Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, Ядро Коши для DN-дискретного комплексного анализа Новикова–Дынникова на треугольной решетке, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:09:23

Ядро Коши для DN-дискретного комплексного анализа Новикова–Дынникова на треугольной решетке

П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков

В XX веке были развиты несколько дискретных аналогов классического (одномерного) комплексного анализа. Наибольшие продвижения были достигнуты в линейной теории дискретных голоморфных функций на квадратной решетке и в нелинейной дискретизации конформных отображений (см. [1]–[4] и цитируемую там литературу). Настоящая заметка посвящена альтернативной дискретизации на треугольной решетке, предложенной С. П. Новиковым и И. А. Дынниковым (DN-исчисление) и основанной на идеях теории интегрируемых систем (см. [5] и цитируемую там литературу). Основной целью настоящей работы является построение убывающего на бесконечности дискретного аналога ядра Коши, которое не удалось авторам работы [5]. При этом мы используем некоторые идеи работ [2], [3].

В работе [5] решетка $\mathbb{L} \approx \mathbb{Z}^2$, являющаяся дискретизацией $\mathbb{C}$, и операторы Q , Q^+ , являющиеся дискретными аналогами ∂ , $\bar{\partial}$, имеют следующий вид:

$$Q = (1 + t_1 + t_2),$$

$$Q^+ = (1 + t_1^{-1} + t_2^{-1}),$$

где t_1, t_2 – операторы сдвига:

$$(t_1 f)(n_1, n_2) = f(n_1 + 1, n_2),$$

$$(t_2 f)(n_1, n_2) = f(n_1, n_2 + 1).$$

Важная отличительная особенность данной дискретизации состоит в том, что все три оператора Q , Q^+ и $L = QQ^+$ (дискретный лапласиан) вещественны и действуют на функциях, определенных на одной и той же решетке $\mathbb{L}$, и не редуцируются на подрешетки.

Ключевым инструментом классической теории аналитических функций является ядро Коши $1/(\pi z)$, являющееся убывающей функцией Грина оператора $\bar{\partial}$. Аналог ядра Коши для дискретизации работы [5] дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Функция*

$$G(\vec{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)}}{1 + e^{-ik_1} + e^{-ik_2}} dk_1 dk_2, \quad \vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{L},$$

является единственным убывающим на бесконечности и всюду ограниченным решением уравнения $Q^+ G(\vec{n}) = \delta(\vec{n})$, $\vec{n} \in \mathbb{L}$, где $\delta(\vec{n}) = \delta_{n_1}^0 \delta_{n_2}^0$. При этом

$$Q^m G(\vec{n}) = \frac{(\sqrt{3})^m m!}{2\pi} \left[\frac{\alpha^{n_1+2n_2}}{(i\alpha^2 n_2 - i\alpha n_1)^{m+1}} + \frac{\alpha^{2n_1+n_2}}{(-i\alpha n_2 + i\alpha^2 n_1)^{m+1}} \right] + o\left(\frac{1}{|\vec{n}|^{m+1}}\right),$$

$|\vec{n}| \rightarrow \infty$, $m \geq 0$, $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{2\pi i/3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение убывающих на бесконечности функций Грина для некоторых других дискретных аналогов оператора $\bar{\partial}$ методом преобразования Фурье (использованного в теореме 1) было осуществлено ранее в [2], [3]. Асимптотическая формула из теоремы 1 для $m = 0$ имеет аналог в работе [2].

На некоторых специальных прямых из $\mathbb{L}$ дискретное ядро Коши теоремы 1 выражается простыми явными формулами:

$$G(-1, n) = G(-1, -n) = G(n, -1) = G(-n, -1)$$

$$= G(n, -n) = G(-n, n) = \begin{cases} 1/3, & n = 0, \\ (\alpha^{2n} - \alpha^n)/(2\pi i n), & n \neq 0. \end{cases}$$

Используя данное представление, можно рекуррентно вычислить G на всей решетке. При этом убывание функции Грина на бесконечности влечет серию алгебраических аппроксимаций числа π .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f(\vec{n})$ – всюду ограниченная функция на $\mathbb{L}$ и $f(\vec{n}) = o(1)$, $Q^+f(\vec{n}) = O(1/|\vec{n}|^{1+\varepsilon})$ при $|\vec{n}| \rightarrow \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда имеет место следующий дискретный аналог формулы Коши–Грина:

$$f(\vec{n}) = \sum_{\vec{l} \in \mathbb{L}} G(\vec{n} - \vec{l})(Q^+f)(\vec{l}), \quad \vec{n} \in \mathbb{L}.$$

Дискретная формула Коши–Грина следствия 1 имеет аналоги в работах [2], [3] для рассматриваемых там дискретизаций на квадратной решетке. Если функция f рассматривается только на некоторой ограниченной области решетки $D \subset \mathbb{L}$, то в дискретной формуле Коши–Грина полагается, что $f \equiv 0$ на $\mathbb{L} \setminus D$. В этом случае на границе D возникает дискретный аналог классического контурного интеграла Коши.

СЛЕДСТВИЕ 2 (дискретная теорема Лиувилля). Пусть $Q^+f(\vec{n}) = 0$ и $|f(\vec{n})| \leq c|\vec{n}|^{k+\varepsilon}$ для некоторых c, k, ε , где $c > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ и $0 \leq \varepsilon < 1$, и для всех $\vec{n} \in \mathbb{L}$. Тогда $Q^{k+1}f \equiv 0$ на $\mathbb{L}$, т.е. f является многочленом степени не выше k (в смысле [5]).

Как показано в [5], пространство многочленов степени не выше k имеет размерность $2k + 2$. Отметим также, что для $\varepsilon = 0$ следствие 1 имеет аналог в [2] для рассматриваемой там дискретизации на квадратной решетке.

В качестве базиса многочленов удобно рассматривать $\operatorname{Re} p_m$, $\operatorname{Im} p_m$, где

$$p_m = \partial_\kappa^m P|_{\lambda=0}, \quad P = \alpha^{n_1+2n_2}(1-\lambda)^{-n_1}(1+\alpha\lambda)^{-n_2},$$

$$\kappa = 1 + \frac{\alpha}{1-\lambda} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha\lambda}, \quad \partial_\kappa = \frac{1}{\partial\kappa/\partial\lambda} \cdot \partial_\lambda, \quad m \geq 0$$

и α то же, что и в теореме 1. Для данного базиса имеет место равенство

$$Qp_m = p_{m-1}.$$

Функция P является естественным аналогом классической экспоненты $e^{\kappa z}$:

$$Q^+P = 0, \quad QP = \kappa P.$$

По поводу аналога голоморфной экспоненты на квадратной решетке см. [2].

Авторы выражают благодарность С. П. Новикову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] J. Ferrand, *Bull. Sci. Math.* (2), **68** (1944), 152–180. [2] R. J. Duffin, *Duke Math. J.*, **23**:2 (1956), 335–363. [3] A. S. Fokas, R. G. Novikov, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **313**:2 (1991), 75–80. [4] A. I. Bobenko, Ch. Mercat, Yu. B. Suris, *J. Reine Angew. Math.*, **583** (2005), 117–161. [5] I. A. Dynnikov, S. P. Novikov, *Mosc. Math. J.*, **3**:2 (2003), 419–438.

П. Г. Гриневич (P. G. Grinevich)

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

25.07.2007

Р. Г. Новиков (R. G. Novikov)

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН;
CNRS – Laboratoire de Mathématiques Jean Leray,
Département de Mathématiques, Université Nantes

E-mail: novikov@math.univ-nantes.fr