Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Сбалансированные базисы инволютивного типа, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:17:08

СБАЛАНСИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ ИНВОЛЮТИВНОГО ТИПА

Д. Н. ИВАНОВ

1. В статье [1] приводится конструкция сбалансированных базисов в алгебрах матриц нечетного примарного порядка. Она опирается на существование в таких алгебрах ортогонального базиса из инволюций с одинаковым следом. В данной статье показывается, как использовать это обстоятельство для построения сбалансированных базисов в алгебрах матриц нечетного порядка. Кроме этого, обобщается известная теорема, утверждающая, что порядок регулярной матрицы Адамара¹ равен квадрату суммы элементов ее строки.

2. Напомним основное определение, которое впервые появилось в работе [2]. Всюду далее под *алгеброй* понимается ассоциативная полупростая конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, т.е. то, что обычно называют классически полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$. Обозначим через $\text{Tr}_A = \text{Tr}$ след регулярного (правого или левого) представления алгебры $\mathbf{A}$, $\text{Tr}_A x$ будем называть *регулярным следом* элемента $x \in \mathbf{A}$; как обычно, следом матрицы A будем называть сумму ее диагональных элементов и обозначать $\text{tr } A$; $\mathbf{1}_A$ – единичный элемент в $\mathbf{A}$. Элементы $x, y \in \mathbf{A}$ будем называть *ортогональными*, если $\text{Tr}_A xy = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство идемпотентов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ в алгебре $\mathbf{A}$ (здесь $\dim \mathbf{A} > 1$) называется *сбалансированной t -системой*, если выполнены следующие два условия:

- (1) (условие сбалансированности) $e_1 + \dots + e_v = k \cdot \mathbf{1}_A, k \in \mathbb{C}$;
- (2) (условие равноугольности) для любых s различных идемпотентов $e_{i_1}, \dots, e_{i_s} \in \mathcal{E}$, где $s \leq t$, значение функции следа

$$\text{Tr}_A e_{i_1} \cdots e_{i_s} = \lambda_s$$

зависит только от s .

Если сбалансированная 2-система $\mathcal{E}$ является базисом алгебры $\mathbf{A}$, то $\mathcal{E}$ называется *сбалансированным базисом*, а $\mathbf{A}$ называется *сбалансированной алгеброй*.

ЛЕММА 1. Пусть попарно ортогональные инволюции $\{\sigma_i, i \in I\}$ с одинаковым регулярным следом образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Тогда семейства идемпотентов $\mathcal{E}^+ = \{(\mathbf{1}_A + \sigma_i)/2, i \in I\}$ и $\mathcal{E}^- = \{(\mathbf{1}_A - \sigma_i)/2, i \in I\}$ являются сбалансированными базисами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейства идемпотентов $\mathcal{E}^\pm$, о которых идет речь в лемме 1, называются *сбалансированными базисами инволютивного типа*.

Отметим, что если $\mathbf{A}$ – коммутативная алгебра размерности n , то $\mathbf{A}$ допускает сбалансированный базис инволютивного типа тогда и только тогда, когда существует регулярная матрица Адамара порядка n . Хорошо известно, что в этом случае n должно быть квадратом четного числа, равного сумме элементов строки матрицы Адамара. Предполагается, что при всех таких n регулярные матрицы Адамара порядка n существуют.

В статье [1] приводится следующая конструкция сбалансированных базисов инволютивного типа в алгебрах матриц нечетного примарного порядка.

Определим $(p \times p)$ -матрицы D, P и $J_{a,b}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \varepsilon^2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{a,b} = D^a P^b,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00219).

¹Под регулярной матрицей Адамара H понимается квадратная матрица с попарно ортогональными строками, состоящая из ± 1 и такая, что сумма элементов каждой строки в H постоянна.

