Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Попов, Об одной конструкции модулей над кольцом многочленов в случае произвольного поля, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:43:11

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛЯ

О. Н. Попов

В работе [1] мы рассматривали следующую конструкцию модулей над кольцом многочленов. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с 1 над полем $\mathbb{k}$ с базисом $e_1, \dots, e_d$, а $\rho: A \rightarrow M_n(\mathbb{k})$ – ее матричное представление, отвечающее A -модулю M , $\dim_{\mathbb{k}} M = n$. Зададим натуральное $l > 1$ и рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{k}[x_{11}, \dots, x_{dl}]$ и модуль $F_l(M)$ над ним, являющийся фактормодулем свободного R -модуля R^n по подмодулю, порожденному столбцами матриц $\text{Id}_j = \sum_i \rho(e_i)x_{ij}$, $j = 1, \dots, l$.

В работе исследовался вопрос, для каких алгебр получающиеся модули над кольцом многочленов – коэн-маколеевы или F_l – точный функтор. Ответ был получен в случае совершенного поля $\mathbb{k}$, а в [2] были описаны алгебры над совершенным полем, для которых неразложимые представления переходят в коэн-маколеевы модули. В данной работе мы даем ответ для произвольного поля, а также описываем, когда для данного представления получается коэн-маколеев модуль над кольцом многочленов.

Сначала дадим определение, восходящее к работам Адзумы [3], [4], в которых доказана равносильность большинства пунктов:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Конечномерная ассоциативная алгебра A над $\mathbb{k}$ с единицей называется максимально центральной алгеброй, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

- 1) A – прямая сумма алгебр A_i , факторы которых по радикалу просты и $\dim_{\mathbb{k}} A_i \leq t_i^2 \dim_{\mathbb{k}} Z(A_i)$, где t_i^2 – это ранг $A_i / \text{rad } A_i$ над своим центром и на самом деле имеет место равенство;
- 2) при проекции A на любую ее факторалгебру B центр A сюръективно отображается на центр B ;
- 3) алгебра $\bar{A}$, полученная из A переходом к алгебраическому замыканию основного поля, – прямая сумма матричных алгебр над своими центрами;
- 4) алгебра $A \otimes_{\mathbb{k}} L$, где L – произвольное расширение поля $\mathbb{k}$, удовлетворяет условию 1);
- 5) A – прямая сумма таких алгебр A_i с центрами Z_i , что A_i – свободные Z_i -модули и $\text{End}_{Z_i} A_i = A_i \otimes_{Z_i} A_i^0$;
- 6) A – алгебра Адзумы над своим центром Z , т.е. [5; гл. VI, §1, определение 1.5] такой проективный Z -модуль, что для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset Z$ $A \otimes_Z k(\mathfrak{p})$ – центральная простая алгебра над $k(\mathfrak{p})$.

Если основное поле совершенно, то эти условия эквивалентны следующему:

- 7) $A = \bigoplus_i S_i \otimes_{Z(S_i)} K_i$, где S_i – простые алгебры над $\mathbb{k}$, а K_i – конечномерные коммутативные алгебры над соответствующими $Z(S_i)$ (A – “линейная комбинация простых алгебр с коммутативными коэффициентами”).

Будем называть максимально центральной алгеброй *равноразмерной*, если алгебра $\bar{A}$ из условия 3) – прямая сумма матричных алгебр одного и того же ранга над своими центрами или, что то же самое, $\bar{A}$ – матричная алгебра над конечномерной коммутативной.

Тогда основной результат формулируется так:

ТЕОРЕМА. *Если A – максимально центральная алгебра, то для любого $l > 1$ все неразложимые A -модули переходят в коэн-маколеевы R -модули и F_l – точный вполне строгий функтор в категорию градуированных R -модулей, а если при этом A равноразмерна, то и все A -модули переходят в коэн-маколеевы. Наоборот, если для некоторого*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

$l > 1$ либо функтор F_l точен, либо для всех неразложимых модулей M модули $F_l(M)$ коэн-маколеевы, то A – максимально центральная алгебра, а если отбросить условие неразложимости, то A – равноразмерная максимально центральная алгебра. Более того, для произвольной (ассоциативной с 1) алгебры A для некоторого A -модуля M и некоторого $l > 1$ модуль $F_l(M)$ коэн-маколеев, если и только если $A/\text{ann } M$ – равноразмерная максимально центральная алгебра.

Автор хотел бы поблагодарить А. А. Герко, давшего ему мотивацию доделать эту работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Н. Попов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 115–134. [2] О. Н. Попов // УМН. 2003. Т. 58. № 2. С. 173–174. [3] G. Azumaya, T. Nakayama // Japan J. Math. 1948. V. 19. № 4. P. 263–273. [4] G. Azumaya // Nagoya Math. J. 1951. V. 2. P. 119–150. [5] Ю. И. Манин. Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.04.2004