Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Минченко, Триады и короткие SO_3 -подгруппы компактных групп, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:06:41

Триады и короткие SO_3 -подгруппы компактных групп

А. Н. Минченко

Пусть G – компактная группа Ли, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление, $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ – его дифференциал.

Триадой в G называется набор из трех сопряженных инволютивных элементов, произведение которых равно единице (в частности, они коммутируют). Например, элементы $\text{diag}(1, -1, -1)$, $\text{diag}(-1, 1, -1)$, $\text{diag}(-1, -1, 1)$ составляют триаду в группе SO_3 (и всякая другая триада ей сопряжена). Подгруппа $H \subset G$, изоморфная SO_3 , называется короткой SO_3 -подгруппой, если размерность каждого неприводимого $\text{Ad } H$ -подмодуля в $\mathfrak{g}$ не больше 5 (т. е. равна 1, 3 или 5).

Всюду далее G – связная простая компактная группа Ли с тривиальным центром. В работе [1] были найдены все, с точностью до сопряженности, триады и короткие SO_3 -подгруппы группы G и на основании совпадения полученных списков была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая триада в группе G содержится в единственной, с точностью до сопряженности, короткой SO_3 -подгруппе.*

Э. Б. Винберг предположил, что существует более концептуальное доказательство теоремы, нежели сравнение классификаций. Целью данной работы является предъявление такого доказательства. В дальнейшем будут использоваться сведения из теории групп Ли [2], а также римановых и симметрических пространств [3], [4].

Пусть X – симметрическое пространство группы G . Ясно, что действие $G: X$ эффективно. Через $s_x \in \text{Isom } X$ обозначим симметрию относительно точки $x \in X$.

ЛЕММА 1. *Пусть $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ геодезическая, $P: \mathbb{R} \rightarrow G$ – группа (параллельных) сдвигов вдоль γ , $P(t)\gamma(0) = \gamma(t)$. Предположим, что точки $x, y \in \text{Im } \gamma$ таковы, что $s_x s_y = s_y s_x$. Положим $s = s_x s_y$, $p \in \text{Im } P$ – сдвиг из точки x в точку y . Тогда*

- 1) $P(t) = \exp t\xi$, где $\xi \in \mathfrak{g}$, $s_x \xi = s_y \xi = -\xi$, $s\xi = \xi$;
- 2) $p^2 = s$ (в частности, $py = x$, значит, кривая γ замкнута).

Геодезическую $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ будем называть кратчайшей относительно точек $x, y \in \text{Im } \gamma$, если она содержит кратчайший отрезок с концами x, y .

ЛЕММА 2. *В обозначениях леммы 1 пусть $\mathfrak{m} = \{\eta \in \mathfrak{g} \mid s\eta = -\eta\}$. Тогда если γ – кратчайшая относительно точек x, y периода π , то $\text{ad } \xi|_{\mathfrak{m}}^2 = -1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\gamma(0) = x$. Тогда $\gamma(\pi/2) = y$ и при $t \in (0, \pi/2)$ точки $x, \gamma(t)$ не сопряжены вдоль геодезической γ . Согласно [4; гл. 7, предложение 3.1], точки x и $\gamma(t)$ сопряжены вдоль γ тогда и только тогда, когда среди ненулевых собственных значений оператора $\text{ad } t\xi: \mathfrak{g}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{C})$ есть кратное πi . Поскольку $\exp \pi\xi = s$, все собственные значения оператора $\text{ad } \xi|_{\mathfrak{m}(\mathbb{C})}$ имеют вид $(2k+1)i$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из отсутствия сопряженных точек при $t \in (0, \pi/2)$ вытекает, что все собственные значения указанного оператора равны $\pm i$. Лемма 2 доказана.

Пусть теперь $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ – триада в G . В дальнейшем индекс r пробегает числа 1, 2, 3. Положим $K_r = Z(s_r)$, $L = Z(S)$, $\mathfrak{k}_r = \text{Lie } K_r$, $\mathfrak{l} = \text{Lie } L$. Триада S естественным образом индуцирует $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -градуировку на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{j}_1 \oplus \mathfrak{j}_2 \oplus \mathfrak{j}_3,$$

где $\mathfrak{j}_r$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{k}_r$. Ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_r$ в $\mathfrak{g}$ обозначим $\mathfrak{m}_r$. В силу простоты $\mathfrak{g}$ имеем $[\mathfrak{m}_r, \mathfrak{m}_r] = \mathfrak{k}_r$.

