Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О дистанционных графах, имеющих большое хроматическое число, но не содержащих больших симплексов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:34:58

О дистанционных графах, имеющих большое хроматическое число, но не содержащих больших симплексов

А. М. Райгородский

1. Введение. В настоящей заметке речь пойдет об одном аспекте классической проблемы Нелсона–Эрдёша–Хадвигера в комбинаторной геометрии. Имеется в виду задача о *хроматическом числе пространства* $\mathbb{R}^n$, т. е. о наименьшем количестве цветов $\chi(\mathbb{R}^n)$, в которые можно так раскрасить все точки пространства, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1 (см. [1]–[3]). В терминах теории графов, $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathcal{G}_n)$, где $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ – это (бесконечный) граф, у которого $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

Здесь через $\chi(G)$ обозначено *хроматическое число графа* G (см. [4]), а под $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ мы понимаем (евклидово) расстояние между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. *Дистанционным графом* называется любой подграф G в графе $\mathcal{G}_n$, и сам граф $\mathcal{G}_n$ в том числе. Известно, впрочем, что $\chi(\mathcal{G}_n) = \chi(G)$ для некоторого конечного дистанционного графа G (см. [5]), а потому в дальнейшем мы будем фактически говорить лишь о конечных подграфах в $\mathcal{G}_n$.

Задача отыскания оценок для $\chi(\mathbb{R}^n) = \max_{G \subset \mathcal{G}_n} \chi(G)$ исключительно трудна. До сих пор все, что мы знаем о хроматическом числе плоскости, сводится к неравенствам

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$$

(см. [6]), а с ростом размерности зазор увеличивается экспоненциально:

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

(см. [7], [8]).

В серии статей О’Доннелл доказал существование таких дистанционных графов G на плоскости, что $\chi(G) = 4$ и в G нет треугольников (см. [9], [10]). Это достаточно яркий результат, ведь априори весьма непросто представить себе, как должен быть устроен граф $G \subset \mathcal{G}_2$, у которого максимально большое (среди известных) хроматическое число и который в то же время свободен от полных подграфов на (хотя бы) трех вершинах (четырёхвершинных полных подграфов в $\mathcal{G}_2$, впрочем, нет по определению).

Аналогичный вопрос естественно поставить и для случая произвольной размерности: существуют ли такие графы $G \subset \mathcal{G}_n$, что $\chi(G) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$, но что, однако же, в G нет симплексов с $k \geq n$ вершинами? При этом, конечно, $k \leq n$, а в идеале $k = 3$. В следующем пункте мы сформулируем новые теоремы, в которых дается частичный ответ на поставленный вопрос. Кроме того, мы скажем несколько слов о доказательствах теорем.

2. Формулировки результатов и наброски их доказательств.

ТЕОРЕМА 1. *Существует такой граф $G \subset \mathcal{G}_n$, что $\chi(G) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$ и в G нет симплексов с $k \geq cn$ вершинами, где c – абсолютная константа, меньшая единицы.*

ТЕОРЕМА 2. *Существует такой граф $G \subset \mathcal{G}_n$, что $\chi(G) \geq (c + o(1))^n$ и в G нет симплексов с $k \geq f(n)$ вершинами, где c – абсолютная константа, большая единицы, а $f(n) = o(n)$.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00383, гранта Президента РФ МД-4235.2006.1, гранта НШ-1312.2006.1, гранта ИНТАС 03-51-5070, гранта фонда “Династия”.

Преимущество теоремы 1 в том, что граф, существование которого в ней утверждается, имеет (асимптотически) самое большое известное хроматическое число. Что же до теоремы 2, то в ней мы сталкиваемся, по сути, с не слишком значительной потерей в величине $\chi(G)$; при этом, однако, понижение максимальной размерности симплекса, содержащегося в G , весьма ощутимо.

Для доказательства теоремы 1 достаточно взять граф $G = (V, E) \subset \mathcal{G}_n$ с

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-t, 0, t\} \forall i, |\{i : x_i = t\}| = a, |\{i : x_i = -t\}| = b\}, \\ E = \mathcal{E}|_V,$$

где $a = [0.36 \dots n]$, $b = [0.06 \dots n]$ (см. [7]) и величина t выбирается так же, как ее аналог в основной теореме из статьи [7]. Рассматривая этот граф, получаем оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$, и нетрудно показать, что $\omega(G) \leq cn$, $c < 1$ ($\omega(G)$ – это размер самой большой клики в графе G , т.е. число вершин в самом большом симплексе, который содержится в G , см. [4]).

Доказательство теоремы 2 значительно тоньше. Оно осуществляется с помощью сочетания линейно-алгебраического и вероятностного методов в комбинаторике (см. [11], [12]). Грубо говоря, сперва на графе G , описанном выше, или на некотором его аналоге вводится структура, подобная структуре случайного графа в модели $G(m, p)$ (см. [12], [13]). А затем производится достаточно аккуратный анализ того, как много ребер может быть на данном (любом) множестве вершин $W \subset V$, и в результате устанавливается тот факт, что “почти все” подграфы H графа G имеют экспоненциально большие хроматические числа и в то же время для каждого из них $\omega(H) = o(n)$.

Отметим, что доказательство теоремы 2 совершенно неконструктивно и было бы, безусловно, очень интересно получить “эффективизацию” этой теоремы (хотя бы даже ослабив условие экспоненциальности хроматического числа). Также интерес представляет задача построения дистанционных графов с достаточно большим хроматическим и малым “кликковым” числами и с достаточно малым количеством вершин. У графа G , о котором шла речь выше, количество вершин тоже экспоненциально.

Список литературы

- [1] А. Сойфер, Математическое просвещение, третья сер., 8, МЦНМО, М., 2004, 185–221; <http://www.mcme.ru/free-books/matpros9.html>. [2] А. М. Райгородский, УМН, 56:1 (2001), 107–146; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, Russian Math. Surveys, 56:1 (2001), 103–139. [3] L. A. Székely, Paul Erdős and his mathematics, II (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., 11, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666. [4] Ф. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, Graph theory, Addison-Wesley, Reading, MA–Menlo Park, CA–London, 1969. [5] N. G. de Bruijn, P. Erdős, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 54 (1951), 369–373; Indag. Math., 13 (1951), 371–373. [6] H. Hadwiger, Elem. Math., 16 (1961), 103–104. [7] А. М. Райгородский, УМН, 55:2 (2000), 147–148; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, Russian Math. Surveys, 55:2 (2000), 351–352. [8] D. G. Larman, C. A. Rogers, Mathematika, 19 (1972), 1–24. [9] P. O’Donnell, Geombinatorics, 4:1 (1994), 23–29. [10] O’Donnell, Geombinatorics, 5:1 (1995), 31–34. [11] А. М. Райгородский, Линейно-алгебраический метод в комбинаторике, МЦНМО, М., 2007. [12] N. Alon, J. H. Spencer, The probabilistic method, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Intersci., New York, 2000. [13] B. Bollobás, Random graphs, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

А. М. Райгородский (А. М. Raigorodskii)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: araigor@avangard.ru

Представлено В. М. Тихомировым

Принято редколлегией

27.07.2007