Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Егоров, К теории характеристических функций, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:10:57

К ТЕОРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. В. ЕГОРОВ

Плотностью распределения вероятностей будем называть произвольную функцию вещественного переменного $p(x)$, удовлетворяющую условиям неотрицательности $p(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$. Характеристической функцией плотности $p(x)$ называется функция $f(t)$, определенная равенством $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$. Из условия нормировки следует равенство $f(0) = 1$.

К С. Н. Бернштейну восходит теорема о представлении вполне монотонных функций. Наиболее простое доказательство предложено в книге [1, с. 495].

ТЕОРЕМА (С. Н. Бернштейн). *Функция $p(\lambda)$ на полуоси $(0, \infty)$ является преобразованием Лапласа некоторого распределения вероятностей тогда и только тогда, когда она вполне монотонна, т.е. имеет производные всех порядков и $(-1)^n p^{(n)}(\lambda) \geq 0$, $\lambda > 0$, и $p(0) = 1$.*

Из этой теоремы выведем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *На вещественной оси рассмотрим бесконечно дифференцируемую и абсолютно интегрируемую четную функцию $\varphi(t)$, которая принимает вещественные значения. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\varphi^{(m)}(t)t^{-2} = O(1)$, $t \rightarrow \infty$, и преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R})$. Функция $\varphi(t)$ является характеристической тогда и только тогда, когда*

- 1) для всех $0 < \delta < \infty$ и всех $p = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$\Theta_p(\delta) = (-1)^p \int_0^\infty \frac{1}{\delta + t^2} \varphi^{(2p)}(t) dt \geq 0,$$

$$\Psi_p(\delta) = (-1)^{p+1} \int_0^\infty \frac{1}{\delta + t^2} \varphi^{(2p+1)}(t) t dt \geq 0;$$

- 2) удовлетворяется равенство $\varphi(0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях нашей теоремы функция $\varphi(t)$ является характеристической тогда и только тогда, когда $\varphi(0) = 1$ и функция $\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} \varphi(t) dt$ неотрицательна для всех $\omega \in \mathbb{R}$. Действительно, в силу теоремы обращения для преобразований Фурье функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ задает плотность распределения вероятностей, соответствующего характеристической функции $\varphi(t)$. Здесь использована абсолютная интегрируемость $\varphi(t)$. В силу четности, $\varphi(t) = \varphi(-t)$, эту формулу можно записать так $\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \cos(\omega t) dt$. Согласно теореме С. Н. Бернштейна функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ тогда и только тогда неотрицательна на полуоси $[0, \infty)$, когда ее преобразование Лапласа $\pi \cdot \mathbf{L}\widehat{\varphi}(\omega) = \Phi(\lambda) = \pi \int_0^\infty \widehat{\varphi}(\omega) \exp(-\lambda\omega) d\omega$ оказывается вполне монотонной функцией. Напомним, что гладкая функция $\Phi(\lambda)$ называется *вполне монотонной*, если при $0 < \lambda < \infty$ все ее четные производные $\Phi^{(2p)}(\lambda)$ неотрицательны, а все нечетные $\Phi^{(2p+1)}(\lambda)$ неположительны.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \pi \cdot \mathbf{L}\widehat{\varphi}(\omega) &= \Phi(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t) \cos(\omega t) dt \exp(-\lambda\omega) d\omega \\ &= \int_0^\infty \varphi(t) \int_0^\infty \cos(\omega t) \exp(-\lambda\omega) d\omega dt, \\ \int_0^\infty \cos(\omega t) \exp(-\lambda\omega) d\omega &= -\frac{\lambda \cos(t\omega) - t \sin(t\omega)}{\exp(\lambda\omega)(\lambda^2 + t^2)} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \\ \Phi(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования обосновано, поскольку при фиксированном значении λ внутренние интегралы сходятся равномерно по параметрам в любом конечном промежутке, а повторные интегралы сходятся абсолютно в силу абсолютной интегрируемости функции $\varphi(t)$. Поэтому выполнены условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов [2; с. 715].

Интегрируя по частям при фиксированном $\lambda > 0$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi(t) dt = - \int_0^\infty \varphi(t) d \operatorname{arctg}_* \left(\frac{\lambda}{t} \right) \\ &= -\varphi(t) \operatorname{arctg}_* \left(\frac{\lambda}{t} \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \operatorname{arctg}_* \left(\frac{\lambda}{t} \right) \varphi'(t) dt = \frac{\varphi(0)\pi}{2} + \int_0^\infty \operatorname{arctg}_* \left(\frac{\lambda}{t} \right) \varphi'(t) dt.\end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{arctg}_*(\lambda/t)$ — гладкая функция на $[0, \infty)$, равная $\operatorname{arctg}(\lambda/t)$ при $t > 0$ и $\pi/2$ при $t = 0$.

Дифференцируя интеграл по параметру λ , получим выражение для первой и второй производной. Эта операция законна, так как подынтегральная функция и ее частная производная по λ непрерывны по совокупности переменных ($\lambda > 0$) и продифференцированный интеграл равномерно сходится по признаку Вейерштрасса ввиду абсолютной интегрируемости $\varphi(t)$,

$$\Phi'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t}{\lambda^2 + t^2} \varphi'(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \varphi'(t) t dt, \quad \Phi''(\lambda) = - \int_0^\infty \frac{2\lambda t}{(\lambda^2 + t^2)^2} \varphi'(t) dt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям

$$\begin{aligned}\Phi''(\lambda) &= \int_0^\infty \varphi'(t) d \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} = \varphi'(t) \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi''(t) dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi''(t) dt.\end{aligned}$$

Заметим, что здесь использовано равенство $\varphi'(0) = 0$.

Мы видим периодичность, состоящую в инвариантности формы функции $\Phi(\lambda)$ при повторном дифференцировании. Ее вторая производная задается интегралом такого же вида, но с обратным знаком и подынтегральная функция $\varphi(t)$ заменяется на $\varphi''(t)$.

Функция $\varphi''(t)$ четна, бесконечно дифференцируема, и все рассуждения могут быть повторены. Член вида $\varphi^{(2p+1)}(t) \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \Big|_0^\infty$ исчезает в силу наложенных на $\varphi(t)$ условий четности и роста на бесконечности. Рекурсивно вычисляем последовательность производных

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)}(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(0)}(t) dt, & \Phi^{(1)}(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(1)}(t) t dt, \\ \Phi^{(2)}(\lambda) &= - \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(2)}(t) dt, & \Phi^{(3)}(\lambda) &= - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(3)}(t) t dt \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda > 0$ знак четной производной $\Phi^{(2p)}(\lambda)$ совпадает со знаком функции $\Theta_p(\lambda) = (-1)^p \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(2p)}(t) dt$, а знак нечетной производной $\Phi^{(2p+1)}(\lambda)$ противоположен знаку функции $\Psi_p(\lambda) = (-1)^{p+1} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + t^2} \varphi^{(2p+1)}(t) t dt$. Полная монотонность преобразования Лапласа, равносильная неотрицательности плотности $\widehat{\varphi}(\omega)$ и характеристичности $\varphi(t)$, эквивалентна системе неравенств $\Theta_p(\delta) \geq 0$, $\Psi_p(\delta) \geq 0$, $p = 0, 1, 2, \dots$, где $\delta = \lambda^2$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А. Н. Ширяеву и А. С. Черному за обсуждение результата данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
[2] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1969.