Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Зак, Квазитривиальность форм многообразий Се-
гре, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:23:32

Квазитривиальность форм многообразий Сегре

Н. Ф. Зак

Пусть X – многообразие, определенное над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Соответствующее многообразие $X \times_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{k}}$ поля $\mathbb{k}$ мы будем обозначать через $\bar{X}$, говоря, что X является формой $\bar{X}$ и всех изоморфных ему над $\bar{\mathbb{k}}$ многообразий. Пусть $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ – группа Галуа. В [1]) доказывается

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть на многообразии X есть $\mathbb{k}$ -точка. Тогда имеет место изоморфизм групп $\text{Pic}(X) \simeq \text{Pic}^G(\bar{X})$ и всякая Галуа-инвариантная линейная система порождается дивизорами, определенными над $\mathbb{k}$. Кроме того, Галуа-инвариантная часть очень обильной линейной системы задает вложение над $\mathbb{k}$.*

Хорошо известно (см. [2]), что всякая форма X проективного пространства $\mathbb{P}^n$ квазитривиальна, более того, теорема Севери–Брауэра утверждает, что из наличия $\mathbb{k}$ -точки на X следует изоморфизм $X \simeq_{\mathbb{k}} \mathbb{P}^n$. Аналогичный результат неверен для произведений проективных пространств. Мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая форма X многообразия $S = \mathbb{P}^{a_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{a_n}$ квазитривиальна.*

Рациональность S можно (хотя, конечно, это далеко не простейший способ) доказать с помощью следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим стандартное вложение S по Сегре. Выберем в каждом i -м сомножителе гиперплоскость H_i и рассмотрим подмногообразия $\mathcal{P}_{ij} = \mathbb{P}^{a_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{a_{i-1}} \times H_i \times \mathbb{P}^{a_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{a_{j-1}} \times H_j \times \mathbb{P}^{a_{j+1}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{a_n}$, $i < j$. Проекция $\pi_L: S \dashrightarrow \mathbb{P}^{\sum a_i}$ из проективной оболочки L объединения $\mathcal{P} = \bigcup \mathcal{P}_{ij}$ бирациональна. В частности, если S и L определены над $\mathbb{k}$, то проекция π_L бирациональна над $\mathbb{k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность проекции $\pi_L: S \dashrightarrow \mathbb{P}^{\sum a_i}$ проверяется прямым подсчетом размерности L . Заметим, что через любые две точки $p, q \in S$ проходит подмногообразие $S_1 = T_1 \times \cdots \times T_n \subset S$, где $T_i = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{a_i}$, поэтому, ввиду конечности общего слоя π_L , достаточно доказать бирациональность проекции $\pi_L: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ для общей точки p и произвольной точки q . Заметим, что в этом случае $\mathcal{P} \cap S_1 = \bigcup P_{ij}$ и, более того, $L \cap S_1 = \bigcup P_{ij}$, где

$$P_{ij} = T_1 \times \cdots \times T_{i-1} \times p_i \times T_{i+1} \times \cdots \times T_{j-1} \times p_j \times T_{j+1} \times \cdots \times T_n, \quad i < j,$$

а $p_i = H_i \cap T_i$. Следовательно, нам достаточно проверить бирациональность проекции $\pi_{L_1}: S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, где L_1 – линейная оболочка объединения $P = \bigcup P_{ij}$. Рассмотрим общую точку $q = q_1 \times \cdots \times q_n \in S_1$. Пусть $Q_i = T_1 \times \cdots \times T_{i-1} \times q_i \times T_{i+1} \times \cdots \times T_n$, а $P_j = T_1 \times \cdots \times T_{j-1} \times p_j \times T_{j+1} \times \cdots \times T_n$. Рассмотрим n линейно независимых гиперплоских сечений $\mathcal{H}_i \subset S_1$, содержащих L_1 и q : $\mathcal{H}_i = Q_i \cup P^i$, где $P^i = \bigcup_{j \neq i} P_j$. Пусть $\mathcal{H} = \bigcap \mathcal{H}_i$. Тогда бирациональность проекции π_{L_1} эквивалентна тому, что $\mathcal{H} \cap S_1 = \{q\} \cup P$. Рассмотрим точку $r = r_1 \times \cdots \times r_n \in \mathcal{H} \cap S_1$. Поскольку $r \in Q_i \cup P^i$, то либо $r_i = q_i$, либо $r_k = p_k$ для некоторого k . Если для всех i справедлива первая альтернатива, то $r = q$. Если же $r_k = p_k \neq q_k$, то, поскольку $r \in Q_k \cup P^k$, для некоторого $l \neq k$ выполнено $r_l = p_l$, а значит, $r \in P_{kl} \subset P$, что доказывает бирациональность π_{L_1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку группа Галуа не может переставлять стягивания на многообразия разных размерностей, $\mathbb{k}$ -форма X многообразия S изоморфна произведению $\mathbb{k}$ -форм многообразий $S_i = \mathbb{P}^{a_i} \times \cdots \times \mathbb{P}^{a_i}$ и нам достаточно доказать квазитривиальность этих сомножителей. Рассмотрим многообразие $S = \mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{P}^n$. Линейная система, вкладывающая S по Сегре, пропорциональна каноническому классу K_S , а значит, Галуа-инвариантна. Поэтому, согласно утверждению 1,

