Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Селиванов, Существование и единственность мартингалльных мер в экспоненциальных моделях Леви, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:32:27

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ЛЕВИ

А. В. Селиванов

В финансовой математике важную роль играет вопрос существования и единственности мартингальной меры в различных моделях цен. Это вопрос о наличии арбитража и полноте в соответствующей модели рынка (см. [1; гл. V, VII]).

В данной работе мы даем ответ на этот вопрос для двух моделей цен, популярных в современной финансовой математике.

1. Экспоненциальная модель Леви, т.е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид

$$S_t = e^{X_t}, \quad (1)$$

где X – процесс Леви.

2. Экспоненциальная модель Леви с заменой времени, т.е. модель, в которой процесс дисконтированной цены имеет вид

$$S_t = e^{(X \circ \tau)_t}, \quad (2)$$

где X – процесс Леви, τ – не зависящий от X неубывающий процесс, $(X \circ \tau)_t = X_{\tau_t}$.

Мы рассмотрим случаи как конечного, так и бесконечного временного горизонта. Предположим, что процессы заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u, u \leq t), t \geq 0$.

Классы мартингальных мер, которые мы будем изучать, – это классы, возникающие в фундаментальной теореме теории арбитража (ФТТА). Для случая непрерывного времени эта теорема может быть сформулирована разными способами. Предположим, что процесс дисконтированной цены S является семимартингалом.

В традиционной формулировке ФТТА, полученной Ф. Делбаеном и В. Шахермайером в [2], утверждается, что в модели $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P, (S_t)_{t \in [0, T]})$ отсутствует *бесплатный ланч с исчезающим риском* тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$, где

$$\mathcal{M}_\sigma = \{Q \sim P : S \text{ является } (\mathcal{F}_t, Q)\text{-}\sigma\text{-мартингалом}\}$$

(элемент из $\mathcal{M}_\sigma$ называется *σ -мартингальной мерой*). Этот же результат справедлив и для модели с бесконечным временным горизонтом.

Однако понятие арбитража может быть введено иначе, чем это делается в [2] (см. [1; гл. VII, §2]). В некоторых случаях (см., например, [3]) ФТТА для моделей с конечным временным горизонтом формулируется с использованием множества

$$\mathcal{M} = \{Q \sim P : S \text{ является } (\mathcal{F}_t, Q)\text{-мартингалом}\}$$

(элемент из $\mathcal{M}$ называется *мартингальной мерой*).

В силу некоторых соображений оказывается полезным рассматривать следующее множество для моделей с бесконечным временным горизонтом:

$$\mathcal{UM} = \{Q \sim P : S \text{ является } (\mathcal{F}_t, Q)\text{-равномерно интегрируемым мартингалом}\}$$

(элемент из $\mathcal{UM}$ называется *равномерно интегрируемой мартингальной мерой*).

Заметим, что множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{UM}$ могут быть рассмотрены вместо $\mathcal{M}_\sigma$ в традиционной ФТТА при некоторых дополнительных ограничениях на модель (см. [4]).

Перейдем к моделям (1) и (2). Предположим, что X – это ненулевой процесс Леви с триплетом характеристик (b, c, ν) (относительно произвольно взятой функции усечения), τ – это отличный от константы неубывающий непрерывный справа и имеющий пределы слева процесс, не зависящий от X . Через $|A|$ мы обозначим число элементов в множестве A , через δ_a – дельта-меру, сосредоточенную в точке a .

ТЕОРЕМА 1. Рассмотрим модель (1) с конечным временным горизонтом.

- (i) Мы имеем $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M} = \emptyset \Leftrightarrow X$ или $-X$ не убывает.
- (ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$. Тогда

$$|\mathcal{M}_\sigma| = 1 \Leftrightarrow |\mathcal{M}| = 1 \Leftrightarrow c \neq 0, \nu = 0 \text{ или } c = 0, \nu = \alpha\delta_a.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $c \neq 0, \nu = 0$ отвечает модели Блэка–Шоулса, случай $c = 0, \nu = \alpha\delta_a$ отвечает модели Мертона.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим модель (2) с конечным временным горизонтом.

- (i) Мы имеем $\mathcal{M}_\sigma = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M} = \emptyset \Leftrightarrow X$ или $-X$ не убывает.
- (ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$. Тогда

$$|\mathcal{M}_\sigma| = 1 \Leftrightarrow |\mathcal{M}| = 1 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \tau - \text{детерминированный, непрерывный процесс и} \\ c \neq 0, \nu = 0 \text{ или } c = 0, \nu = \alpha\delta_a. \end{array}$$

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим модель (1) с бесконечным временным горизонтом.

- (i) Мы имеем

$$\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{array}{l} S \text{ является } (\mathcal{F}_t, \mathbb{P})\text{-мартингалом или} \\ ES_1 < 1 \text{ и скачки процесса } X \text{ не ограничены сверху.} \end{array}$$

- (ii) Предположим, что $\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$. Тогда $|\mathcal{M}_\sigma| = 1 \Leftrightarrow c \neq 0, \nu = 0$ или $c = 0, \nu = \alpha\delta_a$.
- (iii) Мы имеем $\mathcal{UM} = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим модель (2) с бесконечным временным горизонтом. Предположим, что $\tau_\infty = \infty$ $\mathbb{P}$ -п.н. Тогда $\mathcal{UM} = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что структура множеств $\mathcal{M}_\sigma$ и $\mathcal{M}$ (в смысле существования и единственности элемента) одинакова для модели с конечным временным горизонтом. Структура же множеств $\mathcal{M}_\sigma$ и $\mathcal{UM}$ оказывается различной для модели с бесконечным временным горизонтом.

Автор благодарен А.С. Черному за руководство этой работой и важные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. М.: Фазис, 1998.
- [2] F. Delbaen, W. Schachermayer // Math. Ann. 1998. V. 312. №2. P. 215–250.
- [3] C. A. Sin. Strictly local martingales and hedge ratios on stochastic volatility models // Ph. D. Dissertation. Ithaka, NY: Cornell University, Graduate School, 1996.
- [4] F. Delbaen, W. Schachermayer // Math. Ann. 1994. V. 300. №3. P. 463–520.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.04.2004