Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Адрианов, О необходимых условиях существования порождающих конечных групп, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:14:13

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОРОЖДАЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н. М. Адрианов

Пусть G – конечная группа, $C_1, \dots, C_r$ – некоторый набор классов сопряженности группы G . Существует ли набор порождающих $x_1, \dots, x_r \in G$ таких, что

$$x_1 \cdots x_r = 1 \text{ и } x_i \in C_i, i = 1, \dots, r? \quad (1)$$

Часто при решении этого вопроса (см., например, [1]) выбирается некоторое представление группы G перестановками, и в качестве необходимого условия применяется теорема Ри ([2], теорема 1 ниже). В настоящей заметке мы предлагаем другое необходимое условие, основанное на линейном представлении группы G в пространстве гомологий $H_1(X, \mathbb{C})$ некоторой римановой поверхности X . Результат Макбета ([3], теорема 2 ниже) выражает характер этого представления в теоретико-групповых терминах. Мы показываем, что H_1 -условие сильнее условия Ри для любого представления группы G перестановками (теорема 3).

В качестве приложения мы приводим (теоремы 4 и 5) список троек классов сопряженности (C_1, C_2, C_3) групп Матье M_{11} и M_{12} , для которых не существует порождающих, удовлетворяющих условию (1), что перекрывает результаты работы [1], касающиеся этих групп.

1. Пусть $G : \Omega$ – действие группы G на Ω , $c(x)$ – количество независимых циклов перестановки x , $c_i(x)$ – количество циклов длины i , $\text{ord}(x)$ – порядок элемента x , $\text{Cl}(x)$ – класс сопряженности элемента x , $N_G(\langle x \rangle)$ – нормализатор в G циклической подгруппы, порожденной элементом x .

2. Для всякого транзитивного действия $G : \Omega$ и набора порождающих $\{x_1, \dots, x_r\}$, удовлетворяющих условию (1), можно построить компактную связную риманову поверхность X и накрытие $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, неразветвленное вне $\{z_1, \dots, z_r \mid z_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), z_i \neq z_j\}$, такие, что группа монодромии f есть G , а обходы вокруг точек z_i соответствуют порождающим x_i . Следующий результат, по сути, является следствием формулы Римана–Гурвица.

ТЕОРЕМА 1 (Ри). Если транзитивная группа перестановок $G : \Omega$ порождена элементами $x_i \in G$, $i = 1, \dots, r$, такими, что $x_1 \cdots x_r = 1$, то

$$\sum_{i=1}^r c(x_i) \leq (r-2)|\Omega| + 2. \quad (2)$$

Если транзитивное действие $G : \Omega$ – регулярное (т.е. $|G| = |\Omega|$), то группа G действует на X автоморфизмами. Род римановой поверхности X определяется из формулы Римана–Гурвица: $2g - 2 = |G|((r-2) - \sum_{i=1}^r 1/m_i)$. Рассмотрим представление группы G в пространстве $H_1(X, \mathbb{C})$. Характер этого представления определяется формулой Лефшеца (см. [4]):

$$\chi_{H_1}(x) = \begin{cases} 2 - F(x), & \text{если } x \neq 1, \\ 2g, & \text{если } x = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $F(x)$ – число неподвижных точек автоморфизма $x \neq 1$.

ТЕОРЕМА 2 (Макбет).

$$F(x) = |N_G(\langle x \rangle)| \sum_{i=0}^r \frac{\varepsilon_i(x)}{m_i}, \quad (4)$$

где $x \neq 1$, $m_i = \text{ord}(x_i)$, а $\varepsilon_i(x) = 1$, если x сопряжен какому-нибудь элементу из $\langle x_i \rangle$, и 0 иначе.

H_1 -УСЛОВИЕ. Пусть группа G порождена элементами $x_1, \dots, x_r$, удовлетворяющими условию (1), а функция χ_{H_1} задана формулами (3) и (4). Тогда для любого неприводимого характера χ группы G скалярное произведение $(\chi_{H_1} \mid \chi)$ есть неотрицательное целое число.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнено H_1 -условие, то для любого транзитивного действия $G : \Omega$ выполнено условие Ри (2).

ЛЕММА. Для транзитивной группы перестановок $G : \Omega$ верно следующее:

$$(a) \quad c(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m c_1(x^k), \text{ где } m = \text{ord}(x);$$

$$(b) \quad c_1(x) = \frac{|G| \cdot |\text{Cl}(x) \cap H|}{|H| \cdot |\text{Cl}(x)|}, \text{ где } H \subset G - \text{стабилизатор некоторой точки } \omega \in \Omega;$$

$$(c) \quad \sum_{x \in G} c_1(x) = |G|;$$

$$(d) \quad \frac{1}{|G|} \sum_{x \neq 1} c_1(x) F(x) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{m_i-1} \frac{|\text{Cl}(x_i^k) \cap H|}{|\text{Cl}(x_i^k)|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Функция $c_1(x)$ является перестановочным характером, соответствующим действию $G : \Omega$, поэтому из H_1 -условия следует, что $(c_1 | \chi_{H_1}) \geq 0$;

$$\begin{aligned} 0 \leq (c_1 | \chi_{H_1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} c_1(x) \bar{\chi}_{H_1}(x) = \frac{2}{|G|} \sum_{x \in G} c_1(x) + \frac{2g-2}{|G|} c_1(1) - \frac{1}{|G|} \sum_{x \neq 1} c_1(x) F(x) \\ &= 2 + \frac{|G|}{|H|} \left(r - 2 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \right) - \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{m_i-1} \frac{|\text{Cl}(x_i^k) \cap H|}{|\text{Cl}(x_i^k)|} = 2 + (r-2)|\Omega| - \sum_{i=1}^r c(x_i). \end{aligned}$$

