Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Симонян, Е. И. Улитина, Об одной теореме сходимости к устойчивому закону в модели $M|G|1|\infty$, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:46:54

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СХОДИМОСТИ
К УСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ В МОДЕЛИ $M|G|1|_\infty$

А. Р. Симонян, Е. И. Улитина

Рассмотрим систему массового обслуживания с ожиданием $M|G|1|_\infty$ с параметром входящего потока $a > 0$ и с функцией распределения длительности обслуживания вызовов $B(t)$; $B(+0) = 0$ (см. [1]).

Допускается неограниченная очередь. При наличии очереди простоя прибора исключаются. В начальный момент $t = 0$ система свободна от вызовов.

Общие закономерности поведения характеристик в модели $M|G|1|_\infty$ зависят от загрузки $\rho_1 = a\beta_1$, где $\beta_1 = \int_0^\infty t dB(t)$.

Основными дискретными характеристиками модели $M|G|1|_\infty$ являются: w_n — время ожидания n -го вызова; I_n — суммарное время простоя прибора до поступления n -го вызова.

Пусть в систему вызовы поступают в случайные моменты времени $\{t_n\}_{n \geq 1}$, где $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$. Время обслуживания n -го вызова ($n \geq 1$) обозначим v_n , и пусть $u_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неотрицательных случайных величин определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ независимы (друг от друга) и образуют последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $A(t) = 1 - e^{-at}$ и $B(t)$ на $\mathbb{R}^+$ соответственно.

Обозначим $X_n = v_n - u_{n+1}$, тогда $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения

$$K(x) = B(x) + e^{ax} \left(\int_x^{+\infty} e^{-ay} dB(y) \right), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Предположим существование пределов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha (1 - K(x)) = Cp, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha K(-x) = Cq, \quad (1)$$

где $1 < \alpha < 2$, $C > 0$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$.

Условия (1) означают, что функция распределения $K(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2)$ и с асимметрией $\beta = p - q \in [-1, 1]$.

ТЕОРЕМА. Пусть $EX_1^2 = +\infty$ и выполнены условия (1). Тогда существуют равномерные по x пределы

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{w_n - n^{\frac{\rho_1 - 1}{a}}}{(Cn)^{1/\alpha}} < x\right) = \tilde{F}_{\alpha, \beta}(x) \quad \text{при } \rho_1 > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{I_n + n^{\frac{\rho_1 - 1}{a}}}{(Cn)^{1/\alpha}} < x\right) = \tilde{F}_{\alpha, \beta}(x) \quad \text{при } \rho_1 < 1,$$

где устойчивый закон $\tilde{F}_{\alpha, \beta}(x)$ имеет показатель $\alpha \in (1, 2)$, асимметрию $\beta = p - q$ и логарифм его характеристической функции определяется формулой

$$\ln \varphi_{\alpha, \beta}(t) = |t|^\alpha C \frac{\Gamma(3 - \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} \pm i\beta \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right).$$

Доказательство основано на основном уравнении для w_n (см. [2]) и следующей лемме.

ЛЕММА. Пусть $EX_1^2 = +\infty$ и выполнены условия (1). Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - n^{\frac{\rho_1 - 1}{a}}}{(Cn)^{1/\alpha}} < x\right) = \tilde{F}_{\alpha, \beta}(x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров, Г. П. Климов, В. Ф. Матвеев. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973. [2] Н. Прабху. Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984.

Сочинский государственный университет
туризма и курортного дела

Принято редколлегией
01.04.2004