Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Арнольд, Ю. Ю. Бахтин, Е. И. Динабург, Регулярность решений системы Навье–Стокса на плоскости, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:06:57

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА НА ПЛОСКОСТИ

М. Д. Арнольд, Ю. Ю. Бахтин, Е. И. Динабург

В данной заметке мы рассматриваем задачу Коши для системы Навье–Стокса на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$, записанной в виде уравнения для вихря $\omega: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} + u_1(x, t) \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x_1} + u_2(x, t) \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$\omega(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x_2}, \quad (2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x, t)| = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x). \quad (4)$$

Здесь пространственная переменная x принадлежит евклидову пространству $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, переменная $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ – время, $u: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ – бездивергентное (т.е. $\langle \nabla, u \rangle = 0$) поле скоростей, $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – завихренность внешней силы, $\nu > 0$ – вязкость, а $\omega_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – начальное условие. Теория существования и единственности решений задачи Коши для системы Навье–Стокса на $\mathbb{R}^2$ была развита в работах Ж. Лерэ и О. А. Ладыженской, см. обзор [1].

Следующая теорема существования и единственности для задачи (1)–(4) на вихрь скорости была получена в [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ и все вторые производные ω_0 равномерно гёльдеровы в $\mathbb{R}^2$ с некоторым показателем $\lambda > 0$. Пусть также $T > 0$ таково, что $f \in L^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, где $Q_T = \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, и f локально гёльдерова с тем же показателем λ по пространственным переменным при любом $t \in [0, T]$. Тогда существует ограниченное классическое решение ω задачи Коши (1)–(4) на $[0, T]$. Все производные решения, вводящие в постановку задачи Коши, ограничены и непрерывны на Q_T . Это решение единственно в классе ограниченных функций. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} [\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\omega(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}] \\ & \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + T\|f\|_{L^\infty(Q_T)} + \|f\|_{L^1(Q_T)} \end{aligned}$$

и при всех t имеет место следующее представление (закон Био–Савара):

$$u(\cdot, t) = K * \omega(\cdot, t), \quad (5)$$

где $*$ обозначает свертку, $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$, а $x^\perp = (-x_2, x_1)$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Этот результат позволяет рассматривать однозначно определенное глобальное (т.е. заданное на $\mathbb{R}_+$) решение ω . Задача (1)–(4) рассматривалась также, например, в [3], [4], [5], [6], где тоже были получены некоторые условия, обеспечивающие существование и единственность решения.

Наша основная теорема связана с изучением регулярности решения $\omega(x, t)$ в терминах его преобразования Фурье $\widehat{\omega}(k, t)$ в условиях теоремы 1. Мы переносим результаты о регулярности и технику со случая системы на двумерном торе, рассматривавшейся в [7], на случай неперiodических решений на $\mathbb{R}^2$.

Работа второго автора частично поддержана Фондом содействия отечественной науке и грантом МК-2475.2004.1 Президента РФ, работа третьего автора – РФФИ, проект 02-01-00158.

Введем для произвольной функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ обозначения:

$$|f|_{\gamma, \alpha} = \sup_k \frac{|f(k)|}{(1 \wedge |k|^{-\gamma})e^{-\alpha|k|}}, \quad \alpha \geq 0, \quad \gamma > 0,$$

$$|f|_{\gamma} = |f|_{\gamma, 0}, \quad \gamma > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть начальное условие ω_0 и вихрь силы f удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть, кроме того, и при некотором $\gamma > 0$ выполнено $|\widehat{\omega}_0|_{\gamma} < \infty$ и при некоторых $\alpha > 0$, $C > 0$ и всех $t > 0$ выполнено $|\widehat{f}(\cdot, t)|_{\gamma, \alpha} \leq C$. Тогда существуют непрерывные неубывающие положительные при $t > 0$ функции $\beta(t)$ и $D(t)$ такие, что решение ω задачи Коши (1) с начальным условием ω_0 удовлетворяет неравенству

$$|\widehat{\omega}(\cdot, t)|_{\gamma, \beta(t)} \leq D(t).$$

При этом найдутся такие положительные константы B и T , что $\beta(t) = Bt$ при $t \in [0, T]$ и $\beta(t) \equiv BT$ при $t \geq T$. Функцию $D(t)$ можно выбрать линейной при $t \geq T$. Если внешняя сила отсутствует, то функцию $D(t)$ можно выбрать постоянной при $t \geq T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условии этой теоремы $\gamma > 4$, то условия теоремы 1 выполнены автоматически.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Таким образом, если преобразование Фурье начального данного убывает степенным образом при $|k| \rightarrow \infty$, то в любой положительный момент времени преобразование Фурье решения убывает на бесконечности уже экспоненциально, т.е. само решение аналитично.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае отсутствия внешних сил аналитичность решения при $t > 0$ доказана в [8].

Доказательство теоремы 2 основано на изучении системы уравнений, описывающих эволюцию преобразования Фурье вихря:

$$\frac{\partial \widehat{\omega}(k, t)}{\partial t} = -\nu |k|^2 \widehat{\omega}(k, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\omega}(l, t) \widehat{\omega}(k-l, t) \frac{\langle k, l^{\perp} \rangle}{|l|^2} dl + \widehat{f}(k, t), \quad (6)$$

и следующей оценке нелинейного члена в (6):

ЛЕММА 1. Обозначим $D_v = |v|_{\gamma} \vee \|v\|_{L^2}$ для функции $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$. Тогда для некоторой константы $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\gamma)$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} v(l) w(k-l) \frac{\langle k, l^{\perp} \rangle}{|l|^2} dl \right| \leq \begin{cases} \mathcal{Q} D_v D_w |k|^{1-\gamma} \sqrt{1 + \ln |k|}, & |k| \geq 1, \\ \mathcal{Q} D_v D_w, & |k| < 1. \end{cases} \quad (7)$$

Авторы благодарны Я. Г. Синаю за постановку задачи и внимание к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская // УМН. 2003. Т. 58(2). С. 45–78. [2] F. J. McGrath // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 27. P. 329–348. [3] M. Ben-Artzi // Arch. Ration. Mech. Anal. 1994. V. 128(4). P. 329–358. [4] H. A. Biagioni, T. Gramchev // Mat. Contemp. 1996. V. 10. P. 1–20. [5] Y. Giga, T. Miyakawa, H. Osada // Arch. Ration. Mech. Anal. 1988. V. 104(3). P. 223–250. [6] T. Kato // Differ. Integral Equ. 1994. V. 7. № 3–4. P. 949–966. [7] J. C. Mattingly, Ya. G. Sinai // Commun. Contemp. Math. 1999. V. 1. № 4. P. 497–516. [8] M. Oliver, E. S. Titi // J. Funct. Anal. 2000. V. 172. № 1. P. 1–18.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН, Москва
E-mail: maxim@darnold.dnttm.ru
bakhtin@mccme.ru

Принято редколлегией
01.04.2004