Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, О D -нормальности $X^2 \setminus \Delta$, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:09:53

О D -НОРМАЛЬНОСТИ $X^2 \setminus \Delta$

А. П. КОМБАРОВ

В [1] доказано, что бикомпакт X такой, что $X^2 \setminus \Delta$ является нормальным пространством, удовлетворяет первой аксиоме счетности. Здесь $\Delta \subset X^2$ – диагональ. Затем в [2] требование бикомпактности X было ослаблено до условия счетной компактности. Основным результатом этой заметки является следующая теорема 1, усиливающая теорему 1 из [2].

ТЕОРЕМА 1. *Счетно компактное пространство X такое, что $X^2 \setminus \Delta$ является регулярным D -нормальным пространством, удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Пространство X называется D -нормальным, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B пространства X найдутся непересекающиеся замкнутые G_δ -множества F и G такие, что $A \subseteq F$ и $B \subseteq G$ [3]. Всякое нормальное пространство является регулярным D -нормальным пространством. Совершенные пространства, пространства с измельчением и, в частности, моровские пространства являются D -нормальными. Простейшим примером регулярного D -нормального не нормального пространства может служить квадрат прямой Зоргенфрея (см., например, [4; 2.3.12]).

Под ординалом понимается множество всех меньших ординалов, кардинальное число – это начальный ординал, LIM – множество всех счетных предельных ординалов. Прочие обозначения и терминология, не разъясняемые ниже, такие же, как в [4], [5]. Все пространства предполагаются хаусдорфовыми.

ЛЕММА 1. *Счетно компактное пространство X такое, что $X^2 \setminus \Delta$ является регулярным пространством, удовлетворяет первой аксиоме счетности в любой G_δ -точке $x \in X$.*

ЛЕММА 2. *Пусть $X^2 \setminus \Delta$ является D -нормальным пространством и $x \in X$. Если $x \in \overline{M}$, $|M| \leq \omega$, $M \subset X \setminus \{x\}$, то x – G_δ -точка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{(y, x) : y \in X \setminus \{x\}\} \subseteq F$, $B = \{(x, y) : y \in X \setminus \{x\}\} \subseteq G$, где F и G – замкнутые непересекающиеся G_δ -множества. Пусть $F = \bigcap \{U_i : i < \omega\}$, где все U_i открыты в $X^2 \setminus \Delta$. Для каждого $m \in M$ определим открытое в X множество $W(m, i) = \{y \in X : (m, y) \in U_i\}$. Нетрудно проверить, что $\{x\} = \bigcap \{W(m, i) : m \in M, i < \omega\}$.

ЛЕММА 3. *Пространства $\omega_1^2 \setminus \Delta$ и $(\omega_1 + 1)^2 \setminus \Delta$ не являются D -нормальными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $A = \{(\alpha + 1, \alpha) : \alpha \in \text{LIM}\}$ и $B = \{(\beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \text{LIM}, \alpha < \beta\}$ замкнуты в $\omega_1^2 \setminus \Delta$ и не пересекаются. Пусть G – произвольное замкнутое G_δ -множество, содержащее B , и $(\beta, \alpha) \in B \subseteq G$. Зафиксировав α , заметим, что $\{\beta : (\beta, \alpha) \in G, \alpha < \beta\}$ является непустым G_δ -подмножеством ω_1 . По лемме о сдвливании [6; гл. 3, теорема 2.3] найдется $\beta(\alpha) \in \text{LIM}$, $\beta(\alpha) > \alpha$, такое, что $\{(\gamma, \alpha) : \gamma \geq \beta(\alpha)\} \subseteq G$. Пусть $(\beta, \alpha_1) \in B$. По индукции построим последовательность $\alpha_1 < \beta(\alpha_1) < \alpha_2 < \beta(\alpha_2) < \dots < \alpha_n < \beta(\alpha_n) < \dots$, и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \varepsilon$. Поскольку $G = \overline{G}$, то $\{(\zeta, \varepsilon) : \zeta > \varepsilon\} \subset G$ и, следовательно, $(\varepsilon + 1, \varepsilon) \in G \cap A$. Таким образом $\omega_1^2 \setminus \Delta$ не D -нормально. Пусть $C = \{(\omega_1, \alpha) : \alpha \in \text{LIM}\}$. Множества A и C замкнуты в $(\omega_1 + 1)^2 \setminus \Delta$ и не пересекаются. Совершенно аналогично показывается, что A пересекается с любым замкнутым G_δ -множеством, содержащим C , и, следовательно, $(\omega_1 + 1)^2 \setminus \Delta$ также не является D -нормальным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $p \in X$ и p не является G_δ -точкой. Множества $A = \{(x, p) : x \in X \setminus \{p\}\}$ и $B = \{(p, y) : y \in X \setminus \{p\}\}$ замкнуты в $X^2 \setminus \Delta$ и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $A \subset F$, $B \subset G$, $F = \overline{F}$, $G = \overline{G}$, $F \cap G = \emptyset$ и F и G – G_δ -множества. Без ограничения общности можно считать, что $(x, y) \in F \iff (y, x) \in G$. По трансфинитной индукции построим открытые множества O_α , замкнутые G_δ -множества H_α и точки x_α , $\alpha < \omega_1$, удовлетворяющие следующим условиям: (1) $p \in O_\alpha \subseteq \overline{O_\alpha} \subseteq X \setminus \{x_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$; (2) $y \in H_\alpha \iff (x_{\alpha'}, y) \in F \forall \alpha' < \alpha$; (3) $\alpha \in \text{LIM} \Rightarrow H_\alpha = \bigcap \{H_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$; (4) $\alpha' \leq \alpha \Rightarrow H_\alpha \subseteq H_{\alpha'}$; (5) $x_\alpha \in (\bigcap \{O_{\alpha'} : \alpha' \leq \alpha\} \cap \bigcap \{H_{\alpha'} : \alpha' \leq \alpha\}) \setminus \{p\}$; (6) $\forall \alpha < \omega_1 \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}} \cap \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}} = \emptyset$. Пусть

