Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Солонуха, О нелинейной параболической задаче с препятствием, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:03:52

О НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

О. В. Солонуха

Задачи с препятствием изучались в [1]–[3] и др. В данной работе критерий существования обобщенного решения сформулирован для более широкого класса существенно нелинейных задач.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная связная область класса $C^{m,1}$ с границей $\partial\Omega$, $p \in [2, \infty)$, $1/q + 1/p = 1$; $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Обозначим через ∂_t : $\text{Dom}(\partial_t) \subset X = L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-m}(\Omega)) = X^*$ оператор дифференцирования по t . Рассмотрим задачу с препятствием

$$\begin{cases} f \leq \partial_t y + Ay, & y \geq \psi, & (y - \psi)(\partial_t y + Ay - f) = 0 \text{ п.в. на } Q_T, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{п.в. на } \Omega, & \frac{\partial^k y}{\partial \nu^k} = 0 \text{ п.в. на } \Gamma_T \forall k \leq m-1, \end{cases} \quad (1)$$

где $y_0 \in L_2(\Omega)$; препятствие $\psi \in L_p(0, T; W_p^m(\Omega))$ таково, что $\psi \leq 0$ почти всюду на Γ_T , $\psi(0, x) \leq y_0(x)$ почти всюду на Ω , $\partial_t \psi \in L_q(0, T; W_q^{-m}(\Omega))$; $f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L_q(Q_T)$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $D^\alpha y = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} y$; для каждого $\xi \in X = L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega))$ нелинейный оператор $A: X \rightarrow X^*$ задан выражением

$$\langle Ay, \xi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{Q_T} A_\alpha(t, x, y, D^1 y, \dots, D^m y) D^\alpha \xi \, dx \, dt, \quad (2)$$

$D^k y$ – набор всех производных порядка k для натурального $k = \overline{1, m}$. Обозначим через M и M' число различных мультииндексов α таких, что $0 < |\alpha| \leq m$ и $0 < |\alpha| \leq m-1$ соответственно.

Сформулируем условия на функции A_α .

А1. Условие интегрируемости. Функции A_α измеримы по $(t, x) \in Q_T$ и непрерывны по остальным аргументам. Кроме того, для почти всех $(t, x) \in Q_T$ и всех $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_M) \in \mathbb{R}^{M+1}$

$$|A_\alpha(t, x, \xi)| \leq c_1 \sum_{0 \leq j \leq M} |\xi_j|^{p-1} + h_\alpha(t, x), \quad |\alpha| \leq m,$$

где $c_1 > 0$, $h_\alpha \in L_q(Q_T)$.

А2. Условие эллиптичности. Для почти всех $(t, x) \in Q_T$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{M+1}$ таких, что $\xi = (\omega, \zeta)$, $\xi' = (\omega, \eta)$, $\omega \in \mathbb{R}^{M'+1}$, выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(t, x, \omega, \zeta) - A_\alpha(t, x, \omega, \eta))(\zeta_\alpha - \eta_\alpha) > 0, \quad \text{если } \eta \neq \zeta.$$

А3. Условие коэрцитивности. Для почти всех $(t, x) \in Q_T$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{M+1}$ справедлива оценка

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha \geq c_2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p - g(t, x),$$

где $c_2 > 0$ и $g \in L_1(Q)$.

Сильным обобщенным решением задачи (1) назовем элемент

$$y \in K = \{z \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)) : z|_{t=0} = y_0 \text{ п.в. на } \Omega, z \geq \psi \text{ п.в. на } Q_T\},$$

удовлетворяющий вариационному неравенству

$$\langle \partial_t y + Ay, \xi - y \rangle \geq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{Q_T} f_\alpha D^\alpha (\xi - y) dx dt \quad \forall \xi \in K.$$

Заметим, что при этом $\partial_t y \in L_q(0, T; W_q^{-m}(\Omega))$.

Назовем последовательность $\{(y_k, Ay_k)\}$ ω_W -последовательностью, если $y_n \rightarrow y$ слабо в X , $\partial_t y_k \rightarrow \partial_t y$ слабо в X^* и $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ay_k, y_k - y \rangle \leq 0$. Оператор $A: \text{Dom}(A) \subset X \rightarrow X^*$ обладает свойством (S_+) относительно ∂_t , если для любой ω_W -последовательности $y \in \text{Dom}(A)$, $y_k \rightarrow y$ в X и $Ay_k \rightarrow Ay$ слабо в X^* . Оператор $A: \text{Dom}(A) \subset X \rightarrow X^*$ псевдомонотонен на $\text{Dom}(\partial_t)$, если для любой ω_W -последовательности справедлива оценка $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ay_k, \xi - y_k \rangle \geq \langle A(y), \xi - y \rangle$ для всех $\xi \in X$. Оператор $A: \text{Dom}(A) \subset X \rightarrow X^*$ коэрцитивен, если $\lim_{\|y\|_X \rightarrow \infty} \|y\|_X^{-1} \langle Ay, y \rangle = +\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты A_α удовлетворяют условиям А1–А3. Тогда оператор $A: L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-m}(\Omega))$, заданный формулой (2), ограничен, псевдомонотонен на $\text{Dom}(\partial_t)$, имеет свойство (S_+) относительно ∂_t и коэрцитивен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты A_α удовлетворяют условиям А1–А3. Тогда задача с препятствием (1) имеет непустое, компактное множество сильных обобщенных решений.

Доказательства теорем 1, 2 основаны на методах [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Е. Апушкинская, Н. Н. Уральцева, Х. Шахголян // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 1. С. 3–25. [2] А. А. Архипова // Проблемы матем. анализа. Вып. 9. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. С. 149–157. [3] G. M. Troianiello // Manuscripta Math. 1979. V. 29. № 2–4. Р. 353–384. [4] O. V. Solonukha // Mitt. Math. Sem. Giessen. 2003. № 251.

Киевский политехнический институт
E-mail: olesia@solonukha.mtu-net.ru,
skubachevskii@yandex.ru

Принято редколлегией
01.04.2004