Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Алгебры клеточных коцепей и действия торов, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 05:24:00

АЛГЕБРЫ КЛЕТОЧНЫХ КОЦЕПЕЙ И ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ

И. В. БАСКАКОВ, В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Дано доказательство изоморфизма алгебры *целочисленных* когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ [1] и Тог-алгебры кольца граней симплициального комплекса K . В основе его лежит построение клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta: \mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K$. В клеточных коцепях отсутствует функториальное ассоциативное умножение, так как в общем случае нельзя выбрать соответствующую клеточную аппроксимацию диагонали. Конструкция момент-угол комплекса является функтором из категории симплициальных комплексов в категорию пространств с действием тора. Мы показываем, что в данном специальном случае предлагаемая клеточная аппроксимация диагонали ассоциативна и функториальна относительно отображений момент-угол комплексов, индуцированных симплициальными отображениями. *Кольцом граней* комплекса K на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$ называется градуированное факторкольцо $\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_\omega: \omega \notin K)$ с $\deg v_i = 2$ и $v_\omega = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, где $\omega = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m]$. Пусть BT^m – классифицирующее пространство для m -мерного тора со стандартным клеточным разбиением. Вводится клеточный подкомплекс $DJ(K) := \bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \subseteq BT^m$, где $BT^\sigma = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in BT^m : x_i = pt \text{ при } i \notin \sigma\}$. Используя данную клеточную структуру доказывается изоморфизм колец $H^*(DJ(K)) \cong \mathbb{Z}[K]$ (см. [2; лемма 2.8]). Пусть $D^2 \subset \mathbb{C}$ – единичный диск; положим $B_\omega := \{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m : |z_j| = 1 \text{ при } j \notin \omega\}$. *Момент-угол комплекс* – это T^m -инвариантное подпространство $\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subseteq (D^2)^m$. Как показано в [1; гл. 6], пространства $DJ(K)$ и $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентны пространствам, введенным в [3], что объясняет наши обозначения. Комплексы $\mathcal{Z}_K$ дают важный класс действий тора. Пространство $\mathcal{Z}_K$ является гомотопическим слоем вложения $DJ(K) \hookrightarrow BT^m$; оно возникает также как поверхность уровня отображения моментов при построении *торических многообразий* на основе симплектической редукции и как дополнение *конфигурации координатных подпространств*, определяемой комплексом K , см. [1; §8.2].

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место функториальный по K изоморфизм алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{Z}) \cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], d] \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}),$$

где в центре стоит алгебра когомологий дифференциальной градуированной алгебры с $\deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$, $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

В случае рациональных коэффициентов эта теорема была доказана в [4] применением техники спектральных последовательностей (см. также [1; теорема 7.6, проблема 8.14]). Наш новый метод доказательства использует построение алгебры клеточных коцепей. Недавно мы узнали, что другое доказательство теоремы 1 было независимо получено М. Францем [5; теорема 1.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы докажем лишь первый изоморфизм, так как второй вытекает стандартным образом из рассмотрения резольвенты Кошуля (детали см. в [1]). Введем дополнительную градуировку, положив $\text{bideg } u_i = (-1, 2)$, $\deg v_i = (0, 2)$, и рассмотрим факторалгебру $R^*(K) := \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]/(v_i^2 = u_i v_i = 0, i = 1, \dots, m)$. Пусть $\varrho: \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K] \rightarrow R^*(K)$ – каноническая проекция. Используя конечный аддитивный базис из мономов вида $u_\omega v_\sigma$, где $\omega \subseteq [m]$, $\sigma \in K$ и $\omega \cap \sigma = \emptyset$ в алгебре $R^*(K)$ зададим аддитивное вложение $\iota: R^*(K) \rightarrow \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$, удовлетворяющее соотношению $\varrho \cdot \iota = \text{id}$. Покажем, что ϱ индуцирует изоморфизм когомологий. Для этого построим оператор коцепной гомотопии s такой, что $ds + sd = \text{id} - \iota \cdot \varrho$. В случае $K = \Delta^{m-1}$ (полный симплекс) алгебра $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$ принимает вид $E = E_m = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$, а алгебра $R^*(\Delta^{m-1})$ изоморфна алгебре $R^*(\Delta^0)^{\otimes m}$, где $R^*(\Delta^0) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]/(v^2 = uv = 0)$. Непосредственно проверяется, что для $m = 1$ отображение $s_1: E^{0,*} = \mathbf{k}[v] \rightarrow E^{-1,*}$, определенное по формуле $s_1(a_0 + a_1 v + \dots + a_j v^j) = (a_2 v + a_3 v^2 + \dots + a_j v^{j-1})u$, является необходимой коцепной

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00659 и НШ-2185.2003.1.

