Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:24:38

Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы

М. В. Шамолин

В работе предлагается новый подход, позволяющий получать интегрируемые случаи в динамике свободного твердого тела, а именно интегрировать динамические уравнения, вложенные в $\mathbb{R}^3 \times so(3)$, в неконсервативном (диссипативном) поле сил.

1. Редуцированные динамические уравнения. Известные редуцированные динамические уравнения движения динамически симметричного твердого тела в диссипативном поле сил [1] имеют следующий вид:

$$\alpha^\bullet \nu \cos \alpha \cos \beta_1 - \beta_1^\bullet \nu \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z \nu \cos \alpha - \sigma \Omega_z^\bullet = 0, \quad (1)$$

$$\alpha^\bullet \nu \cos \alpha \sin \beta_1 + \beta_1^\bullet \nu \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_y \nu \cos \alpha + \sigma \Omega_y^\bullet = 0, \quad (2)$$

$$I_2 \Omega_y^\bullet = -z_N s(\alpha) \nu^2, \quad I_2 \Omega_z^\bullet = y_N s(\alpha) \nu^2. \quad (3)$$

Здесь $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ – тензор инерции, (ν, α, β_1) – сферические координаты характерной его точки, $|\vec{\nu}| = \nu \equiv \text{const}$, $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ – компоненты угловой скорости, $\Omega_x = \Omega_{x_0} \equiv 0$, при этом $y_N = A \sin \alpha \cos \beta_1 + h \Omega_z / \nu$, $z_N = A \sin \alpha \sin \beta_1 - h \Omega_y / \nu$, $s(\alpha) = B \cos \alpha$, $A, B, h, \sigma > 0$.

2. Исследуемая система с переменной диссипацией с нулевым средним.

Система (1)–(3) является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (в данном случае по углу α) [2]. Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции ее правой части, отвечающий за изменение фазового объема (после соответствующего приведения системы), равен нулю. Система является как бы “полуконсервативной”. Если $z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1$, $z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1$, $\sigma h_1 / I_2 = H_1$, $\beta = \sigma^2 AB / I_2$, $\sigma z_k = \nu w_k$, $k = 1, 2$ (при этом $\alpha' = \nu \alpha^\bullet / \sigma$ и т. д.), то получаем опорную систему следующего вида:

$$\alpha' = -(1 + H_1) w_2 + \beta \sin \alpha, \quad (4)$$

$$w_2' = \beta \sin \alpha \cos \alpha - (1 + H_1) w_1^2 \text{ctg} \alpha - H_1 w_2 \cos \alpha, \quad (5)$$

$$w_1' = (1 + H_1) w_1 w_2 \text{ctg} \alpha - H_1 w_1 \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\beta_1' = (1 + H_1) w_1 \text{ctg} \alpha, \quad (7)$$

При $\beta = H_1$ дивергенция правой части независимой подсистемы (4)–(6) ((4)–(7)) после замены переменных $w_1^* = \ln |w_1|$ тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

ТЕОРЕМА 1. Система (4)–(7) обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными (в смысле теории функций комплексного переменного) функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы (4)–(6).

Действительно, сопоставим исследуемой системе два уравнения

$$\frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\beta \sin \alpha \cos \alpha - (1 + H_1) w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha}{-(1 + H_1) w_2 + \beta \sin \alpha}, \quad (8)$$

$$\frac{dw_1}{d\alpha} = \frac{(1 + H_1) w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha}{-(1 + H_1) w_2 + \beta \sin \alpha}. \quad (9)$$

Применяя подстановки $\tau = \sin \alpha$, $w_k = u_k \tau$, $k = 1, 2$, сопоставим системе (8), (9) уравнение

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\beta + (1 + H_1)(u_2^2 - u_1^2) - (H_1 + \beta)u_2}{2(1 + H_1)u_1u_2 - (H_1 + \beta)u_1} \quad (10)$$

и получим цепочку инвариантных соотношений:

$$\frac{(1 + H_1)u_2^2 - (H_1 + \beta)u_2 + (1 + H_1)u_1^2 + \beta}{u_1} = C_1, \quad (11)$$

$$\frac{(1 + H_1)w_2^2 - (H_1 + \beta)w_2 \sin \alpha + (1 + H_1)w_1^2 + \beta \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1, \quad (12)$$

$$\frac{w_2^2 + (1 + \beta)w_1^2 + \beta[w_2 - \sin \alpha]^2}{w_1 \sin \alpha} = C_1. \quad (13)$$

Более того, легко проверить, что и числитель, и знаменатель в левой части (13) являются первыми интегралами системы (4)–(7) при $\beta = H_1$:

$$w_2^2 + (1 + \beta)w_1^2 + \beta[w_2 - \sin \alpha]^2 = C_1^*, \quad w_1 \sin \alpha = C_2^*.$$

В случае же $\beta \neq H_1$ система (4)–(6) перестает быть консервативной. При этом ни числитель, ни знаменатель в левой части инвариантного соотношения (12) первыми интегралами не являются. Последний факт проверять необязательно, поскольку у системы (4)–(6) имеются притягивающие и отталкивающие предельные множества, запрещающие наличие у исследуемой системы полного набора даже непрерывных первых интегралов.

Дополнительный первый интеграл ищется из квадратуры

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{[\beta - (1 + H_1)u_2] du_2}{\beta - (H_1 + \beta)u_2 + (1 + H_1)[u_2^2 - U(u_1, C_1)]},$$

где $U(u_1, C_1) = (2(1 + H_1))^{-1} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4D_1}\}$ на уровне $C_1 > 4(1 + H_1)D_1$ интеграла (12), где $D_1 = (1 + H_1)u_2^2 - (H_1 + \beta)u_2 + \beta$.

Общий структурный вид дополнительного первого интеграла для системы (4)–(6) таков: $\Phi_1(w_1, w_2, \sin \alpha) = C_2$.

Дополнительный первый интеграл системы (4)–(7) найдется так:

$$\frac{du_1}{d\beta_1} + \left[\frac{\beta - (1 + H_1)u_2}{1 + H_1} \right] = u_2 - \frac{H_1}{1 + H_1},$$

$$\sin^2 \{2(1 + H_1)^2(\beta_1 + C_3)\} = \frac{(2(1 + H_1)w_1 - 2C_1 \sin \alpha)^2}{[(H_1 + \beta)^2 - 4\beta(1 + H_1) + C_1^2] \sin^2 \alpha}.$$

3. Смежная задача. Если (ξ, η) – углы, определяющие положение пространственного маятника [3] на сфере S^2 , то уравнения движения такой системы на касательном расслоении T_*S^2 двумерной сферы можно представить в следующем виде:

$$\xi^{\bullet\bullet} + (\beta - H_1)\xi^{\bullet} \cos \xi + \beta \sin \xi \cos \xi - \eta^{\bullet 2} \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \quad (14)$$

$$\eta^{\bullet\bullet} + (\beta - H_1)\eta^{\bullet} \cos \xi + \xi^{\bullet} \eta^{\bullet} \left[\frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} \right] = 0. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Система (4)–(6) траекторно эквивалентна системе (14), (15).

Список литературы

- [1] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **364**:5 (1999), 627–629. [2] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **371**:4 (2000), 480–483. [3] М. В. Шамолин, *УМН*, **54**:5 (1999), 181–182.

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@imec.msu.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
27.07.2007