирует на Γ . Пусть задача (6.1) удовлетворяет условию общности положения. Тогда спектр Λ задачи (6.1) состоит из неограниченной последовательности вещественных и строго положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в Γ точно k нулей, в каждом из которых она меняет знак, и $(k+1)$ S -зон; в каждой S -зоне функции $\varphi_k(x)$ содержится ровно один нуль функции $\varphi_{k+1}(x)$.

6.2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вещественности, строгой положительности и простоты всех точек спектра Λ осуществлено выше (см. теорему 6.1 и п. 6.2.1). Дискретность Λ вытекает из теоремы 2.2. Из теоремы 6.1 также следуют конечность множества нулей каждой из собственных функций задачи (6.1) и простота всех этих нулей – иначе бы одна из собственных функций имела нуль в $J(\Gamma)$. Отсутствие нулей у $\varphi_0(x)$ тоже установлено ранее (см. теорему 4.2). Наличие нулей φ_{k+1} в каждой из S -зон φ_k вытекает из теоремы сравнения (см. п. 3.3.4);

Таким образом, остается установить бесконечность Λ и, кроме того, наличие у φ_k ровно k нулей в Γ .

Не ограничивая общности, можно считать, что $(a \in \partial\Gamma) \Rightarrow (\text{ind}(a) = 1)$. Зафиксируем произвольно $b \in \partial\Gamma$ и рассмотрим $w_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_\Gamma(\lambda)u_b^\lambda(x)$, где $\Delta_\Gamma(\lambda)$ – определитель, введенный в п. 2.3.2, а u_b^λ – решение уравнения $Lu = \lambda mu$, удовлетворяющее условиям $u|_{\partial\Gamma \setminus \{b\}} = 0$ и $u(b) = 1$. (Если $\lambda \in \Lambda$, то $w_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mu \rightarrow \lambda} w_\mu(x)$.) Напомним, что w_λ аналитична по λ в смысле нормы $C^1[R(\Gamma)]$ (теорема 2.2).

Заметим, что $(w_\lambda(b) = 0) \Leftrightarrow (\lambda \in \Lambda)$. Этот факт можно уточнить: если $\lambda \in \Lambda$, то $w_\lambda(x)$ является собственной функцией задачи (6.1). Действительно, функцию w_λ можно записать в виде

$$w_\lambda(x) = \begin{vmatrix} \psi_\lambda^1(x) & \dots & \psi_\lambda^{2m}(x) \\ l_2[\psi_\lambda^1] & \dots & l_2[\psi_\lambda^{2m}] \\ \vdots & & \vdots \\ l_{2m}[\psi_\lambda^1] & \dots & l_{2m}[\psi_\lambda^{2m}] \end{vmatrix},$$

где предполагается, что $l_1(u) \stackrel{\text{def}}{=} u(b)$. Если $w_\lambda \equiv 0$, то и $w_\lambda(x_0) = 0$, где x_0 – какая-либо точка Γ , в которой собственная функция φ , отвечающая λ , отлична от нуля. Но равенство нулю последнего определителя при $x = x_0$ означает существование нетривиального решения v уравнения $L_\lambda v = 0$, обнуляющегося как на $\partial\Gamma \setminus \{b\}$, так и в

точке x_0 . В силу предложения п. 5.2.1, если $v(b) \neq 0$, то $\varphi'(b) = 0$, что несовместимо с отсутствием у φ нулей в $Y(\Gamma)$. Значит, $v(b) = 0$, т.е. v – собственная функция (6.1), отвечающая λ , причем линейно независимая с φ (так как $v(x_0) = 0 \neq \varphi(x_0)$), а это противоречит простоте λ . Значит, $w_\lambda \neq 0$, и требуемое установлено.

Покажем теперь, что если $w_{\lambda'}(b) = 0$, то существует $\lambda'' > \lambda'$ такое, что $w_{\lambda''}(b) = 0$, причем количество нулей в Γ у $w_{\lambda''}$ ровно на 1 больше, чем у $w_{\lambda'}$, – этим доказательство теоремы и завершится.

Для описания зависимости от λ нулей функции w_λ введем на $\Gamma \cup \{b\}$ частичный порядок “к b ”. А именно, для $x_1, x_2 \in \Gamma \cup \{b\}$ будем говорить “ x_1 меньше x_2 ” (писать “ $x_1 < x_2$ ”), если непрерывная кривая с концами в точках x_1 и b , лежащая в $\Gamma \cup \{b\}$, содержит x_2 .