гомотопией. Далее по индукции мы можем предположить, что для $m = k - 1$ оператор коцепной гомотопии $s_{k-1}: E_{k-1} \rightarrow E_{k-1}$ уже построен. Так как $E_k = E_{k-1} \otimes E_1$, $\varrho_k = \varrho_{k-1} \otimes \varrho_1$ и $\iota_k = \iota_{k-1} \otimes \iota_1$, отображение $s_k = s_{k-1} \otimes \text{id} + \iota_{k-1} \varrho_{k-1} \otimes s_1$ является коцепной гомотопией между id и $\iota_k \varrho_k$. В случае произвольного комплекса K алгебры $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$ и $R^*(K)$ получаются дополнительной факторизацией алгебр E_m и $R^*(\Delta^{m-1})$ по мономиальному идеалу. Оператор s выдерживает эту факторизацию и определяет искомую коцепную гомотопию.

Рассмотрим клеточное разбиение комплекса $(D^2)^m$, при котором каждый диск D^2 разбивается на клетки 1, T и D размерностей 0, 1 и 2. Таким образом, клетки из $(D^2)^m$ параметризуются словами $\mathcal{T} \in \{D, T, 1\}^m$. Сопоставим каждой паре $\sigma, \omega \subseteq [m]$, $\sigma \cap \omega = \emptyset$ слово $\mathcal{T}(\sigma, \omega)$, имеющее букву D на позициях с номерами из σ и букву T на позициях с номерами из ω . По построению, $\mathcal{T}(\sigma, \omega)$ задает клетку из $\mathcal{Z}_K \subset (D^2)^m$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in K$. Комплекс клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_K)$ имеет аддитивный базис из коцепей вида $\mathcal{T}(\sigma, \omega)^*$. Отсюда видно, что размерности градуированных компонент в $C^*(\mathcal{Z}_K)$ и $R^*(K)$ совпадают. Более того, отображение $g: R^*(K) \rightarrow C^*(\mathcal{Z}_K)$, $u_\omega v_\sigma \mapsto \mathcal{T}(\sigma, \omega)^*$, является изоморфизмом дифференциальных градуированных модулей и индуцирует аддитивный изоморфизм $H[R^*(K)] \cong H^*(\mathcal{Z}_K)$. Для завершения доказательства построим клеточную аппроксимацию $\tilde{\Delta}_K$ диагонального отображения $\Delta: \mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K$ такую, что индуцированное умножение на клеточных коцепях совпадает с умножением в алгебре $R^*(K)$ в силу изоморфизма g . В случае $K = \Delta^0$ имеем $\mathcal{Z}_K = D^2$. Положим $z = \rho e^{i\varphi} \in D^2$ и определим $\tilde{\Delta}: D^2 \rightarrow D^2 \times D^2$ по формуле

$$\tilde{\Delta}(z) = \begin{cases} (1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1), 1) & \text{при } \varphi \in [0, \pi], \\ (1, 1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1)) & \text{при } \varphi \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\tilde{\Delta}$ есть клеточное отображение, переводящее ∂D^2 в $\partial D^2 \times \partial D^2$ и гомотопное Δ в классе таких отображений. Для соответствующего умножения в клеточных коцепях имеет место мультипликативный изоморфизм $R^*(\Delta^0) \rightarrow C^*(D^2)$. Следовательно, и для $K = \Delta^{m-1}$ наше отображение $\tilde{\Delta}: (D^2)^m \rightarrow (D^2)^m \times (D^2)^m$ задает мультипликативный изоморфизм:

$$f: R^*(\Delta^{m-1}) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (v_i^2 = u_i v_i = 0) \longrightarrow C^*((D^2)^m).$$

Из конструкции комплекса $\mathcal{Z}_K$ непосредственно вытекает, что ограничение отображения $\tilde{\Delta}$ на $\mathcal{Z}_K$ дает клеточное отображение $\tilde{\Delta}_K: \mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K$. Следовательно, имеет место мультипликативное отображение $q: C^*((D^2)^m) \rightarrow C^*(\mathcal{Z}_K)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R^*(\Delta^{m-1}) & \xrightarrow{f} & C^*((D^2)^m) \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ R^*(K) & \xrightarrow{g} & C^*(\mathcal{Z}_K) \end{array}.$$

Используя, что p , f и q — кольцевые гомоморфизмы, а p — эпиморфизм, мы получаем, что g является кольцевым гомоморфизмом. Следовательно, g — мультипликативный изоморфизм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Univ. Lecture Ser. V. 24.)
- [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2000. Т. 266. С. 29–50. [3] M. Davis, T. Januszkiewicz // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451.
- [4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131.
- [5] M. Franz. On the integral cohomology of smooth toric varieties // arXiv:math.AT/0308253.