Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Д. В. Занин, Об одном необходимом условии эргодичности квадратичных операторов, определенных на двумерном симплексе, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:23:28

**ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ
ЭРГОДИЧНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ,
ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ**

Н. Н. ГАНИХОДЖАЕВ, Д. В. ЗАНИН

1. Пусть $S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ — $(m-1)$ -мерный симплекс.

Отображение V симплекса S^{m-1} в себя называется квадратичным стохастическим оператором (к.с.о.), если для любого $x \in S^{m-1}$ и для всех $k = 1, \dots, m$ $(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j$, где $p_{ij,k} \geq 0$, $\sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1$ и $p_{ij,k} = p_{ji,k}$ для всех i, j, k . Уламом на основе численных расчетов была сформулирована гипотеза [1], что для любого к.с.о. V имеет место эргодическая теорема, т.е. для любого $x \in S^{m-1}$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k x$. В 1977 году Захаревич [2] доказал, что это гипотеза в общем случае неверна.

К.с.о. V , определенный на S^{m-1} , называется вольтерровским, если $p_{ij,k} = 0$, как только k отлично от i и j , т.е. $k \notin \{i, j\}$.

В данной работе для класса вольтерровских к.с.о., определенных на S^2 , устанавливается необходимое условие того, чтобы имела место эргодическая теорема.

2. Любой вольтерровский к.с.о., определенный на $S^2 = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z = 1\}$, можно представить следующим образом:

$$V : x' = x(1 + ay - bz), \quad y' = y(1 - ax + cz), \quad z' = z(1 + bx - cy), \quad (*)$$

где $a, b, c \in [-1, 1]$.

ТЕОРЕМА. Если для вольтерровского квадратичного стохастического оператора (*) все параметры a, b, c имеют один и тот же знак и все они отличны от нуля, то для него не выполняется эргодическая теорема.

Точки $M_0 = \left(\frac{c}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c}\right)$, $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$, $M_3 = (0, 0, 1)$ являются неподвижными точками к.с.о. V .

ЛЕММА 1. Пусть $M \in \text{Int } S^2$ и $M \neq M_0$. Тогда предельное множество траектории точки M бесконечно и лежит на границе симплекса S^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(M) = x^c y^b z^a$, где $M = (x, y, z)$. Тогда $\frac{f(VM)}{f(M)} = (1 + ay - bz)^c (1 - ax + cz)^b (1 + bx - cy)^a \leq \left(1 + \frac{1}{a+b+c} [c(ay - bz) + b(-ax + cz) + a(bx - cy)]\right)^{a+b+c} = 1$, так что $f(V^k M)$ убывает с ростом k . Нетрудно показать, что $f(V^k M)$

сходится к нулю, т.е. предельное множество лежит на ∂S^2 . Так как вольтерровские операторы оставляют неподвижными вершины и инвариантными ребра S^2 , то предельное множество не может быть конечным.

Введем следующие обозначения: $G_1 = \{(x, y, z) \in S^2 : x \succ y \succ z\}$, $G_2 = \{x \succ z \succ y\}$, $G_3 = \{z \succ x \succ y\}$, $G_4 = \{z \succ y \succ x\}$, $G_5 = \{y \succ z \succ x\}$, $G_6 = \{y \succ x \succ z\}$, где " $x \succ y$ " означает, что $bx \geq cy$, " $x \succ z$ " означает, что $ax \geq cz$ и " $y \succ z$ " означает, что $by \geq cz$.

ЛЕММА 2. Для любой точки $M \in G_1$, отличной от неподвижной, маршрут ее движения по S^2 задается диаграммой $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_4 \rightarrow G_5 \rightarrow G_6 \rightarrow G_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $M \in G_1$ координаты точки $VM = (x', y', z')$ удовлетворяют неравенствам $x' \geq x$, $y' \leq y$, $z' \geq z$, так что $VM \in G_1 \cup G_2$. Тогда после некоторого времени траектория попадает в G_2 . Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Выберем теперь такую окрестность U_0 точки M_0 , что $U_0 \subset \text{Int } S^2$ и $U_1 = (G_1 \cup G_2) \setminus U_0$, $U_2 = (G_3 \cup G_4) \setminus U_0$, $U_3 = (G_5 \cup G_6) \setminus U_0$ были выпуклыми и $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$.