Договоримся также далее все производные в точках $R(\Gamma) \cup \{b\}$ предполагать взятыми в положительном направлении, в смысле введенной упорядоченности на Γ .

Пусть теперь $w_{\lambda'}(b) = 0$, а $\lambda'' = \sup\{\lambda > \lambda' \mid \forall (\mu \in (\lambda'; \lambda)) [w_\mu(b) \neq 0]\}$ (пока не исключается, что $\lambda'' = +\infty$). В силу теорем 4.5 и 4.6, если $x_0 \in \Gamma \cup \{b\}$ – изолированный нуль $w_{\tilde{\lambda}}$ (где $\tilde{\lambda} \in [\lambda'; \lambda'']$), то

$$(w_{\tilde{\lambda}})'(x_0) \cdot \frac{d}{d\lambda} w_\lambda(x_0) \Big|_{\lambda=\tilde{\lambda}} > 0, \quad (6.2)$$

что, теперь уже по теореме о неявной функции, влечет, что функция $z(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x \in \Gamma \cup \{b\} \mid w_\lambda(x) = 0\}$ строго убывает на отрезке $[\lambda'; \tilde{\lambda}]$, где $\tilde{\lambda} \in (\lambda'; \lambda'')$ определяется условием: $\forall (\lambda \in (\lambda'; \tilde{\lambda})) [z(\lambda) \text{ принадлежит ребру } \Gamma, \text{ примыкающему к } b]$. А отсюда следует конечность λ'' , так как в силу классической теоремы Штурма о сравнении, например, отрезок $[(z(\lambda') + z(\tilde{\lambda}))/2; b]$ не может оставаться промежутком неосциллиции оператора $(L - \lambda mI)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Неограниченность λ тем самым установлена.

Кроме того, (6.2) при $\tilde{\lambda} = \lambda'$ влечет, снова по теореме о неявной функции, существование $\delta > 0$ такого, что при $\lambda \in (\lambda'; \lambda' + \delta)$ количество нулей у функции w_λ в Γ ровно на 1 больше, чем у $w_{\lambda'}$ (опять же в Γ). Что же касается количества нулей в Γ у w_λ для всех $\lambda \in (\lambda'; \lambda''] \setminus M$, где $M = \bigcup_{c \in Y(\Gamma)} (\bigcup_{j \mid \partial \Gamma_j(c) \not\supset b} \Lambda_j(c))$, то оно неизменно (и, значит, – см. выше – на 1 больше количества нулей в Γ у $w_{\lambda'}$). Это следует из индукции по количеству ребер Γ , поскольку в силу условия общности положения для любой $c \in J(\Gamma)$ и любого j такого, что $\partial \Gamma_j(c) \not\supset b$, множество нулей аналога функции Вейля, который строится по $\Gamma_j(c)$ и c так же, как по Γ и b строится w_λ , – множество его нулей совпадает (при $\lambda \in (\lambda'; \lambda''] \setminus M$) с множеством нулей w_λ в $\Gamma_j(c)$. Теорема доказана.

6.3. Переमेжаемость спектров. Нам потребуется следующее

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве теоремы 6.2 содержится важный ресурс: постоянство количества нулей w_λ в Γ при $\lambda \in (\lambda'; \lambda''] \setminus M$ и увеличение этого количества на 1 для $\lambda \in (\lambda''; \lambda'''] \setminus M$ (λ''' – следующая за λ'' точка спектра Λ) устанавливаются вне связи с тем, пересекается спектр $\Lambda_{j_0}(c)$ (где j_0 определяется включением $\partial \Gamma_{j_0}(c) \ni b$) с остальными $\Lambda_j(c)$ при каком бы то ни было $c \in J(\Gamma)$, или же нет. Это обстоятельство позволяет обнаружить перемежаемость Λ с объединением (по j) всех спектров $\Lambda_j(c)$.

6.3.1. Зафиксируем точку $c \in J(\Gamma)$ и рассмотрим множество N , представляющее собой объединение по всем j спектров $\Lambda_j(c)$. Множество N представимо в виде $\{\nu_k \mid k = \overline{0, \infty}\}$, где $\nu_k < \nu_{k+1}$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть выполнены условия теоремы 6.2. Тогда Λ и N перемежаются: $\lambda_0 < \nu_0 < \lambda_1 < \nu_1 < \dots < \nu_{k-1} < \lambda_k < \nu_k < \dots$.

