Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Петухов, Критерий аффинности фактора алгебраической группы по одномерной подгруппе, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:39:52

Критерий аффинности фактора алгебраической группы по одномерной подгруппе

А. В. Петухов

В работе доказано, что однородное пространство аффинной алгебраической группы G по одномерной унитарной подгруппе H аффинно тогда и только тогда, когда эта подгруппа не содержится ни в какой редуктивной подгруппе группы G .

Пусть G – аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, а H – ее замкнутая подгруппа. Хорошо известно, что однородное пространство G/H имеет каноническую структуру квазипроективного G -многообразия, однако остается открытым вопрос о том, для каких пар (G, H) оно аффинно. Ответ в случае редуктивной G был найден Й. Мацусимой [1] и выглядит так: G/H аффинно тогда и только тогда, когда H редуктивна. В работе [2] доказано, что G/H аффинно тогда и только тогда, когда G/H^u аффинно, где H^u – унитарный радикал H . Более того, легко показать, что если G/H^u аффинно, то и G/F аффинно для любой унитарной подгруппы $F \subset H^u$. Цель настоящей работы – определить, когда однородное пространство по одномерной унитарной группе H аффинно.

ТЕОРЕМА 1. *Однородное пространство G/H аффинной алгебраической группы G по одномерной унитарной подгруппе H аффинно тогда и только тогда, когда H не содержится ни в какой редуктивной подгруппе группы G .*

Пусть $A \supset B \supset C$ – алгебраические группы.

ЛЕММА 1 [3; с. 45]. *Если A/B и B/C аффинны, то и A/C аффинно.*

ЛЕММА 2. *Если A/B аффинно, то A/C аффинно тогда и только тогда, когда B/C аффинно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B/C аффинно, то и A/C аффинно по лемме 1. Если же A/C аффинно, то B/C тоже аффинно, так как является образом замкнутого C -инвариантного многообразия B при геометрическом факторе $A \rightarrow A/C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть H – алгебраическая подгруппа алгебраической группы G . *Сечением для действия $H : G$ называется подмногообразие, пересекающееся с каждой орбитой ровно один раз и с каждой компонентой связности группы G по неприводимому подмногообразию.*

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть $G = L \ltimes_\rho V$, где L – редуктивная группа с представлением $\rho : L \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Пусть h – унитарный элемент группы G , а H – минимальная алгебраическая подгруппа, его содержащая. Тогда либо существует элемент $h' \in L$, сопряженный h , либо существует сечение для действия $H : G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим h в виде $l \cdot v$, $l \in L$, $v \in V$. Возникает два случая.

1) Если $v \in \mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$, то существует $f \in V$ такой, что $h' = f^{-1}hf \in L$.

2) Если $v \notin \mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$, то существует гиперплоскость $V' \subset V$, содержащая $\mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$ и такая что $V = \langle v \rangle \oplus V'$. Покажем, что $K = LV'$ (прообраз V' при отображении $G \rightarrow L \setminus G$) – сечение действия $H : G$. Так как $\rho(l)$ сохраняет $\mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$, а на факторе $V/\mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$ действует тождественно, получаем действие $H : V/\mathrm{Im}(\rho(l) - \mathrm{Id})$ параллельными переносами. У него, очевидно, существует сечение, являющееся линейным подпространством; его прообраз мы и обозначим V' . Так как H действует на V/V' свободно и транзитивно, то прообраз нуля при отображении $G \rightarrow L \setminus G \rightarrow (L \setminus G)/V'$ будет сечением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Очевидно, что если существует редуктивная подгруппа S группы G , включающая H , то, так как S/H неаффинно (критерий Мацусимы), G/H тоже неаффинно (лемма 2). Осталось доказать, что если такой подгруппы S не существует, то фактор аффинен.

Доказательство будем вести индукцией по размерности унитарного радикала G^u группы G . Если $\dim G^u = 0$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $\dim G^u > 0$. Пусть L – максимальная редуктивная подгруппа группы G . Рассмотрим произвольный неединичный элемент h из H и его представление $h = l \cdot r$, где $l \in L$, а $r \in G^u$. Заметим, что L действует сопряжением на векторном пространстве $V = G^u / (G^u, G^u)$ и, в силу основной леммы, либо h сопряжен какому-то элементу h' , лежащему в $L \ltimes (G^u, G^u)$, либо существует сечение для действия H на $L \ltimes (G^u / (G^u, G^u))$ и, следовательно, на G . Во втором случае ограничение отображения факторизации $G \rightarrow G/H$ на сечение биективно и фактор гладок, а отсюда следует, что он аффинен. Вернемся теперь к первому случаю. Пусть H' – минимальная алгебраическая подгруппа, содержащая элемент h' . Тогда $G/H \cong G/H'$, однако $(L \ltimes (G^u / (G^u, G^u))) / L$ аффинно, а $(L \ltimes (G^u, G^u)) / H'$ аффинно по предположению индукции. По лемме 2 отсюда следует, что и G/H аффинно. Доказательство теоремы 1 завершено.

Приведем пример аффинного однородного пространства по одномерной подгруппе, не лежащей в радикале. Таковым будет фактор группы аффинных преобразований плоскости по подгруппе, порожденной векторным полем $y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

Таким образом, в случае одномерной унитарной H однородное пространство G/H аффинно тогда и только тогда, когда H не пересекается ни с какой редуктивной подгруппой из G . Можно показать, что это условие является необходимым для аффинности фактора по произвольной унитарной группе, но не является достаточным: соответствующий контрпример для двумерной унитарной подгруппы приведен в [4].

Автор выражает огромную благодарность И. В. Аржанцеву и Э. Б. Винбергу, без помощи и поддержки которых эта работа так никогда бы и не была опубликована.

Список литературы

- [1] Y. Matsushima, *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 205–218. [2] Y. Matsushima, A. Marimoto, *Bull. Soc. Math. France*, **88** (1960), 137–155. [3] F. D. Grosshans, *Algebraic homogeneous spaces and invariant theory*, Lecture Notes in Math., **1673**, Springer-Verlag, Berlin, 1997. [4] J. Winkelmann, *Math. Ann.*, **286**:1–3 (1990), 593–612.

А. В. Петухов (A. V. Petukhov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: petushok@mail.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией
31.07.2007