Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Новые структуры Мори на двойном пространстве индекса 2,
УМН, 2004, том 59, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:42:39

НОВЫЕ СТРУКТУРЫ МОРИ НА ДВОЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИНДЕКСА 2

М. М. Гриненко

Пусть V – трехмерное неособое многообразие Фано основной серии индекса 2 и степени 2 над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Такое многообразие часто называют двойным пространством индекса 2, поскольку оно обладает морфизмом $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ степени 2, разветвленным над неособой кватрикой $Q \subset \mathbb{P}^3$. Мы полагаем $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}H$, $K_V \sim -2H$ и $H^3 = 2$. Напомним, что прямой на многообразии Фано называется неособая рациональная кривая степени 1 (относительно пересечения с порождающей группы Пикара). С каждой точкой $A \in V$, не лежащей над дивизором ветвления, связан единственный (всегда неприводимый) эффективный дивизор $G_A \sim 2H$ такой, что $\text{mult}_A G_A = 3$; этот дивизор является квазисечением расслоения на эллиптические кривые, получаемого раздутием точки A и сопряженной с ней относительно морфизма π точки.

Будем говорить, что точка A , не лежащая над дивизором ветвления, является *специальной*, если для некоторой поверхности $S \in |H|$, содержащей точку A , кривая $G_A|_S = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ составлена из различных прямых; при этом A будем называть 3- или 4-*специальной* в зависимости от того, чему равно число $\text{mult}_A G_A|_S$: трем или четырем. Отметим, что 3-специальные точки расположены на некоторой алгебраической поверхности на V , а 4-специальные точки – на некоторой кривой. В дальнейшем будем полагать, что поверхность S неособа вдоль прямых l_i .

С каждой 3-специальной точкой связана перестройка $V \dashrightarrow X$ на многообразии Фано $X = X_{3,3} \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$, являющееся полным пересечением двух кубик, а с каждой 4-специальной точкой – перестройка $V \dashrightarrow U$ на расслоение $U/\mathbb{P}^1$ на поверхности дель Пеццо степени 2 с одним кратным слоем, при этом X и $U/\mathbb{P}^1$ лежат в категории Мори.

Перестройка $V \dashrightarrow X = X_{3,3} \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$. Пусть точка $A \in S$ является 3-специальной, $G_A|_S = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$, $A \notin l_4$. На поверхности S (а это поверхность дель Пеццо степени 2) выполняется $l_i \cdot l_j = 1$ при $i \neq j$ и $l_i^2 = -1$. Из конструкции инволюции Бертини, связанной с точкой A , легко следует существование единственной кривой q степени 3 (относительно антиканонического дивизора) такой, что $\text{mult}_A q = 2$. Далее, если раздуть точку A на V , то собственный прообраз S высечет на исключительной плоскости некоторую прямую, которую мы обозначим p . Пара (A, p) определяет взвешенное раздутие $\varphi_1: V_1 \rightarrow V$ точки A с весами $(1, 1, 2)$ и исключительным дивизором E_1 , изоморфным квадратичному конусу; геометрически φ_1 может быть получено так: мы раздуваем точку A , затем прямую p и стягиваем собственный прообраз исключительной плоскости. Заметим, что V_1 имеет циклическую фактор-особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ в вершине конуса E_1 .

Перестройка $V \dashrightarrow X$ является линком Саркисова типа Пи получается последовательностью бирациональных преобразований

$$V \xleftarrow{\varphi_1} V_1 \xrightarrow{\psi_1} V_2 \xrightarrow{\psi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_2} V_4 = X,$$

где (всюду далее верхние индексы у кривых и дивизоров обозначают собственный прообраз на соответствующем многообразии V_i):

- 1) отображение ψ_1 является антифлипом Франчи (Francia), выполненным одновременно в кривых l_1^1, l_2^1 и l_3^1 , нормальные пучки которых изоморфны $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ (отметим, что S^1 не проходит через фактор-особенность на V_1);
- 2) отображение ψ_2 является флопом с центром в кривой q^2 , имеющей нормальный пучок $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$;

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00441, НШ-489.2003.1, Фонда содействия отечественной науке и государственной программы “Современные проблемы теоретической математики”.

