Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, О потенциалах Стокса для скоростей,
УМН, 2007, том 62, выпуск 6, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:33:59

О потенциалах Стокса для скоростей

П. А. Крутицкий

Потенциалы для двумерных уравнений Стокса построены и изучены в [1] в случае замкнутых кривых и непрерывных плотностей в потенциалах. В настоящей заметке рассматриваются потенциалы скоростей, заданные на разомкнутой кривой. При этом плотности в потенциалах принадлежат весовому пространству Гёльдера и могут иметь степенные особенности. В декартовых координатах $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости рассмотрим простую гладкую разомкнутую кривую Γ класса $C^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, параметризованную длиной дуги $s: \Gamma = \{x: x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a, b]\}$. Вектор касательной к кривой Γ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s , обозначим $\tau_s = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_s = (\sin \alpha(s), -\cos \alpha(s))$. При выбранной параметризации $\cos \alpha(s) = x'_1(s)$, $\sin \alpha(s) = x'_2(s)$. Отрезок $[a, b]$ будет также обозначаться Γ . Пусть $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$. Будем говорить, что $\nu(s) \in C_q^\omega[a, b]$, если $\nu_0(s) \in C^{0,\omega}[a, b]$, где $\nu_0(s) = \nu(s)|s-a|^q|s-b|^q$ и $C^{0,\omega}[a, b]$ – класс функций, гёльдеровых с показателем ω .

Рассмотрим Γ как разрез на плоскости. Ту сторону разреза Γ , которая остается слева при возрастании параметра s , будем обозначать Γ^+ , а противоположную сторону будем обозначать Γ^- . Пусть $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ – интегрируемые функции, заданные на $[a, b]$. Введем столбец $\mu(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s))^T$. Цель настоящей заметки – изучить потенциалы скоростей для уравнений Стокса [1], которые можно записать в виде

$$V_1[\mu](x) = \frac{1}{4\pi\eta} \left\{ - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \ln |x - y(\sigma)| d\sigma + \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{1 + \cos(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma + \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\sin(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma \right\},$$

$$V_2[\mu](x) = \frac{1}{4\pi\eta} \left\{ \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\sin(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \ln |x - y(\sigma)| d\sigma + \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{1 - \cos(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma \right\},$$

где $\eta = \text{const}$, $\cos \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_1 - y_1(\sigma)}{|x - y(\sigma)|}$, $\sin \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_2 - y_2(\sigma)}{|x - y(\sigma)|}$,

$$y(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma)) \in \Gamma, \quad |x - y(\sigma)| = \sqrt{(x_1 - y_1(\sigma))^2 + (x_2 - y_2(\sigma))^2}$$

и использованы формулы $\cos(2\psi) = 2\cos^2 \psi - 1 = 1 - 2\sin^2 \psi$, $\sin(2\psi) = 2\sin \psi \cos \psi$.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – разомкнутая кривая класса $C^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$. Кроме того, пусть $\mu_1(\sigma), \mu_2(\sigma) \in C_q^\omega[a, b]$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$. Тогда:

1) функции $V_1[\mu](x)$, $V_2[\mu](x)$ принадлежат $C^0(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, а $\nabla V_1[\mu](x)$ и $\nabla V_2[\mu](x)$ принадлежат $C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X)$, где $X = x(a) \cup x(b)$ – множество концов Γ ;

2) предельные значения нормальной и касательной производных потенциалов $V_1[\mu](x)$ и $V_2[\mu](x)$ на $\Gamma^\pm \setminus X$ даются формулами

$$\frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial \tau_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} = \frac{\partial V_1[\mu](x(s))}{\partial s} = \frac{1}{4\pi\eta} \left\{ - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma + \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00050).

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \Big\}, \\
\frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial \tau_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^{\pm}} &= \frac{\partial V_2[\mu](x(s))}{\partial s} = \frac{1}{4\pi\eta} \Big\{ - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \\
& \times \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \\
& - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \Big\}, \\
\frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^{\pm}} &= \frac{1}{4\pi\eta} \Big\{ \pm \pi \mu_1(s) (1 + \cos(2\alpha(s))) + \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \\
& + \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \pm \pi \mu_2(s) \sin(2\alpha(s)) \\
& - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \Big\}, \\
\frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^{\pm}} &= \frac{1}{4\pi\eta} \Big\{ \pm \pi \mu_1(s) \sin(2\alpha(s)) \\
& - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \pm \pi \mu_2(s) (1 - \cos(2\alpha(s))) \\
& + \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \\
& - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \Big\},
\end{aligned}$$

где интегралы, содержащие $\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))$, понимаются в смысле главного значения;

3) для любой точки $x \notin \Gamma$, расположенной в малой окрестности конца $x(d)$ ($d = a$ или $d = b$), выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x - x(d)|^{\delta}}, \quad \left| \frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x - x(d)|^{\delta}}, \quad j = 1, 2,$$

где $\delta = q$, если $q \in (0, 1)$, и δ – произвольное число из интервала $(0, 1)$, если $q = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Через $C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \setminus X)$ обозначается класс функций, которые непрерывны вне Γ , непрерывно продолжимы на стороны разреза Γ слева и справа во внутренних точках, но предельные значения каждой функции на Γ слева и справа могут быть разными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [1], [2] потенциалы $V_1[\mu](x)$, $V_2[\mu](x)$ изучались в предположении, что плотности $\mu_1(\sigma)$, $\mu_2(\sigma)$ непрерывны на кривой интегрирования. При таком предположении формулы из части 2) теоремы, вообще говоря, не имеют места, так как сингулярные интегралы в этих формулах могут не существовать, поэтому в [1], [2] эти формулы не выводились.

Список литературы

- [1] А. Н. Попов, *Краевые задачи математической физики*. 7, Тр. МИАН, 116, ред. О. А. Ладыженская, Наука, Л., 1971, 162–180. [2] W. Varnhorn, *The Stokes equations*, Math. Res., 76, Akademie-Verlag, Berlin, 1994.

П. А. Крутицкий (P. A. Krutitskii)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Представлено М. И. Зеликиным

Принято редколлегией

27.07.2007