Рассмотрим симметрическое пространство $X = G/K_1$. По определению K_1 всякая симметрия на X имеет ровно одну неподвижную точку. Пусть $o_r \in X$ – такая точка, что $s_{o_r} = s_r$. Тройку $\{o_1, o_2, o_3\}$ будем обозначать S_X .

Элемент $\xi \in \mathfrak{j}_r$ назовем S -характеристическим, если $\operatorname{ad} \xi|_{\mathfrak{m}_r}^2 = -1$. В этом случае $\exp \pi \xi = s_r$. Напомним, что *определяющим вектором* $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебры (комплексной алгебры Ли) называется любой ее полупростой элемент, который можно дополнить двумя нильпотентными элементами до стандартной $\mathfrak{sl}_2$ -тройки. Две $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебры в $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ сопряжены тогда и только тогда, когда их определяющие векторы сопряжены [5; теорема 8.1].

ЛЕММА 3. Пусть $\xi_1 \in \mathfrak{j}_1$, $\xi_2 \in \mathfrak{j}_2$ – S -характеристические элементы, $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3 \in \mathfrak{j}_3$. Тогда векторы ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 являются базисом касательной алгебры короткой SO_3 -подгруппы, содержащей триаду S . Любые два вектора из набора $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ сопряжены элементом из $N(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется, что $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$, $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$. Значит, указанные векторы порождают подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, изоморфную $\mathfrak{so}_3$. Пусть $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} H$, $H \subset G$ – связная подгруппа. Поскольку $[\mathfrak{m}_r, \mathfrak{m}_r] = \mathfrak{k}_r$, получаем, что собственные значения оператора $\operatorname{ad} \xi_1$ равны $0, \pm i$ и, возможно, $\pm 2i$. Следовательно, определяющий вектор подалгебры $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ (например, $2i\xi_1$) имеет собственные значения $0, \pm 2$ и, возможно, ± 4 . Стало быть, $H \subset G$ – короткая SO_3 -подгруппа. Она содержит элементы $s_1 = \exp \pi \xi_1$, $s_2 = \exp \pi \xi_2$, значит, и всю триаду S . Дальнейшее очевидно.

Геодезическую γ на X будем называть S -кратчайшей, если γ является кратчайшей относительно некоторой пары точек из S_X .

ЛЕММА 4. Пусть $\xi \in \mathfrak{j}_r$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) ξ – S -характеристический;
- 2) ξ – вектор скорости S -кратчайшей периода π ;
- 3) $2i\xi$ – определяющий вектор касательной алгебры комплексификации короткой SO_3 -подгруппы в G , содержащей триаду S .

Все S -характеристические элементы $N(S)$ -эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\xi \in \mathfrak{j}_1$. Пусть элемент ξ является S -характеристическим. Возьмем вектор скорости $\eta \in \mathfrak{j}_2$ любой кратчайшей относительно точек o_1, o_3 периода π . Тогда по лемме 2 вектор η – S -характеристический, и по лемме 3 векторы ξ и η сопряжены элементом из группы K_3 . Значит, ξ – вектор скорости некоторой кратчайшей относительно o_2, o_3 (периода π). Тем самым импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана. Импликации 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) очевидны.

Докажем последнее утверждение. Пусть ξ, η – S -характеристические элементы. Существует такой элемент $g \in N(S)$, что векторы $\xi, (\operatorname{Ad} g)\eta$ лежат в разных однородных компонентах относительно упомянутой выше $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -градуировки. По лемме 3 они $N(S)$ -сопряжены. Значит, это верно и для векторов ξ, η . Лемма 4 доказана.

Теперь доказательство основной теоремы очевидно. Существование непосредственно вытекает из лемм 2, 3, а единственность – из леммы 4 и [5; теорема 8.1].

Список литературы

- [1] E. B. Vinberg, *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 243–270. [2] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, М., 1995. [3] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981. [4] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964. [5] Е. Б. Дынкин, *Матем. сб.*, **30:2** (1952), 349–462.

А. Н. Минченко (A. N. Minchenko)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: minchenko@mccme.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
 Принято редколлегией
 31.07.2007