Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Уравнения самоподобия и p -радиус операторов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:44:04

Уравнения самоподобия и p -радиус операторов

В. Ю. Протасов

Дано конечное семейство линейных операторов $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ в $\mathbb{R}^d$, задана некоторая норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^d$ и соответствующая операторная норма $\|B\| = \sup_{|x|=1} |Bx|$. Для $k \in \mathbb{N}$ и последовательности $\sigma \in \{1, \dots, m\}^k$ положим $\Pi_\sigma = B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(k)}$ и обозначим $\mathcal{F}_k(p, \mathcal{B}) = [m^{-k} \sum_\sigma \|\Pi_\sigma\|^p]^{1/p}$ при $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{F}_k(\infty, \mathcal{B}) = \max_\sigma \|\Pi_\sigma\|$ (усредненная в L_p норма произведений длины k операторов семейства $\mathcal{B}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. L_p -спектральным радиусом (далее – p -радиусом) семейства $\mathcal{B}$ называется величина $\rho_p = \rho_p(\mathcal{B}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{F}_k(p, \mathcal{B})]^{1/k}$.

Данный предел всегда существует и не зависит от нормы в $\mathbb{R}^d$. При $m = 1$ величины $\rho_p(\mathcal{B})$ равны обычному спектральному радиусу $\rho(B_1)$. Понятие p -радиуса нашло множество применений (см. библиографию в [1]–[6]). Алгоритмы приближенного вычисления ρ_p см. в [4]–[6]. Для целых четных p величина ρ_p вычисляется явно [4].

Для произвольного $u \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathcal{F}_k(p, u) = \mathcal{F}_k(p, \mathcal{B}, u) = [m^{-k} \sum_\sigma |\Pi_\sigma u|^p]^{1/p}$ (с обычным изменением для $p = \infty$). Это – усредненная в L_p норма образа вектора u под действием всевозможных произведений длины k операторов семейства $\mathcal{B}$. Для $k = 1$ полагаем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$: $\mathcal{F}(|\cdot|, p, \mathcal{B}, u) = (m^{-1} \sum_{j=1}^m |B_j u|^p)^{1/p}$, $\mathcal{F}(|\cdot|, \infty, \mathcal{B}, u) = \max_j |B_j u|$. Далее для краткости пишем $\mathcal{F}(|\cdot|, u)$ вместо $\mathcal{F}(|\cdot|, p, \mathcal{B}, u)$. Норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^d$ называется экстремальной для $\mathcal{B}$ и для p , если существует λ такое, что $\mathcal{F}(|\cdot|, u) = \lambda|u|$ при всех $u \in \mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 1. Неприводимое семейство $\mathcal{B}$ для каждого $p \in [1, +\infty]$ имеет экстремальную норму. Для любой экстремальной нормы $\lambda = \rho_p(\mathcal{B})$.

Напомним, что семейство неприводимо, если его операторы не имеют общего нетривиального действительного инвариантного подпространства. Экстремальная норма может быть не единственной.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathcal{B}$ неприводимо, то $\mathcal{F}_k(p, u) \asymp |u|(\rho_p)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{N}$ – множество всех норм в $\mathbb{R}^d$, оно является выпуклым конусом. Имеем отображение конуса $\mathcal{N}$ в себя: $|\cdot| \rightarrow \mathcal{F}(|\cdot|, u)$. По теореме 1 этот нелинейный оператор имеет собственный вектор (возможно, не единственный) с собственным значением $\rho_p(\mathcal{B})$. Таким образом, p -радиус также выражается через собственное значение, хотя и бесконечномерного нелинейного, оператора. Для приводимых операторов инвариантной нормы может не быть, однако имеет место более слабое утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого семейства $\mathcal{B}$ и любого p следующие свойства эквивалентны:

- (a) $\rho_p(\mathcal{B}) < 1$;
- (b) существуют норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^d$ и $\gamma < 1$ такие, что $\mathcal{F}(|\cdot|, u) \leq \gamma|u|$, $u \in \mathbb{R}^d$.

Теорема 1 и предложение 1 (в случае $p = \infty$ они были известны [3]) позволяют получить асимптотику величины $\mathcal{F}_k(p, u)$ при $k \rightarrow \infty$. Для любого семейства $\mathcal{B}$ существует базис в $\mathbb{R}^d$, в котором матрицы B_j имеют блочный ниже-треугольный вид с диагональными блоками $B_j^1, \dots, B_j^n$, причем семейство $\mathcal{B}^i = \{B_1^i, \dots, B_m^i\}$ неприводимо для любого i . Тогда $\rho_p(\mathcal{B}) = \max_i \rho_p(\mathcal{B}^i)$ [4]. Число индексов $i \in \{1, \dots, n\}$, для которых максимум достигается, назовем валентностью $\mathcal{B}$. Для данного $u \in \mathbb{R}^d$ через V_u обозначим наименьшее общее инвариантное подпространство операторов $\mathcal{B}$, содержащее u .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Даны семейство $\mathcal{B}$ и параметр $p \in [1, +\infty]$. Тогда для любого $u \in \mathbb{R}^d$ существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1|u|(\rho_p)^k \leq \mathcal{F}_k(p, u) \leq c_2|u|k^{s-1}(\rho_p)^k$ при всех $k \geq d$, где ρ_p – p -радиус операторов $\mathcal{B}$, ограниченных на V_u , s – их валентность на V_u .