можно считать, что $\bar{X}$ вложено по Сегре. Мы построим Галуа-инвариантное объединение $\bigcup H_i$, тогда $\bigcup \mathcal{P}_{ij}$ также будет Галуа-инвариантно, и по теореме Севери–Брауэра из предложения 3 будет следовать квазитривиальность X . Обозначим через $\mathcal{L}_i$ линейную систему, определяющую естественную проекцию S на i -й сомножитель. Пусть $\mathbb{k}_i \supset \mathbb{k}$ – минимальное поле, над которым определена линейная система $\mathcal{L}_i$. Выберем (с помощью утверждения 1) определенный над $\mathbb{k}_1$ дивизор D_1 вида $H_1 \times \mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n$ в соответствующей Галуа-инвариантной линейной системе. Заметим, что орбита O_1 дивизора D_1 под действием G состоит из дивизоров D_i таких, что при $i \neq j$ $D_i \sim D_j$ в группе $\text{Pic}(\bar{X})$. Действительно, в противном случае нашлись бы такой элемент $g \in G$, что $g(D_i) \neq D_i$, но $g(D_i) \sim D_i$ для некоторого i , и такой сопряженный ему элемент $h \in G$, что $h(D_1) \neq D_1$, но $h(D_1) \sim D_1$. Поскольку в этом случае h тождественно действует на $\mathbb{k}_1$, а D_1 определен над $\mathbb{k}_1$, мы приходим к противоречию. Если в орбите O_1 нет дивизора из линейной системы $\mathcal{L}_j$, рассмотрим орбиту O_j соответствующего дивизора D_j и так далее для всех j . Объединив все такие орбиты, мы получим инвариантный центр проекции L , что доказывает теорему 2.

Докажем следующее обобщение теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякая форма Y общего гиперплоского сечения $W = H \cap S \subset \mathbb{P}^{ab+a+b-1}$ многообразия Сегре $S = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$ квазитривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пара линейных систем, отображающих W на сомножители $\mathbb{P}^a$ и $\mathbb{P}^b$, является Галуа-инвариантной (группа Галуа может лишь переставлять проекции на разные сомножители в случае $a = b$). Следовательно, естественное вложение $W \hookrightarrow S$ Галуа-инвариантно, а значит, согласно утверждению 1, можно считать, что $\bar{Y} = W = H \cap S \subset \mathbb{P}^{ab+a+b-1}$, где S и H определены над $\mathbb{k}$. Рассмотрим общий инвариантный центр L проекции $\pi_L: S \dashrightarrow \mathbb{P}^{a+b}$ и бирациональную проекцию

$$\pi_{L_H}: S \dashrightarrow Q \subset \mathbb{P}^{a+b+1}$$

с центром $L_H = L \cap H$ на гиперповерхность $Q \subset \mathbb{P}^{a+b+1}$. Над $\bar{\mathbb{k}}$ через каждую точку $p \in L_H \cap S$ проходит $(a+b-2)$ -мерное семейство подмногообразий вида $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset S$, и при проекции π_{L_H} общее такое подмногообразие переходит в плоскость на Q . Таким образом, Q содержит $(2(a+b)-5)$ -мерное семейство плоскостей, а его гиперплоское сечение $Q_H = \pi_{L_H}(W)$ имеет размерность $a+b-1$ и содержит $(2(a+b-1)-3)$ -мерное семейство прямых. Поэтому, согласно [3], гиперповерхность Q_H является либо квадрикой, либо рациональным (ввиду рациональности W) скроллом в $\mathbb{P}^{a+b}$. Квазитривиальность квадрики хорошо известна. Пусть Q_H является рациональным скроллом. Ввиду общности L , из наличия $\mathbb{k}$ -точки на W следует наличие гладкой $\mathbb{k}$ -точки на Q_H . В этом случае Q_H является расслоением на $(a+b-2)$ -мерные проективные пространства над $\mathbb{P}^1$, сечение к которому доставляет общее проективное пространство коразмерности $a+b-2$. Таким образом, гиперповерхность Q_H квазитривиальна, а значит, многообразие W также квазитривиально.

Автор выражает благодарность С.С. Галкину, С.О. Горчинскому, Ф.Л. Заку, В.А. Исковских, Ю.Г. Прохорову и К.А. Шправову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Grothendieck, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1961, №8, 1–222; 11, 349–511.
[2] Ю.И. Манин, М.А. Цфасман, *УМН*, 41:2 (1986), 43–94. [3] B. Segre, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), 5 (1948), 193–197; 275–280.

Н. Ф. Зак (N. F. Zak)
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: nzak@mccme.ru

Представлено В.М. Бухштабером
Принято редколлегией
06.06.2007