Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О нижних оценках для чисел Борсука и Хадвигера, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 04:54:15

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЧИСЕЛ БОРСУКА И ХАДВИГЕРА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение и формулировка результата. Настоящая работа посвящена исследованию двух классических задач комбинаторной геометрии. Первая задача была сформулирована в 1933 г. К. Борсуком (см. [1]), и состоит она в отыскании минимального числа $f(d)$ такого, что всякое ограниченное d -мерное множество ненулевого диаметра может быть разбито на $f(d)$ частей меньшего диаметра. Вторая задача возникла в сороковые годы двадцатого века, благодаря работам Г. Хадвигера и П. Эрдёша, в которых впервые было определено понятие хроматического числа евклидова пространства, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной наименьшему количеству цветов, необходимых для раскраски $\mathbb{R}^n$, обладающей тем свойством, что в рамках нее точки одного цвета никогда не отстоят друг от друга на расстояние 1 (см. [2]). Отметим, что размерность в разных задачах мы обозначаем по-разному исключительно для удобства дальнейшего изложения.

Про величины $f(d)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$, которые мы также называем числами Борсука и Хадвигера соответственно, известно очень много. Например, детальный обзор имеющихся результатов можно найти в [3]. Не вдаваясь в подробности истории вопроса, мы здесь заметим лишь, что долгое время неулучшенными оставались оценки $f(d) \geq (1.203 \dots + o(1))\sqrt{d}$ (см. [4]) и $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$ (см. [5]). Первая из этих оценок принадлежит Дж. Кану и Г. Калаи, а вторая – П. Франклу и Р. Уилсону. Однако в серии статей 1999–2001 гг. (см. [3], [6] и [7]) автором был разработан новый подход, позволивший заменить упомянутые неравенства более сильными: $f(d) \geq (1.2255 \dots + o(1))\sqrt{d}$, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$. Дальнейшие продвижения представляются весьма проблематичными, и тем не менее совсем недавно автором был предложен метод, с помощью которого удастся чрезвычайно эффективно отыскивать нетривиальные нижние оценки для хроматических чисел конечных геометрических графов (см. [8]); несколько неожиданным и технически довольно тонким следствием этого метода явилась теорема, частный случай которой содержится в следующей “альтернативе”:

АЛЬТЕРНАТИВА. Либо $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.243 \dots + o(1))^n$, либо $f(d) \geq (1.2305 \dots + o(1))\sqrt{d}$.

Приведенную альтернативу можно сформулировать и в виде абсолютного утверждения. Для этого достаточно определить функции $\beta = \beta(d)$ и $\kappa = \kappa(n)$ соотношениями $f(d) = (\beta + o(1))\sqrt{d}$, $\chi(\mathbb{R}^n) = (\kappa + o(1))^n$. (Заметим, что, на самом деле, κ наверняка постоянна, так как $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$, см. [9]. В то же время про β ничего подобного сказать нельзя: известно только, что $f(d) \leq (1.224 \dots + o(1))\sqrt{d}$, см. [10] и [11].) В новых терминах альтернатива фактически означает, что, например, для $\beta + \kappa$ или для $\beta\kappa$ есть лучшая нижняя оценка, чем та, что вытекает из прежних работ автора [6] и [7]. С одной стороны, это обстоятельство лишний раз подтверждает удивительную близость и глубокую взаимосвязанность задач (ср. [3]). С другой стороны, понятно, конечно, что формулировка альтернативы допускает значительное уточнение за счет надлежащей оптимизации в выборе необходимых для доказательства параметров. Само доказательство технически немного громоздко, и мы ограничимся здесь лишь его схематичным изложением.

2. Схема доказательства альтернативы. 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Положим $a = [0.435n]$, $b = [0.108n]$. Определим p как минимальное простое число, большее, чем $\left[\frac{a+2b}{3}\right] \sim 0.217n$, так что, в силу известных теорем аналитической теории чисел, $p \sim 0.217n$. Рассмотрим семейство векторов

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, -1\}, i = 1, \dots, n; \\ \text{card}\{i : x_i = \pm 1\} = a; \text{card}\{i : x_i = -1\} = b\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00912) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-136.2003.1.

