Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Федоров, Верхние оценки числа орбитальных топологических типов полиномиальных векторных полей на плоскости “по модулю предельных циклов”, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 05:10:16

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ОРБИТАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТИПОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ “ПО МОДУЛЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ”

Р. М. ФЕДОРОВ

В работе рассматриваются полиномиальные векторные поля на плоскости. Наша цель состоит в том, чтобы оценить число классов *орбитальной топологической эквивалентности полей степени не выше n* . Напомним, что векторные поля называются орбитально топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм фазового пространства первого поля на фазовое пространство второго поля, переводящий траектории в траектории и сохраняющий естественную ориентацию траекторий, см. [1] (мы требуем, чтобы этот гомеоморфизм был непрерывен вплоть до границы, если фазовое пространство — плоская область). Ниже мы рассматриваем только поля с конечным числом особых точек (мы называем их **-полями*).

Препятствие к получению верхней оценки составляет вторая часть 16-й проблемы Гильберта (см. [2]) — не зная оценки на количество предельных циклов, невозможно оценить число фазовых портретов. Чтобы обойти это препятствие, мы вводим понятие *эквивалентности по модулю предельных циклов*. *Гнездом* называется подмножество фазового пространства, гомеоморфное кольцу, ограниченное предельными циклами и не содержащее особых точек поля. Векторные поля называются *эквивалентными по модулю предельных циклов*, если они становятся орбитально топологически эквивалентными после удаления всех гнезд.

ТЕОРЕМА 1. *Обозначим через $M(n)$ число классов эквивалентности по модулю предельных циклов *-полей степени не выше n . Тогда*

$$c^{n^2} \leq M(n) \leq C^{n^2}.$$

При этом можно взять $C = 10^{471}$, $c = 10^{10^{-8}}$.

Нижняя оценка была доказана в [3] (явно константа c не вычислялась, но это вычисление очевидно из доказательства). Доказательство верхней оценки кратко излагается в данном сообщении и подробно в [4]. Теми же методами можно получить оценку числа $K(H, n)$ *орбитальных топологических* классов *-полей степени не выше n с не более чем H предельными циклами: $K(H, n) \leq C^{H+n^2}$. Здесь можно взять $C = 10^{157}$. Наконец, из наших результатов следует, что конечность числа орбитальных топологических классов *-полей степени не выше n равносильна существованию конечной верхней оценки $H(n)$ для числа предельных циклов полей степени не выше n в проблеме Гильберта.

Доказательство верхней оценки состоит из двух частей. Сначала мы продолжаем *-поле на плоскости до поля направлений на двумерной сфере и ставим ему в соответствие оснащенный граф на сфере, который является полным инвариантом орбитальной топологической классификации *-полей. Затем мы оцениваем количество вершин и ребер таких графов.

Построение графа. Особая точка полиномиального векторного поля является либо характеристической, либо монодромной, см. [5; гл. 5] (по поводу бесконечно удаленной точки см. [4]). Монодромная особая точка является либо центром, либо фокусом. Это следует из теоремы конечности для числа предельных циклов полиномиального векторного поля, см. [2]. Малая окрестность характеристической особой точки *-поля распадается в объединение стандартных секторов, которые бывают трех типов: параболические, гиперболические и эллиптические.

Траектории, ограничивающие гиперболические секторы, мы называем *сепаратрисами*. Грубо говоря, вершины и ребра графа — это особые точки, сепаратрисы, предельные циклы. Кроме того, мы выбираем по одной траектории из каждого эллиптического сектора. Некоторая техническая трудность заключается в том, что α -предельное (или ω -предельное) множество сепаратрисы может состоять из более чем одной точки. Каждое такое предельное множество мы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00482).

окружаем циклом, трансверсальным $*$ -полю, который тоже добавляется к графу. Сепаратриса разбивается точкой пересечения с этим циклом на две части. Мы выкидываем ту часть, которая “наматывается” на предельное множество. Аналогичная процедура применяется к сепаратрисам, стремящимся к фокусам. По поводу оснащения графа см. [4].

Основной результат работы [6] состоит в построении полной системы орбитальных топологических инвариантов для векторного поля в плоской области. Эта система весьма громоздка, существенная часть нашего доказательства состоит в том, чтобы показать, что все эти инварианты могут быть восстановлены по нашему графу.

Оценка размера графа. Размером графа мы называем сумму числа вершин и числа ребер. Оценка размера графа сводится к оценке числа особых точек, числа сепаратрис и числа эллиптических секторов. По теореме Безу число особых точек не превосходит n^2 . Чтобы оценить число сепаратрис, достаточно оценить число гиперболических секторов. Мы оцениваем суммарное число эллиптических и гиперболических секторов по методу Роля–Хованского: мы рассматриваем кривую R , заданную уравнением

$$P^2 + Q^2 = \varepsilon,$$

где P и Q – компоненты поля. Можно показать, что при малом положительном ε эта кривая представляет собой набор овалов, окружающих особые точки. Поэтому в каждом гиперболическом и в каждом эллиптическом секторе она касается некоторой фазовой траектории. Все такие точки касания удовлетворяют системе уравнений

$$L_v(R - \varepsilon) = 0, \quad R - \varepsilon = 0,$$

где L_v – дифференцирование по направлению поля v . Это – система алгебраических уравнений, по теореме Безу множество ее изолированных решений состоит из не более чем $6n^2 - 2n$ точек. Аналогично показывается, что число эллиптических и гиперболических секторов для бесконечно удаленной точки не превосходит $2n + 2$.

Теперь уже нетрудно оценить размер графа. Остается оценить количество графов данного размера l . Оказывается, число ориентированных (возможно, несвязных) графов размера не больше l на сфере не превосходит 48^l . Это вытекает из основного результата [7], где вычисляется число связных графов на сфере с некоторой дополнительной структурой. В нашем случае $l \leq C_1 n^2$. Подсчет числа оснащенных графов приводит лишь к увеличению коэффициента C_1 .

Автор выражает благодарность Ю. С. Ильяшенко и А. Г. Хованскому, которыми была поставлена эта задача. Помощь моего научного руководителя Ю. С. Ильяшенко была неоценимой. Автор благодарен Университету Чикаго, Московскому государственному университету и Независимому московскому университету, где были получены эти результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. [2] Yu. S. Ilyashenko // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 2002. V. 39. № 3. P. 301–354. [3] R. M. Fedorov // Mosc. Math. J. 2001. V. 1. № 4. P. 539–550. [4] R. M. Fedorov. Upper bounds for the number of orbital topological types of planar polynomial vector fields “modulo limit cycles” // math.DS/0402214. [5] Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, И. У. Бронштейн, В. З. Гринес, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 152–236. [6] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1967. [7] W. T. Tutte // Canad. J. Math. 1963. № 15. P. 249–271.

Независимый московский университет

Принято редколлегией
28.04.2004