6.3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_j – количество нулей φ_k в $\Gamma_j(c)$. В силу теоремы 6.2 $\sum_j k_j = k$. Далее, так как $\varphi_k|_{\Gamma_j(c)}$ пропорциональна аналогу функции Вейля, который строится по $\Gamma_j(c)$ и c так же, как w_λ строится по Γ и b , то (см. замечание) $\lambda_k \in (\mu_{k_j-1}^j; \mu_{k_j}^j)$ для любого j ; здесь μ_s^j – s -е собственное значение в спектре $\Lambda_j(c)$ (μ_{-1}^j полагаем равным $-\infty$). Но тогда левее λ_k лежит $\sum_j k_j (=k)$ точек из N – и это верно для любого k . Теорема доказана.

§ 7. Некоторые комментарии

Осцилляционная тематика, восходящая к спектральным теоремам Штурма, до 80-х годов XX века охватывала лишь

7.1. Спектральные задачи на отрезке. Стержнем направления была идеология М.Г. Крейна [4], развитая на базе результатов Келлога. Для классических двухточечных задач на отрезке это направление подытожено в [8]. Успешное продвижение теории на нестандартные (в том числе разрывные) задачи, порождаемые упругими физическими системами (многоопорная балка, цепочка стержней и струн и проч. – см. обзор [5]), привели к убеждению о наличии аналогичных свойств и для неодномерных задач. Однако уже в простейших задачах (струнный крест, пучок упругих континуумов) пришлось столкнуться, как и в примере п. 1.2, с полной непригодностью методов предыдущего направления.

7.2. К задачам с дифференциальными уравнениями на ребрах сети приводит самая разнообразная проблематика. Скажем, малые поперечные колебания сетки из струн описываются обычным уравнением

$$q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.1)$$

а в узлах сетки решения связаны условиями непрерывности и условиями баланса сил натяжения $\sum p_i(a) u'_i(a) = 0$. В гидросетях на каждом линейном фрагменте возникает уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(здесь $u(t, x)$ – скорость течения), а в узлах задано условие непрерывности давлений (производных от $u(t, x)$ по x) и условие баланса суммарного расхода. Аналогичные модели возникают для процессов в акустических сетях и волноводах.

Для электрических сетей на каждом звене задается уравнение колебаний в проводнике с распределенными емкостью, индуктивностью и сопротивлением, отличающееся от (7.1) наличием диссипативного члена. В узлах задаются условия непрерывности потенциала и баланса токов, известные как законы Кирхгофа. Аналогичные модели широко используются и при описании нейронных сетей – см., например, [9], [10].

Уравнение теплопроводности (и уравнение диффузии) на каждом теплопроводящем элементе имеет классический вид

$$C(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} P(x) \frac{\partial u}{\partial x},$$

а в узлах – естественные условия непрерывности температур и баланса тепловых потоков. Такие задачи исследовались, например, в [11]–[18].

Во всех приведенных выше динамических задачах вопрос о стационарных решениях приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Применение метода Фурье приводит, естественно, к спектральным задачам (как в [6], [19]–[27]). Одной из распространенных постановок для описанных выше задач является вопрос о граничной управляемости (см., например, [28]–[32]).

7.3. Стационарные состояния электронов в молекуле [33], [34]. Описываются спектральной задачей с уравнениями

$$-u''(x) + q(x)u(x) = k^2 u(x)$$

на ребрах и с условиями непрерывности и условиями баланса потоков (выражаемых через сумму односторонних первых производных) в узлах. В отличие от моделей струнной и стержневой системы на границе задаются не условия типа Дирихле, а условия типа Неймана – равенство нулю первой производной.

Взаимодействие молекулы с “внешним пространством” [33] описывается в терминах совместного самосопряженного расширения двух операторов: оператора $-u'' + q(x)u$ на сети и обычного оператора Лапласа в трехмерном пространстве. По существу это – взаимодействие молекулы с внешним пространством “через узлы” сети, при этом особенности потенциала в окружающем пространстве (описываемые через два коэффициента – при минус первой и нулевой степени) связываются (“отождествляются”) с особенностями потенциала (функции влияния, функции Грина) на сети (тоже описываемыми через два коэффициента – значение в узле и сумму производных в этом узле). Аналогично ставится задача взаимодействия молекулы с “внешним миром”, но в случае, когда “внешний мир” состоит из набора бесконечных лучей, выходящих из узлов сети [34]. Дискретный аналог такой модели рассмотрен в [35], [36].