3. Проверка H_1 -условия является механической, если известна таблица неприводимых характеров группы G . Следующие результаты получены с использованием компьютерной системы GAP. Используемые обозначения классов сопряженности совпадают с принятыми в [5].

ТЕОРЕМА 4. В группе $G = \mathbf{M}_{11}$ не существует порождающих, удовлетворяющих условию (1), для следующих троек классов сопряженности:

$$\begin{aligned} (2A, 3A, 8A) \quad (2A, 3A, 8B) \quad (2A, 3A, 11A) \quad (2A, 3A, 11B) \quad (2A, 4A, 5A) \quad (2A, 4A, 6A) \\ (2A, 4A, 8A) \quad (2A, 4A, 8B) \quad (2A, 5A, 5A) \quad (2A, 5A, 6A) \quad (2A, 6A, 6A) \quad (3A, 3A, 4A) \\ (3A, 3A, 5A) \quad (3A, 3A, 6A) \quad (3A, 4A, 4A) \quad (4A, 4A, 4A). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. В группе $G = \mathbf{M}_{12}$ не существует порождающих, удовлетворяющих условию (1), для следующих троек классов сопряженности:

$$\begin{aligned} (2A, 3A, 8A) \quad (2A, 3A, 8B) \quad (2A, 3A, 10A) \quad (2A, 3B, 8A) \quad (2A, 3B, 8B) \quad (2A, 3B, 10A) \\ (2A, 3B, 11A) \quad (2A, 4A, 5A) \quad (2A, 4A, 6A) \quad (2A, 4A, 6B) \quad (2A, 4A, 8A) \quad (2A, 4B, 6A) \\ (2A, 4B, 6B) \quad (2A, 4B, 8B) \quad (2A, 5A, 5A) \quad (2A, 5A, 6A) \quad (2A, 6A, 6A) \quad (2B, 3A, 8A) \\ (2B, 3A, 8B) \quad (2B, 3A, 10A) \quad (2B, 3A, 11A) \quad (2B, 3B, 8A) \quad (2B, 3B, 8B) \quad (2B, 4A, 5A) \\ (2B, 4A, 6A) \quad (2B, 4A, 6B) \quad (2B, 4A, 8A) \quad (2B, 4A, 8B) \quad (2B, 4A, 10A) \quad (2B, 4A, 11A) \\ (2B, 4B, 5A) \quad (2B, 4B, 6A) \quad (2B, 4B, 6B) \quad (2B, 4B, 8A) \quad (2B, 4B, 8B) \quad (2B, 4B, 10A) \\ (2B, 4B, 11A) \quad (2B, 5A, 5A) \quad (2B, 5A, 6B) \quad (2B, 5A, 8A) \quad (2B, 5A, 8B) \quad (2B, 6B, 6B) \\ (2B, 6B, 8A) \quad (2B, 6B, 8B) \quad (2B, 8A, 8A) \quad (2B, 8B, 8B) \quad (3A, 3A, 4A) \quad (3A, 3A, 4B) \\ (3A, 3A, 5A) \quad (3A, 3A, 6B) \quad (3A, 3A, 8A) \quad (3A, 3A, 8B) \quad (3A, 3B, 4A) \quad (3A, 3B, 4B) \\ (3A, 4A, 4A) \quad (3A, 4A, 4B) \quad (3A, 4A, 5A) \quad (3A, 4A, 6B) \quad (3A, 4A, 8A) \quad (3A, 4B, 4B) \\ (3A, 4B, 5A) \quad (3A, 4B, 6B) \quad (3A, 4B, 8B) \quad (3B, 4A, 4A) \quad (3B, 4B, 4B) \quad (4A, 4A, 4A) \\ (4A, 4A, 4B) \quad (4A, 4A, 5A) \quad (4A, 4A, 6B) \quad (4A, 4A, 8A) \quad (4A, 4A, 4B) \quad (4B, 4B, 4B) \\ (4B, 4B, 5A) \quad (4B, 4B, 6B) \quad (4B, 4B, 8B). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Conder // Bull. London Math. Soc. 1991. V. 23. № 5. P. 445–453. [2] R. Ree // J. Combin. Theory Ser. A. 1971. V. 10. P. 174–175. [3] A. M. Macbeath // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. № 1. P. 103–108. [4] H. M. Farkas, I. Kra. Riemann Surfaces. New York: Springer-Verlag, 1980. [5] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. ATLAS of Finite Groups. Eynsham: Oxford Univ. Press, 1985.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nikolai_adrianov@cnit.msu.ru

Принято редколлегией
01.04.2004