© Н. Н. Ганиходжаев, Д. В. Занин 2004

ЛЕММА 3. Пусть $M \notin U$, $V^k M \in U$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и $V^{n+1} M \notin U$, где U – одна из областей U_i , $M \in \text{Int } S^2$ и $M \neq M_0$. Тогда $n \geq A \ln \frac{B}{f(VM)}$, где A, B – абсолютные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $U = U_1$. Тогда $M \notin U_1$, откуда $M \in G_6$, т.е. $y \succ x \succ z$. Так как $VM \in U_1$, то $x' \succ y' \succ z'$, откуда $x' \geq \frac{\min(a, b, c)}{a + b + c} = \alpha$.

а) $\frac{y'}{x'} \geq \min_{M \in G_6} \frac{y'}{x'} = \beta \geq 0$. Очевидно, $\beta \neq 0$, так как если $\beta = 0$, то существует $M \in G_6$, для которой $\frac{y'}{x'} = 0$, т.е. $y(1 - ax + cz) = 0$. Если $y = 0$, то $y \succ x \succ z$, откуда $x = z = 0$, что невозможно. Если $1 - ax + cz = 0$, то $z = 0$, $ax = 1$, т.е. $a = x = 1$, откуда $y = 0$, но $y \succ x$, что невозможно.

б) Положим $V^k M = (x_k, y_k, z_k)$. Так как $V^{n+1} M \notin U_1$, то $z_{n+1} \succ x_{n+1} \succ y_{n+1}$, откуда $z_{n+1} \geq \frac{\min(a, b, c)}{a + b + c} = \alpha$.

в) $\frac{z_{n+1}}{z_1} = \prod_{k=1}^n \frac{z_{k+1}}{z_k} = \prod_{k=1}^n (1 + bx_k - cy_k) \leq 2^n$. Тогда $2^n \geq \frac{z_{n+1}}{z_1} \geq \frac{\alpha}{z_1} = \left(\frac{\alpha^a}{z_1^a}\right)^{1/a} = \left(\frac{\alpha^a x_1^c y_1^b}{f(VM)}\right)^{1/a} \geq \left(\frac{\alpha^a \beta^b x_1^{b+c}}{f(VM)}\right)^{1/a}$, откуда $n > A \ln \frac{B}{f(VM)}$.

ЛЕММА 4. Пусть U – одна из областей U_i , $M \in \text{Int } S^2$, $M \neq M_0$. Пусть $\{n_i, m_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность натуральных чисел таких, что $V^{n_i} M \in U$, $V^{n_i+k} M \in U$ для $k = 1, \dots, m_i$ и $V^{n_i+m_i+1} M \notin U$. Тогда существует c такое, что $m_i > cn_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = \max_{S^2 \setminus U_0} (1 + ay - bz)^c (1 - ax + cz)^b (1 + bx - cy)^a < 1$. Применим лемму 3 с учетом того, что $\frac{1}{f(VM)} > C(M_0) \rho^{n_i}$, где $n = m_i$, а C зависит от M_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что для любой точки $M \in \text{Int } S^2$, $M \neq M_0$, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k M = M^*$. Пусть $M^* \notin U_1$, $\{n_i, m_i\}$ – такие, как в лемме 4. Пусть $\delta = \text{dist}(M^*, U_1)$ и $\text{dist}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n V^k M, M^*\right) < \frac{\delta}{e}$ при достаточно больших n . Так как $\lambda_i = \frac{m_i}{n_i} > c$, то для $M' = \frac{1}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i} V^k M\right) + \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1}{m_i} \sum_{k=n_i+1}^{n_i+m_i} V^k M\right)$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}(M', M^*) &\geq \text{dist}\left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i} V^k M, M'\right) - \frac{\delta}{e} \\ &= \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \text{dist}\left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} V^k M, \frac{1}{m_i} \sum_{k=n_i+1}^{n_i+m_i} V^k M\right) - \frac{\delta}{e} \geq \frac{c}{1 + c} \text{dist}\left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} V^k M, U_1\right) - \frac{\delta}{e} \\ &\geq \frac{c}{1 + c} \left(\text{dist}(M^*, U_1) - \frac{\delta}{e}\right) - \frac{\delta}{e} = \left(\frac{c}{1 + c} - \frac{1}{e} \frac{2 + c}{1 + c}\right) \delta > \frac{\delta}{e} \end{aligned}$$

для достаточно больших e , что приводит к противоречию. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. Улам. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. [2] М. И. Захаревич // УМН. 1978. Т. 33. № 6. С. 207–208.

Принято редколлегией
01.04.2004