Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Архимедовы полициклы, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:48:49

АРХИМЕДОВЫ ПОЛИЦИКЛЫ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Назовем (r, q) -полициклом, $r \geq 3, q \geq 3$, двумерное многообразие, склеенное из r -угольников так, что степени внутренних вершин равны q , а степени граничных вершин $\leq q$. Назовем (r, q) -полицикл *обычным*, если он плоский и просто-связный. В [1]–[6] мы изучали обычные (не только конечные, но и бесконечные) полициклы. Любой из них является клеточным комплексом, см. [6] (клетки замкнуты [7]). Назовем (r, q) -полицикл P соответственно i -изогональным, j -изоэдральным, k -изотоксальным (коротко i -IG, j -IH, k -IT), если группа $\text{Aut } P$ имеет всего i орбит на вершинах, j орбит на гранях, k орбит на ребрах. Ясно, что 1-IG влечет j -IH и k -IT с $j, k \leq q$, 1-IH влечет k -IT и i -IG с $k, i \leq r$, 1-IT влечет i -IG и j -IH с $i, j \leq 2$. Вместе с (r, q) -полициклом P неразветвленная накрывающая $\tilde{P}$ также является (r, q) -полициклом. Накрывающее отображение $\varphi: \tilde{P} \rightarrow P$ и нетривиальный автоморфизм $h: P \rightarrow P$ порождают накрывающее отображение $h\varphi$ (сначала φ , затем h). Если накрывающая является универсальной, т.е. $\tilde{P} = \hat{P}$, то в силу ее единственности существует такой автоморфизм $\hat{h}: \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, при котором $h\varphi = \varphi\hat{h}$. Представим полицикл P как факторизацию универсальной накрывающей $\hat{P}$ по ее группе скольжений $\hat{N}$. Получим $\text{Aut } P \simeq \hat{H}/\hat{N}$, где $\hat{H}$ – нормализатор группы $\hat{N}$ в группе $\text{Aut } \hat{P}$. Полицикл P (относительно группы $H = \text{Aut } P$) является i -IG, j -IH, k -IT в точности с теми же значениями i, j, k , что и полицикл $\hat{P}$ относительно группы $\hat{H} \subseteq \text{Aut } \hat{P}$. Назовем (r, q) -полицикл P *правильным*, если он 1-IG, 1-IH, 1-IT одновременно. Ясно, что отдельный r -угольник является обычным правильным (r, q) -полициклом с особым параметром $q = 2$ (это моноцикл); все разбиения (r^q) суть¹ правильные (r, q) -полициклы, причем они обычные в случае плоскости и необычные в случае сферы; назовем их *тривиальными* полициклами.

ТЕОРЕМА 1. Все вершины правильного нетривиального полицикла внутренние.

Лишь 9 правильных полициклов – 5 платоновых тел и 4 разбиения проективной плоскости – накрываются сферой. Универсальная накрывающая любого другого (r, q) -полицикла является обычным полициклом. В частности, если полицикл P обычный, то $\hat{P} = P$. Если же (r, q) -полицикл P не является обычным или одним из указанных 9, то универсальная накрывающая $\hat{P}$, ее группа скольжений $\hat{N}$ и группа $\text{Aut } \hat{P}$ являются бесконечными.

Данная заметка посвящена *архимедовым*, т.е. 1-изогональным, (r, q) -полициклам.

ТЕОРЕМА 2. Реберный остов произвольного обычного нетривиального архимедова (r, q) -полицикла представляет собою бесконечный внешнепланарный граф.

Если все вершины архимедова (r, q) -полицикла P являются внутренними (сюда относятся все нетривиальные регулярные полициклы), то он представляет собою конечную или бесконечную поверхность без края. Его универсальная накрывающая $\hat{P}$ имеет вид (r^q) . Группа $\text{Aut}(r^q)$ есть коксетеровская группа $T^*(2, q, r)$. Теперь о перечислении. Пусть $\hat{H}$ – некоторая подгруппа группы $T^*(2, q, r)$, транзитивная на вершинах разбиения (r^q) , а $\hat{N}$ – некоторый ее нормальный делитель без кручения. Тогда факторизация полиэдра $\hat{P} = (r^q)$ по группе $\hat{N}$ представляет собою некоторый (r, q) -полицикл P . И так получают все P . Примерами таких (r, q) -полициклов служат поверхности “регулярных тороидов”, данных в работе [8]: на рис. 2 (полиэдр Чазара), 8, 9а, 16 (карта Хивуда) все они 1-IG, 1-IH, 1-IT; на рис. 1, 7, 9b, 10, 11, 12 они 1-IG, 1-IH, 2-IT; на рис. 13 и рис. 14 они 1-IG, 1-IH, 3-IT.