“Тканая мембрана”. Двумерный оператор Лапласа на области заменяется на локально одномерный на достаточно густой сетке, приближающей эту область. В отличие от обычной дискретизации такая аппроксимация дает более полную картину спектра мембраны, который аппроксимируется “по всей ширине”, т.е. не “снизу” (только частично), а “сверху” – по вложению (весь спектр плюс некая “паразитная” часть, которая при измельчении сетки “уходит в бесконечность”) – см. [37]–[39].

Отметим, что предельный переход в таких моделях родственен предельному переходу в моделях перфорированных областей [40], отличие по существу только в том, что в моделях перфорированных областей линейные фрагменты решетки считаются все-таки имеющими ненулевую толщину (хотя и малую, порядка малой величины ϵ , по которой осуществляется усреднение).

7.4. Влияние идей М. Крейна и интерес именно к осцилляционным спектральным свойствам уже в 80-е годы привели Ю. В. Покорного и его учеников к разработке новых методов и новых подходов. Начал вызревать [41] синтезирующий взгляд на систему (относительно ребер) уравнений как на единое скалярное дифференциальное уравнение в пространстве функций-паутинок, возникло понятие S -зоны, как расширение представлений о промежутке между нулями, что позволило установить точный аналог теорем сравнения Штурма [42], [43], понятие неосцилляции [44], что привело в конечном счете к спектральным теоремам типа Штурма [45].

7.5. Изложенные выше методы позволили получить ряд качественных результатов, не отраженных в настоящей работе. Так, для нелинейной задачи на сети был установлен точный аналог [46] теоремы Бернштейна–Нагумо. Детально изучена функция Грина [47], [48]. Наконец, расширение взгляда на эллиптическую природу задач [49], [50] позволило ряд существенных свойств эллиптичности перенести на случай ветвящегося аргумента более общей природы [51]–[53].

7.6. Ни в коем случае не претендуя на полноту тематического обзора, мы отмечаем лишь работы, привлечение наше внимание какими либо близкими соображениями. Отметим в этой связи работу [54]. Наконец, отметим совсем свежие обзоры [55], [56].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [2] Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
- [3] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
- [4] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. Оцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехиздат, 1950.
- [5] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный. Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога // УМН. 1994. Т. 49. №3. С. 3–42.
- [6] J. C. Mairhuber. On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 609–615.
- [7] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [8] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I, II // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. №3. С. 606–625; Т. 17. №4. С. 813–830.
- [9] S. Nicaise. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1771. P. 532–541.
- [10] Yu. V. Pokorniy, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, A. N. Pokrovsky. The problem of intracellular and extracellular potentials of dendritic trees // Proceedings of the First International Symposium “Electrical Activity of The Brain: Mathematical Models & Analytical Methods”. Pushchino, 1997. P. 22–24.
- [11] G. Lumer. Connecting of local operators and evolution equations on networks // Lecture Notes in Math. 1980. V. 787. P. 219–234.
- [12] S. Nicaise. Diffusion sur les espaces ramifiés // Thesis. Mons: Université de Mons, 1986.
- [13] S. Nicaise. Approche spectrale des problèmes de diffusion sur les réseaux // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1235. P. 120–140.
- [14] J. von Below. Classical solvability of linear parabolic equations on networks // J. Differential Equations. 1988. V. 72. №2. P. 316–337.
- [15] B. Gaveau, M. Okada, T. Okada. Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis // Several Complex Variables (Stockholm, 1987/1988). Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. P. 364–388. (Math. Notes V. 38.)
- [16] J. von Below. Parabolic Network equations // Habilitation Thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1993.
- [17] J. von Below, S. Nicaise. Dynamical interface transition in ramified media with diffusion // Comm. Partial Differential Equations. 1996. V. 21. №1–2. P. 255–279.
- [18] М. И. Каменский, О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №2. С. 157–159.
- [19] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, Е. Н. Провоторова. Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи. Межвуз. сб.. Пермь: Изд-во ППИ, 1983. С. 64–70.
- [20] J. von Below. A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks // Linear Algebra Appl. 1985. V. 71. P. 309–325.