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00706).

$O_1 = H_1 = X$, $x_1 \in X \setminus \{p\}$. По лемме 2 $p \notin \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}}$. Так как X , очевидно, регулярно, найдется множество O_α , удовлетворяющее условию (1). Полагая $H_\alpha = \{y \in X : (x_{\alpha'}, y) \in F \forall \alpha' < \alpha\}$. Поскольку $H_\alpha = \bigcap \{\{y \in X : (x_{\alpha'}, y) \in F\} : \alpha' < \alpha\}$ и F — замкнутое G_δ -множество, H_α также является замкнутым G_δ -множеством. Условия (2), (3), (4) следуют из определения H_α . Множество $\bigcap \{O_{\alpha'} : \alpha' \leq \alpha\} \cap \bigcap \{H_{\alpha'} : \alpha' \leq \alpha\}$ является G_δ -множеством и, следовательно, не совпадает с $\{p\}$, поэтому найдется точка x_α , удовлетворяющая условию (5). Построение закончено. Проверим выполнение условия (6). Если $\alpha' \geq \alpha$, то из условия (5) следует, что $x_{\alpha'} \in O_\alpha$. Поэтому $\overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}} \subseteq \overline{O_\alpha}$, и условие (1) влечет (6).

Пусть $S_\alpha = \{x_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$, $T_\alpha = \{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}$ и $Z = S_{\omega_1} \setminus \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Для каждого $z \in Z$ определим $\alpha(z) = \min\{\beta : z \in S_\beta\}$. Заметим, что $\alpha(z)$ — предельный ординал. Пусть $\Phi = \{z \in S_{\omega_1} : \alpha(z) = \omega_1\} = \bigcap \{T_\beta : \beta < \omega_1\}$. Очевидно, Φ счетно компактно. Если $|\Phi| \geq \omega$, то $\Phi \supset M \neq \overline{M}$, $|M| \leq \omega$. Пусть $x \in \overline{M} \setminus M$. По леммам 1 и 2 в точке x имеется счетная база $\mathcal{B} = \{U_i : i < \omega\}$, и пусть $\alpha_i = \min\{\alpha : x_\alpha \in U_i\}$. Выберем $\beta > \alpha_i$ для всех $i < \omega$. Тогда $x \in U_i \subset X \setminus S_\beta$ для некоторого $i < \omega$, что противоречит определению α_i и неравенству $\beta > \alpha_i$. Итак, $|\Phi| < \omega$ и, переходя к конфинальной подпоследовательности последовательности $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, можно считать, что $|\Phi| = 1$, $\Phi = \{q\}$, если $\Phi \neq \emptyset$. Определим отображение $\mathcal{A} : S_{\omega_1} \rightarrow \omega_1 + 1$ формулами $\mathcal{A}(x_\alpha) = \alpha + 1$ и $\mathcal{A}(z) = \alpha(z)$ при $z \in Z$. $\mathcal{A}$ непрерывно, поскольку точки x_α изолированы в S_{ω_1} , а если $z \in Z$, $\alpha(z) \in \text{LIM}$ и $\beta < \alpha(z)$, то $U = S_{\omega_1} \setminus (S_\beta \cup \{x_\beta\} \cup T_{\alpha(z)})$ — окрестность z в S_{ω_1} такая, что $\mathcal{A}(U) \subseteq \{\gamma : \beta < \gamma \leq \alpha(z)\}$, если же $z = q$ и $\beta < \omega_1$, то $q \in V = S_{\omega_1} \setminus (S_\beta \cup \{x_\beta\})$ и $\mathcal{A}(V) \subseteq \{\gamma : \beta < \gamma \leq \omega_1\}$. $\mathcal{A}$ взаимно однозначно. Пусть $\mathcal{A}(z) = \alpha \in \text{LIM}$. Тогда из (6) следует, что $z \in Z_\alpha = \bigcap \{S_\alpha \setminus S_\beta : \beta < \alpha\}$. Если $\beta \leq \gamma$, то $x_\gamma \in H_\gamma \subseteq H_\beta$ по условию (4), и $S_\alpha \setminus S_\beta \subseteq H_\beta$. Следовательно, $Z_\alpha \subseteq \bigcap \{H_\beta : \beta < \alpha\} = H_\alpha$ по условию (3). Пусть $z_1, z_2 \in Z_\alpha \subseteq H_\alpha$. Из лемм 1 и 2 следует, что можно зафиксировать последовательности $\delta(n) < \alpha$ и $\varepsilon(n) < \alpha$, $n < \omega$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\delta(n)} = z_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varepsilon(n)} = z_2$. По условию (2), $z_1 \in H_\alpha \iff (x_{\alpha'}, z_1) \in F \forall \alpha' < \alpha$, и, в частности, $(x_{\varepsilon(n)}, z_1) \in F \forall n < \omega$. Но $F = \overline{F}$, поэтому $(z_2, z_1) \in F \iff (z_1, z_2) \in G$. Аналогично $(z_1, z_2) \in F$, и $F \cap G \neq \emptyset$. Следовательно, $|Z_\alpha| = 1$. $\mathcal{A}$ замкнуто. Если $\Phi = \emptyset$ и L замкнуто в S_{ω_1} , то L счетно компактно и, следовательно, $\mathcal{A}(L)$ счетно компактно в ω_1 , поэтому замкнуто. Если же $\Phi = \{q\}$, то S_{ω_1} — бикомпакт. Пусть u — произвольное открытое покрытие S_{ω_1} , $q \in U \in u$. Если $\forall \beta < \omega_1 \exists \alpha(\beta) > \beta$ и $x_{\alpha(\beta)} \in S_{\omega_1} \setminus U$, то, выбрав открытое множество V такое, что $q \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, получим $\forall \beta < \omega_1 \exists \gamma(\beta) > \beta$ и $x_{\gamma(\beta)} \in V$, так как $q \in T_\beta \forall \beta < \omega_1$. Выберем последовательность ординалов $\alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \dots < \alpha_n = \alpha(\gamma_{n-1}) < \gamma_n = \gamma(\alpha_n) < \dots$, и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \delta$. Ясно, что $\delta \in \text{LIM}$. Тогда $Z_\delta = \bigcap \{S_\delta \setminus S_\beta : \beta < \delta\} \supseteq \bigcap \{\overline{\{x_{\alpha_n} : \beta \leq \alpha_n\}} : \beta < \delta\} \neq \emptyset$, поскольку S_{ω_1} счетно компактно. Аналогично, $Z_\delta \supseteq \bigcap \{\overline{\{x_{\gamma_n} : \beta \leq \gamma_n\}} : \beta < \delta\} \neq \emptyset$. Но $|Z_\delta| = 1$, и поэтому $\overline{V} \cap (S_{\omega_1} \setminus U) \neq \emptyset$, что является противоречием, доказывающим существование ординала $\beta^* < \omega_1$ такого, что $T_{\beta^*} \subseteq U$. Но $S_{\omega_1} = S_{\beta^*} \cup T_{\beta^*}$, а S_{β^*} взаимно однозначно отображается на счетное подмножество ω_1 и является счетным счетно компактным пространством, следовательно, бикомпактом. Поэтому из покрытия u можно выбрать конечное подпокрытие. Непрерывное отображение бикомпакта замкнуто. Итак, в любом случае отображение $\mathcal{A}$ — гомеоморфизм. Поэтому $X^2 \setminus \Delta$ содержит в качестве замкнутого множества $\omega_1^2 \setminus \Delta$ или $(\omega_1 + 1)^2 \setminus \Delta$. Противоречие с леммой 3 доказывает теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.V. Arhangel'skii, A.P. Kombarov // Topology Appl. 1990. V. 35. № 2–3. P. 121–126. [2] Д. В. Малыгин // Вестник Моск. ун-та. Матем., мех. 1997. № 5. С. 31–33. [3] Н. Brandenburg // Canad. J. Math. 1981. V. 33. № 6. P. 1420–1431. [4] Р. Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986. [5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. Общая топология. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. [6] Справочная книга по математической логике. Ч. II. Теория множеств / Под ред. Дж. Барвайса. М.: Наука, 1982.