где ε — примитивный корень степени p из 1. Удобно рассматривать a и b как элементы поля вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. С каждым вектором $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \in V = \mathbb{F}_p^{2n}$ свяжем матрицу $J_u = J_{a_1, b_1} \otimes \dots \otimes J_{a_n, b_n}$. Пусть $u' = (a'_1, \dots, a'_n; b'_1, \dots, b'_n) \in \mathbb{F}_p^{2n}$. Тогда $J_u J_{u'} = \varepsilon^{B(u, u')} J_{u+u'}$, где $B(u, u') = -\sum_{i=1}^n a'_i b_i$; $J_u J_{u'} J_u^{-1} = \varepsilon^{\langle u | u' \rangle} J_{u'}$, где $\langle u | u' \rangle = \sum_{i=1}^n (a_i b'_i - a'_i b_i) = B(u, u') - B(u', u)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. *Инволютивные матрицы*

$$A_x = \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u | x \rangle + \frac{1}{2} B(u, u)} J_u, \quad x \in \mathbb{F}_p^{2n},$$

где суммирование ведется по всем $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^{2n}$, имеют одинаковый регулярный след ($\text{Tr } A_x = p^n \text{tr } A_x = p^n$) и образуют ортогональный базис в алгебре $M_{p^n}(\mathbb{C})$, p — нечетное простое.

ЛЕММА 2. Пусть в алгебрах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ существуют ортогональные базисы из инволюций с одинаковым регулярным следом: $\mathbf{A} = \langle A_i, i \in I \rangle$, $\mathbf{B} = \langle B_j, j \in J \rangle$, $\text{Tr}_{\mathbf{A}} A_i = r_a$, $\text{Tr}_{\mathbf{B}} B_j = r_b$. Тогда инволюции $\{A_i \otimes B_j, i \in I, j \in J\}$ образуют ортогональный базис алгебры $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ и имеют одинаковый регулярный след $\text{Tr}_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}} A_i \otimes B_j = r_a r_b$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть попарно ортогональные инволюции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ с одинаковым регулярным следом r образуют базис алгебры $\mathbf{A}$. Тогда $n = r^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая единичный элемент $\mathbf{1}_A$ по базису $\{\sigma_i\}$ и используя ортогональность инволюций, выводим

$$\mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sigma_i \Rightarrow r = \text{Tr}(\mathbf{1}_A \cdot \sigma_j) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = c_j \cdot \text{Tr} \sigma_j^2 = c_j \cdot \text{Tr} \mathbf{1}_A = c_j n \Rightarrow c_j = \frac{r}{n}.$$

Далее, применяя к обеим частям равенства $\mathbf{1}_A = (r/n) \sum_{i=1}^n \sigma_i$ функцию Tr , получаем $n = (r/n) \cdot rn$. Значит, $n = r^2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Алгебра матриц $M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда допускает сбалансированный базис инволютивного типа, когда n нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M_k(\mathbb{C}) \otimes M_l(\mathbb{C}) \cong M_{kl}(\mathbb{C})$, то существование сбалансированного базиса инволютивного типа в алгебре матриц $M_n(\mathbb{C})$, где n нечетно, вытекает из предложения 1 и леммы 2.

Обратно, если инволютивные матрицы A_i с одинаковым регулярным следом $\text{Tr } A_i = r$ образуют ортогональный базис алгебры $M_n(\mathbb{C})$, то в силу теоремы 1 $r = n$. Значит, $\text{tr } A_i = (1/n) \text{Tr } A_i = 1$. Но след инволютивной матрицы имеет ту же четность, что и ее порядок. Поэтому n нечетно. Теорема доказана.

Отметим, что алгебра $M_2(\mathbb{C})$ сбалансирована (см. [2]), но кроме нее пока не известно ни одной сбалансированной алгебры матриц четного порядка.

Автор благодарен проф. М. В. Зайцеву и проф. А. В. Михалеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Н. Иванов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 4. С. 73–86. [2] Д. Н. Иванов // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 83–102.