- [21] S. Nicaise. Estimées du spectre du laplasien sur un réseau topologique fini // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1986. V. 303. № 8. P. 343–346.
- [22] Ю. В. Покорный. О спектре некоторых задач на графах // УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 128–129.
- [23] J. von Below. Sturm–Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Methods Appl. Sci. 1988. V. 10. № 4. P. 383–395.
- [24] М. Г. Завгородний, Ю. В. Покорный. О спектре краевых задач второго порядка на пространственных сетях // УМН. 1989. Т. 44. № 4. С. 220–221.
- [25] B. Dekoninck, S. Nicaise. Spectre des réseaux de poutres // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 326. № 10. P. 1249–1254.
- [26] B. Dekoninck, S. Nicaise. The eigenvalue problem for networks of beams // Generalized Functions, Operator Theory, and Dynamical Systems. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 1999. P. 335–344.
- [27] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. Аль-Обейд. Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 468–469.
- [28] E. J. P. G. Schmidt. On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. № 1. P. 229–245.
- [29] J. E. Lagnese, G. Leugering, E. J. P. G. Schmidt. Control of planar networks of Timoshenko beams // SIAM J. Control Optim. 1993. V. 31. № 3. P. 780–811.
- [30] J. E. Lagnese, G. Leugering, E. J. P. G. Schmidt. Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-link Structures. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [31] J. E. Lagnese. Modelling and controllability of plate-beam systems // J. Math. Systems Estim. Control. 1995. V. 5. № 2. P. 141–187.
- [32] B. Dekoninck, S. Nicaise. Control of network of Euler–Bernoulli beams // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1999. V. 4. P. 57–81.
- [33] Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев. Модель свободных электронов и задача рассеяния // ТМФ. 1983. Т. 55. № 2. С. 257–269.
- [34] Н. И. Герасименко, Б. С. Павлов. Задача рассеяния на некомпактных графах // ТМФ. 1988. Т. 74. № 3. С. 345–359.
- [35] С. П. Новиков. Дискретный оператор Шрёдингера // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 275–290.
- [36] С. П. Новиков. Уравнение Шрёдингера и симплектическая геометрия // Студенческие чтения МК НМУ. Лекция от 25 июня 1998 г.
- [37] J.-P. Roth. Spectre du laplacien sur un graphe // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1983. V. 296. № 19. P. 783–795.
- [38] J.-P. Roth. Le spectre du laplasien sur un graphe // Lecture Notes in Math. 1984. V. 1096. P. 521–539.
- [39] А. В. Комаров, О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный. О спектре равномерной сетки из струн // Изв. вузов. 2000. Т. 463. № 4. С. 23–27.
- [40] В. В. Жиков. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
- [41] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный. О краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 701–703.
- [42] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин. Теоремы Штурма для уравнений на графах // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 6. С. 1306–1308.
- [43] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1141–1150.
- [44] Ю. В. Покорный. О неосцилляции на графах // Докл. расшир. засед. семинара Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. 1988. Т. 3. № 3. С. 139–142.
- [45] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев. О распределении нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля на пространственной сети // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 3. С. 316–318.
- [46] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев. О нелинейной краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 5. С. 629–637.

- [47] Ю.В. Покорный, И.Г. Карелина. О функции Грина задачи Дирихле на графе // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. №3. С. 942–944.
- [48] И.Г. Карелина, Ю.В. Покорный. О функции Грина краевой задачи на графе // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. №1. С. 41–47.
- [49] О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Изв. вузов. Матем. 1996. №11. С. 57–64.
- [50] О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Матем. заметки. 1997. Т. 59. №5. С. 777–780.
- [51] О.М. Пенкин. О слабом принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №10. С. 1404–1409.
- [52] О.М. Пенкин. О принципе максимума для эллиптического уравнения на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №10. С. 1433–1434.
- [53] O. M. Penkin. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures / ed. F. Ali Mehmeti, J. von Below, S. Nicaise. New York: Dekker, 2001. P. 183–192. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 219.)
- [54] А.И. Шафаревич. Дифференциальные уравнения на графах, описывающие локализованные асимптотические решения уравнений Навье–Стокса и вытянутые вихри в несжимаемой жидкости // Препринт № 604. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1997.
- [55] P. Kuchment. Graph models for waves in thin structures // Waves Random Media. 2002. V. 12. №4. P. 1–24.
- [56] E. Akkermans, A. Comtet, J. Desbois, G. Montambaux, C. Texier. Spectral determinant on quantum graphs // Ann. Phys. 2000. V. 284. №1. P. 10–51.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
07.04.2002