Если все вершины архимедова (r, q) -полицикла P являются граничными (всякий такой нетривиальный полицикл является k -IT с $k \geq 2$), то он представляет собою конечную или бесконечную поверхность с краем. Связная компонента края есть цикл C_n длины n , где $n = r$, или $r \neq n \leq \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803), Фонда поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

¹Через (r^q) обозначаются правильные разбиения сферы и плоскости Евклида или Лобачевского.

Заклеив отверстия полицикла n -угольниками, при $n = r$ мы получим описанный выше архимедов (r, q) -полицикл без края с универсальной накрывающей (r^q) , а при $r \neq n \leq \infty$ получим некоторый архимедов полиэдр без края, чья универсальная накрывающая есть архимедово разбиение сферы или плоскости. Наоборот, удаление граней возвращает нас к исходному полициклу. Операция удаления граней может быть применена для конструирования таких полициклов. Так, например, один из архимедовых $(4, 4)$ -полициклов получается из архимедова многогранника (3.4^3) при удалении треугольных граней. Два архимедова $(4, 4)$ -полицикла получаются из квадратной решетки (4^4) при удалении тех квадратов, центры которых составляют квадратную или ромбическую подрешетку индекса 4. Универсальные накрывающие дают еще два архимедова $(4, 4)$ -полицикла. Среди их факторизаций содержатся все правильные $(4, 4)$ -полициклы с краем.

ТЕОРЕМА 3. *Каждый обычный нетривиальный 1-ИН, но не 1-ИТ, архимедов (r, q) -полицикл представляет собою универсальную накрывающую правильного разбиения, продырявленного при усечении вершин, или боковой поверхности антипризмы.*

Среди нетривиальных архимедовых (r, q) -полициклов с $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ только 4 являются замкнутыми – это факторизации поверхностей октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра по центральной симметрии. Все остальные обладают краем.

ТЕОРЕМА 4. *Все нетривиальные архимедовы $(4, 3)$ -полициклы с краем суть:*

- (i) *боковые поверхности n -угольных призм, $1 \leq n < \infty$, и их универсальная накрывающая, $n = \infty$ (при $n = 1$ и $n = 2$ это не квадрильяжи, при $n = 4$ полицикл расширяем);*
- (ii) *факторизации полициклов серии (i) при четных n по центральной симметрии (неориентируемы, при $n = 2$ и $n = 4$ не квадрильяжи, при $n = 4$ полицикл расширяем).*

ТЕОРЕМА 5. *Все нетривиальные архимедовы $(3, 4)$ -полициклы с краем суть:*

- (i) *боковые поверхности n -угольных антипризм и их универсальная накрывающая (при $n = 1$ и $n = 2$ это не триангуляции, при $n = 3$ полицикл расширяем);*
- (ii) *факторизации полициклов серии (i) при $n \equiv 1 \pmod{2}$ по центральной симметрии (неориентируемы, при $n = 1$ и $n = 3$ не триангуляции, при $n = 3$ полицикл расширяем).*

ТЕОРЕМА 6. *Все нетривиальные архимедовы $(3, 5)$ -полициклы с краем суть:*

- (i) *скрученные² разбиения (n^3) с удаленными n -угольными гранями, $2 \leq n < \infty$, и их универсальная накрывающая, $n = \infty$ (при $n = 3$ полицикл расширяем);*
- (ii) *факторизации полициклов серии (i) при $6 \leq n \leq \infty$ (они ориентируемы).*

Факторизация додекаэдра – единственный нетривиальный архимедов $(5, 3)$ -полицикл. Нетривиальных архимедовых $(3, 3)$ -полициклов нет. Любой архимедов (r, q) -полицикл с краем допускает каждую из трех метрик постоянной кривизны – локально сферическую, локально евклидову, локально гиперболическую. Замкнутый допускает только одну.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 159–160. [2] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 179–180. [3] М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. №2. С. 155–156. [4] М. Deza, M. I. Shtogrin // J. Geom. Phys. 2002. V. 40. №3–4. P. 302–319. [5] М. Деза, М. И. Штогрин // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 127–145. [6] М. Деза, М. И. Штогрин. Метрика постоянной кривизны на полициклах // Матем. заметки (в печати). [7] Г. Зейферт, В. Трельфалль. Топология. М.–Л.: ОНТИ, 1938. [8] L. Szilassi // Symmetry Cult. Sci. 2000. V. 11. №1–4. P. 317–335.

LIGA, ENS, Paris and Institute of Statistical Mathematics, Tokyo;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: Michel.Deza@ens.fr, stogrin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
01.04.2004

²Случаи $n = 3, 4, 5$ соответствуют известным скрученным тетраэдру, кубу, додекаэдру.