- 3) морфизм φ_2 является дивизориальным стягиванием в категории Мори поверхности S^3 в особую точку типа cD_4 .

Существование указанных отображений несложно проверяется при помощи так называемой “двухлучевой игры” на конусах Мори. Дополнительно укажем следующее. Поверхность S^3 является поверхностью дель Пеццо степени 2 и получается из S раздутием точки A с последующим стягиванием собственных прообразов кривых l_1^1, l_2^1, l_3^1 и q , причем кривая l_4^3 обильна на S^3 и, более того, порождает экстремальный луч конуса $\overline{NE}(V_3)$. По данным (V_3, S^3) стягивание φ_2 устанавливается однозначно ввиду результатов работы [1]. Можно показать, что $V_4 = X$ является полным пересечением двух кубических гиперповерхностей в $\mathbb{P}(1^5, 2)$. Таким образом, X является многообразием Фано индекса 1 с фактор-особенностью $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и точкой типа cD_4 .

Любопытно, но из существования перестройки $V \dashrightarrow X$ несложно вывести, что V бирационально изоморфно трехмерной кватерке с плоскостью и cD_4 -точкой вне плоскости.

Перестройка $V \dashrightarrow U/\mathbb{P}^1$. Относительно поверхности S и прямых l_i на ней можно сказать то же, что и выше, с той лишь разницей, что теперь $A \in l_4$. Как и в предыдущем случае, выделим “бесконечно близкую” прямую p (но только теперь еще и собственный прообраз G_A содержит p) и соответствующее взвешенное раздутие $\varphi_1: V_1 \rightarrow V$. Перестройка $V \dashrightarrow U$ является линком Саркисова типа I и разлагается в композицию

$$V \xleftarrow{\varphi_1} V_1 \xrightarrow{\psi} V_2 = U,$$

где ψ является антифлипом Франчи одновременно во всех кривых l_i^1 . Существование такого антифлипа устанавливается так же, как и выше. Важное наблюдение заключается в том, что $G_A^1 \sim 2S^1$ и $G_A^2 \cap S^2 = \emptyset$. Отсюда немедленно вытекает существование морфизма $\rho: V_2 = U \rightarrow \mathbb{P}^1$ такого, что $G_A^2 \sim 2S^2 \sim F$, где F — класс слоя ρ . Легко подсчитать, что G_A^2 будет поверхностью дель Пеццо степени 2, а S^2 — поверхностью дель Пеццо степени 1. Таким образом, $U/\mathbb{P}^1$ является расслоением на поверхности дель Пеццо степени 2 с одним слоем кратности 2 с носителем S^2 . Многообразие U имеет пять фактор-особенностей типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, четыре из которых лежат в кратном слое, а одна — на G_A^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отображения $V \dashrightarrow X$ и $V \dashrightarrow U/\mathbb{P}^1$ позволяют легко построить примеры линейных систем V с бесконечно близкими максимальными особенностями, определяемыми парами (A, p) (точка и бесконечно близкая прямая). Для этого достаточно взять собственные прообразы обильных линейных систем с X или U . Например, собственный прообраз $|\mathcal{O}_X(2)|$ на V будет подсистемой в $|6H|$, имеющей кратность 5 в точке A и кратность 5 вдоль p . В случае 4-специальной точки собственный прообраз $|-K_U + F|$ даст подсистему в $|4H|$ с кратностью 4 в точке A и кратностью 3 вдоль p . Вероятно, если не считать $\mathbb{P}^3$, это первый случай, когда удалось явным образом предъявить линейные системы с бесконечно близкими максимальными особенностями на трехмерном проективном многообразии. Наконец, заметим, что вполне естественный список структур Мори на двойном пространстве индекса 2, предложенный автором в работе [2], необходимо расширить с учетом новых структур, описанных в настоящей заметке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Ю. Фёдоров. Чисто логтерминальные раздутия индекса 2 // Матем. сб. 2004 (в печати). [2] M. M. Grinenko. Birational models of del Pezzo fibrations // math.AG/0209394 (to appear in London Math. Soc. Lecture Note Ser.).

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: grin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
01.04.2004