Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, И. А. Тайманов, О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 225–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:41:01

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕФОРМАЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

И. К. БАБЕНКО, И. А. ТАЙМАНОВ

Гладкое многообразие называется симплектическим, если на нем существует невырожденная замкнутая 2-форма ω . Согласно теореме Дарбу в окрестности каждой точки эта форма приводится к виду $\omega = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dx^{j+n}$, где $\{x^j\}$ локальные координаты на многообразии. Отсюда следует, что размерность симплектического многообразия M четна и на нем существует почти комплексная структура: выберем риманову метрику $(\cdot, \cdot)$ на M и определим автоморфизм $J: TM \rightarrow TM$, задающий почти комплексную структуру как $\omega(u, Jv) = (u, v)$. В конце 60-х годов Громов показал, что если класс когомологий формы ω на компактном симплектическом многообразии (M, ω) целочисленен, т.е. $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$, то для достаточно большого N существует такое вложение $f: M \rightarrow \mathbb{C}P^N$, что $f^*(\omega_0) = \omega$, где ω_0 ходжева форма на $\mathbb{C}P^N$ ([5]). Как показал Тишлер, такое вложение существует уже для $N = 2n + 1$, где $\dim M = 2n$ ([9]).

Так как кэлеровы многообразия являются симплектическими (в качестве ω можно взять кэлерову форму), то возникает предположение, что все компактные симплектические многообразия исчерпываются кэлеровыми (по крайней мере с точностью до диффеоморфизма).

Для неодносвязных многообразий оно было опровергнуто Терстоном, указавшим в качестве простейшего контрпримера $\tilde{N} = \mathbb{R}^3/\Gamma \times S^1$, где Γ равномерная решетка верхнетреугольных целочисленных 3×3 -матриц в группе Гейзенберга ([8]). Как оказалось этот пример ранее указывался Кодаирой. Заметим, что симплектическая форма на $\tilde{N}$ целочисленна.

Пример односвязного симплектического многообразия негомеоморфному кэлеровому был построен МакДафф, которая погрузила многообразие Кодаиры–Терстона $\tilde{N}$ в $\mathbb{C}P^5$ и построила многообразие X как результат симплектического раздутия $\mathbb{C}P^5$ вдоль $\tilde{N}$ ([7]). Последняя процедура состоит в послойном раздутии нормального расслоения к $\tilde{N}$ в $\mathbb{C}P^5$ (так как подмногообразие $\tilde{N}$ симплектично, то слои нормального расслоения оснащены естественной почти комплексной структурой).

Позднее Гомпф построил даже четырехмерные односвязные симплектические многообразия, негомеоморфные кэлеровым ([4]).

Важным свойством кэлеровых многообразий, установленным в [3], является их формальность — полиэдр M называется формальным, если существует гомоморфизм косокоммутативных градуированных дифференциальных алгебр $(\mathcal{M}(M), d) \rightarrow (H^*(M; \mathbb{Q}), d)$ такой, что он порождает изоморфизм когомологий. Здесь $(H^*(M), d)$ кольцо рациональных когомологий с нулевым дифференциалом $d \equiv 0$ и $(\mathcal{M}(M), d)$ минимальная модель пространства M (определение минимальной модели односвязных и нильпотентных неодносвязных пространств см., например, в [3]).

Бедный, по методу их построения, запас примеров симплектических многообразий породил большое количество работ по нахождению симплектических, но не кэлеровых неодносвязных многообразий (см., например, [1], [2], [6]) и при этом в [1], [6] использовался критерий формальности. Вопрос о существовании односвязных неформальных симплектических многообразий оставался открытым. Наиболее полный набор результатов о формальности симплектических многообразий см. в [6].

В общем же случае, как мы показываем, односвязное симплектическое многообразие неформально. Таким образом, несмотря на мощную дифференциально-геометрическую структуру, какой является симплектическая форма, топология односвязного симплектического многообразия может быть существенно сложнее, чем топология кэлеровых многообразий.

А именно, определим X_k как результат раздутия $\mathbb{C}P^k$ по вложенному многообразию Кодаиры–Терстона $\tilde{N}$. В этих обозначениях пример МакДафф есть X_5 . Все многообразия X_k одно-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00182а, 98-01-00749).

связны при $k \geq 5$.

Имеет место

ТЕОРЕМА. Если $k \geq 6$, то многообразие X_k неформально.

Доказательство состоит в следующем.

Пусть $\pi: X_k \rightarrow \mathbb{C}P^k$ проекция, которая является диффеоморфизмом на дополнении к образу $\tilde{N}$ и пусть $\tilde{V}$ трубчатая окрестность $\pi^{-1}(\tilde{N})$. Точная когомологическая последовательность пары $(X_k, \tilde{V})$ содержит следующий фрагмент

$$(1) \quad 0 \leftarrow H^4(X_k, \tilde{V}) \xleftarrow{\partial} H^3(\tilde{V}) \approx H^3(\tilde{N}) \oplus \text{Ker } \partial \leftarrow H^3(X_k) \leftarrow 0.$$

Пространство $\tilde{V}$ диффеоморфно $\mathbb{C}P^{k-3}$ расслоению над $\tilde{N}$ и $H^*(\tilde{V})$ изоморфно скрученному тензорному произведению $H^*(\tilde{N}) \hat{\otimes} H^*(\mathbb{C}P^{k-3})$. Обозначим через v какую-то образующую $H^1(\tilde{N})$, через b образующую $H^2(\mathbb{C}P^{k-3})$, через $a \in H^2(X_k)$ класс когомологий симплектической формы, а через $u \in H^3(X_k)$ элемент, переходящий при (1), в $b \wedge v$. Можно показать, что $u \wedge a = 0$, и так как циклы u и a сферичны, то существует образующий элемент $\hat{z}$ минимальной модели $\mathcal{M}(X_k)$ пространства X_k такой, что $d\hat{z} = \hat{u} \wedge \hat{a}$, где $\hat{u}$ и $\hat{a}$ переходят при гомоморфизме Гуревича в u и a .

Явными вычислениями показывается, что $\hat{z} \wedge \hat{u} \in \mathcal{M}(X_k)$ порождает нетривиальный цикл семерных когомологий и, следовательно, пространство X_k неформально. При этих вычислениях существенно, что $k \geq 6$.

Подробное доказательство будет опубликовано отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Benson C., Gordon C. // Topology. 1988. V. 27. P. 513–518. [2] Cordero L. A., Fernandez M., Gray A. // Topology. 1986. V. 25. P. 375–380. [3] Deligne P., Griffiths P., Morgan J., Sullivan D. // Invent. Math. 1975. V. 29. P. 245–274. [4] Gompf R. E. // Ann. of Math. 1995. V. 142. P. 527–595. [5] Gromov M. L. Partial differential relations. Berlin: Springer-Verlag, 1986. [6] Lupton G., Oprea J. // J. Pure Appl. Algebra. 1994. V. 91. P. 193–207. [7] McDuff D. // J. Diff. Geom. 1984. V. 20. P. 267–277. [8] Thurston W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 55. P. 467–468. [9] Tischler D. // J. Dif. Geom. 1977. V. 12. P. 229–235.

Московский государственный университет
и Университет Монпелье;
Институт математики СО РАН

Принято редколлегией
19.08.1998