Через $L_p[0, 1]$ обозначаем пространство вектор-функций из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|v\|_p = \left(\int_0^1 |v(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство аффинных операторов $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m\}$, которое будем считать неприводимым (не существует общего инвариантного аффинного подпространства, отличного от $\mathbb{R}^d$). Пусть также дано разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $0 = b_0 < \dots < b_m = 1$; положим $\Delta_k = [b_{k-1}, b_k]$, $r_k = b_k - b_{k-1}$. Аффинная функция $g_k(t) = tb_k + (1-t)b_{k-1}$ отображает $[0, 1]$ в отрезок Δ_k . Рассмотрим аффинный оператор самоподобия $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$[\tilde{\mathbf{A}}v](t) = \tilde{A}_k v(g_k^{-1}(t)), \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

определенный в $L_1[0, 1]$. Уравнение $\tilde{\mathbf{A}}v = v$ называется уравнением самоподобия. Такие уравнения применяются в эргодической теории, теории всплесков, теории приближений и т. д. (см. библиографию в [1], [2], [5], [7]). Большинство классических фрактальных кривых (Кантора, Коха, де Рама и т. д.) являются решениями уравнений самоподобия. Теорема 1 и предложения 1, 2 позволяют получить точный критерий разрешимости этих уравнений в L_p и C и оценить гладкость решений. Для аффинного оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ обозначаем через A его линейную часть; для $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}_+^m$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим $z^\alpha \tilde{\mathcal{A}} = \{z_1^\alpha A_1, \dots, z_m^\alpha A_m\}$. Пусть также $r = (r_1, \dots, r_m)$.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение самоподобия имеет решение $v \in L_1$ тогда и только тогда, когда $\rho_1(\text{tr} \tilde{\mathcal{A}}) < 1$. Это решение единственно.

Если для данного $p \in [1, +\infty]$ выполнено $\rho_p((\text{tr})^{1/p} \tilde{\mathcal{A}}) < 1$, то $v \in L_p$. При $p < \infty$ верно и обратное: из $v \in L_p$ следует $\rho_p < 1$. Из $v \in L_\infty$ следует $\rho_\infty \leq 1$.

Обратимся к непрерывным решениям $v(t)$. Если $\rho_\infty(\tilde{\mathcal{A}}) < 1$, то операторы семейства $\tilde{\mathcal{A}}$ – сжимающие в некоторой норме (предложение 1). В частности, каждый A_j имеет единственную неподвижную точку v_i . Семейство $\tilde{\mathcal{A}}$ удовлетворяет перекрестному условию, если $\tilde{A}_j v_m = \tilde{A}_{j+1} v_1$ для всех $j = 1, \dots, m-1$.

ТЕОРЕМА 3. Решение $v(t)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\rho_\infty(\tilde{\mathcal{A}}) < 1$ и выполнено перекрестное условие. Его показатель Гёльдера α_v является единственным решением уравнения $\rho_\infty(r^{-\alpha} \tilde{\mathcal{A}}) = 1$. Для модуля непрерывности в пространстве $C[0, 1]$ имеем $C_1 h^\alpha \leq \omega(v, h) \leq C_2 |\ln h|^{s-1} h^\alpha$ для любого $h \in (0, 1/2)$, где $\alpha = \alpha_v$, s – валентность семейства $r^{-\alpha} \tilde{\mathcal{A}}$ при $p = \infty$.

Список литературы

- [1] D. Collela, C. Heil, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1994), 496–518. [2] K.-S. Lau, J. Wang, *SIAM J. Math. Anal.*, **26**:4 (1995), 1018–1046. [3] Н. Е. Барабанов, *Автомат. и Телемех.*, 1988, № 5, 17–24. [4] В. Ю. Протасов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:5 (1997), 99–136. [5] В. Ю. Протасов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 123–162. [6] V. D. Blondel, Yu. Nesterov, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **27**:1 (2005), 256–272. [7] M. Solomyak, E. Verbitsky, *Bull. London Math. Soc.*, **27**:3 (1995), 242–248.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protasov@yandex.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
27.07.2007