Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Мирзоев, Многопараметрическая задача Штурма–
Лиувилля. Предельная точка – предельный круг, *УМН*,
2007, том 62, выпуск 6, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:42:56

Многопараметрическая задача Штурма–Лиувилля. Предельная точка – предельный круг

К. А. Мирзоев

1. Пусть $p_1, \dots, p_n$ и q вещественные, локально интегрируемые функции на полуоси $I := [0, +\infty)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – комплексные числа. Как известно, многопараметрическая задача Штурма–Лиувилля

$$y'' + \{\lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_n p_n(x) - q(x)\}y = 0, \quad x \in I, \quad (1)$$

классифицируется следующим образом: если каждое решение y уравнения (1) удовлетворяет условиям

$$\int_0^{+\infty} |p_i(x)y^2(x)| dx < +\infty, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

то говорят, что для уравнения (1) имеет место случай предельного круга; в противном случае говорят, что для уравнения (1) имеет место случай предельной точки (см., например, [1], [2]). Известно также, что эта классификация не зависит от выбора значений параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Таким образом, для уравнения (1) имеет место случай предельного круга в том и только том случае, когда все решения уравнения

$$y'' - q(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (3)$$

удовлетворяют условиям (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $n = 1$ и $p_1(x) = 1$ речь идет, очевидно, об индексах дефекта минимального симметрического дифференциального оператора, порожденного выражением $-y'' + q(x)y$ в пространстве $\mathcal{L}^2[0, +\infty)$.

2. Обозначим через $\mathcal{K}(x, t)$ функцию Коши уравнения (3), т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению (3) и начальным условиям $\mathcal{K}(x, t)|_{x=t} = 0$, $\mathcal{K}'_x(x, t)|_{x=t} = 1$, а через $u(x)$ и $v(x)$ – фундаментальную систему решений того же уравнения с начальными условиями $u(0) = v'(0) = 1$ и $u'(0) = v(0) = 0$. Эти функции связаны соотношением $\mathcal{K}(x, t) = u(t)v(x) - v(t)u(x)$. Применяя это равенство и рассуждая, как в работе [3], можно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы для уравнения (1) имел место случай предельной точки, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности непересекающихся интервалов $(a_m, b_m) \subset I$, $m = 1, 2, \dots$, и для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнялось условие

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \int_{a_m}^{b_m} |p_i(x)| dx \int_{a_m}^x \mathcal{K}^2(x, t) |p_i(t)| dt \right\}^{1/2} = +\infty.$$

3. Применяя теорему 1, докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность непересекающихся интервалов (a_m, b_m) , $m = 1, 2, \dots$, такова, что $q(x) \geq 0$ при $x \in [a_m, b_m]$ и либо

$$\text{а) } \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \int_{a_m}^{b_m} |p_i(x)| dx \int_{a_m}^x (x-t)^2 |p_i(t)| dt \right\}^{1/2} = +\infty,$$

либо

$$\text{б)} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \int_{a_m}^{b_m} |p_i(x)| dx \int_{a_m}^x (x-t)|p_i(t)| dt \int_t^x (x-\tau)q(\tau)(\tau-t) d\tau \right\}^{1/2} = +\infty$$

при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для уравнения (1) имеет место случай предельной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\mathcal{K}(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathcal{K}(x, t) = x - t + \int_t^x (x - \tau)q(\tau)\mathcal{K}(\tau, t) d\tau$$

и поэтому представляется в виде

$$\mathcal{K}(x, t) = x - t + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_t^x \mathcal{K}_m(x, \tau)(\tau - t) d\tau, \quad (4)$$

где $\mathcal{K}_1(x, \tau) = (x - \tau)q(\tau)$, $\mathcal{K}_{m+1}(x, \tau) = \int_\tau^x \mathcal{K}_1(x, \xi)\mathcal{K}_m(\xi, \tau) d\xi$, $m = 1, 2, \dots$, причем ряд (4) абсолютно и равномерно сходится в любом ограниченном множестве из $I \times I$.

Пусть теперь $[a, b] \subset I$ и $q(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Тогда все слагаемые в ряде (4) при $a \leq t \leq x \leq b$ неотрицательны. Таким образом, если в нем отбросить все слагаемые, кроме первого, получим, что

$$\mathcal{K}(x, t) \geq x - t \quad \text{при } a \leq t \leq x \leq b.$$

Если же при условии $q(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, в ряде (4) оставить только первое и второе слагаемое и применить к ним неравенство между арифметическими и геометрическими средними, получаем, что

$$\mathcal{K}(x, t) \geq \sqrt{x - t} \left(\int_t^x (x - \tau)q(\tau)(\tau - t) d\tau \right)^{1/2} \quad \text{при } a \leq t \leq x \leq b.$$

Остается учесть полученные неравенства в теореме 1 и использовать условия а) и б) теоремы 2. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n = 1$ и $p_1(x) = 1$ условие а) совпадает с результатом работы [4], а условие б) с результатом работы [5].

Справедлива также следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность непересекающихся интервалов (a_m, b_m) , $m = 1, 2, \dots$, такова, что

$$\int_{a_m}^{b_m} (x - \tau)q_-(\tau)(\tau - t) d\tau \leq \nu(b_m - a_m), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $q_-(x) = -\min\{q(x), 0\}$, а $\nu \in (0, 1)$ – постоянное число, и пусть выполняется условие а) теоремы 2. Тогда для уравнения (1) имеет место случай предельной точки.

Список литературы

- [1] F. V. Atkinson, *Differential equations*, Proc. Internat. Conf. (Uppsala, 1977), Sympos. Univ. Upsaliensis Ann. Quingentesimum Celebrantis, **7**, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1977, 1–10. [2] P. J. Browne, *J. Differential Equations*, **12** (1972), 81–94. [3] К. А. Мирзоев, УМН, **46:4** (1991), 161–162; англ. пер.: К. А. Mirzoev, *Russian Math. Surveys*, **46:4** (1991), 190–191. [4] Р. С. Исагилов, Докл. АН СССР, **142:6** (1962), 1239–1242; англ. пер.: R. S. Ismagilov, *Sov. Math. Dokl.*, **3** (1962), 279–283. [5] Р. С. Исагилов, УМН, **18:5** (1963), 161–166.

К. А. Мирзоев (K. A. Mirzoev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: karakhan@am.mati.ru

Представлено И. М. Кричевером
Принято редколлегией
27.07.2007