Положим $M_1 = \text{card } \Sigma_1 = C_n^a C_a^b = (2.5306 \dots + o(1))^n$.

2. Предположим, что, каково бы ни было подмножество векторов $Q \subset \Sigma_1$, обладающее тем свойством, что скалярное произведение любых двух его элементов не равно $a - p \sim 0.218n$, выполнено неравенство $\text{card } Q \leq D_1 = (2.0359)^n$. Тогда Σ_1 образует (M_1, D_1) -критическую конфигурацию, отвечающую запрещенному расстоянию $\sqrt{2p}$ (см. [3]), и, стало быть, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq M_1/D_1 = (1.243 \dots + o(1))^n$.

3. Допустим, предположение п. 2 неверно. Значит, найдется подмножество векторов $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$, удовлетворяющее условиям: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq a - p$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_2$ и $M_2 = \text{card } \Sigma_2 > D_1$. Учитывая эти условия, с помощью линейно-алгебраического метода в комбинаторике можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА. Если семейство векторов $Q \subset \Sigma_2$ таково, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq a - 2p \sim 0.001n$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, то $\text{card } Q \leq D_2 = P(n) \max_z C_n^z C_{n-z}^{p-2z} = (1.758 \dots + o(1))^n$ ($P(n)$ — некоторый полином).

4. От n -мерного множества векторов Σ_2 перейдем к d -мерному множеству векторов Σ_2^* по следующему правилу: каждому $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_2$ мы сопоставим $\mathbf{x} * \mathbf{x} = (y_{ij}) = ((x_i - \delta/n)(x_j - \delta/n))$, где величины i, j независимо меняются в пределах от 1 до n , а порядок координат y_{ij} , разумеется, фиксирован (так что, во всяком случае, размерность d аффинного подпространства, в котором лежит Σ_2^* , не превосходит $\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$); при этом δ подбирается из условия $(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (a - 2p))^2$, которое должно иметь место для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_2$. Возможность осуществить последний выбор, вообще говоря, не очевидна, и в данном случае она базируется исключительно на малости величины $(a - 2p)/n \sim 0.001$, а также на фиксированности суммы $x_1 + \dots + x_n$.

Теперь нетрудно заметить, что максимальное расстояние между векторами из Σ_2^* достигается тогда и только тогда, когда скалярное произведение их прообразов в Σ_2 равно $a - 2p$. Из этого факта и из леммы вытекает, наконец, оценка $f(d) \geq \frac{\text{card } \Sigma_2^*}{D_2} = \frac{M_2}{D_2} > \frac{D_1}{D_2} = (1.15806 \dots + o(1))^n \geq (1.2305 \dots + o(1))^{\sqrt{d}}$.

Альтернатива доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности альтернатива допускает некоторое усиление не только за счет оптимизации параметров типа a, b и p , но еще и за счет привлечения дополнительных средств, связанных с задачами типа Эрмита–Ко–Радо в комбинаторике. Именно эти средства, помимо уже описанных в данном пункте, лежат в основе метода, упомянутого перед формулировкой нашего утверждения. Желая проиллюстрировать этот метод, мы намеренно не вдавались в его детали. Однако дальнейшая разработка техники, по крайней мере, позволяет заменить обе константы 1.243 и 1.2305 числом 1.25.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Borsuk // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190. [2] H. Hadwiger // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [3] А. М. Райгородский // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 107–146. [4] J. Kahn, G. Kalai // Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. №1. P. 60–62. [5] P. Frankl, R. M. Wilson // Combinatorica. 1981. V. 1. №4. P. 357–368. [6] А. М. Райгородский // УМН. 1999. Т. 54. №2. С. 185–186. [7] А. М. Райгородский // УМН. 2000. Т. 55. №2. С. 147–148. [8] А. М. Райгородский // Докл. РАН. 2003. Т. 392. №3. С. 313–317. [9] D. G. Larman, C. A. Rogers // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24. [10] O. Schramm // Mathematika. 1988. V. 35. №2. P. 180–189. [11] J. Bourgain, J. Lindenstrauss // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1469. P. 138–144.

Принято редколлегией
01.04.2004