Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Максимов, Вероятностные структуры и вероятностные множества, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:35:07

Вероятностные структуры и вероятностные множества

В. М. Максимов

В последние 60 лет постоянно появляются исследования, в которых переосмысливаются и расширяются понятия случайности и вероятности [1]–[6]. Так, А. Н. Колмогоров предложил связать понятие случайности объекта с алгоритмической сложностью его построения [1], см. также [2]. Другим важным аспектом случайности является ее “количественная” оценка. Начиная с П. Дирака [3] в физике стали рассматривать отрицательные и комплексные вероятности [4]. Позже в [5] была построена p -адическая квантовая механика, а в [6] – p -адическая теория вероятностей. В связи с этим в [7], [8] автором были введены алгебраические структуры, элементами которых можно оценивать меру случайности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\mathcal{P}$ называется *вероятностным множеством*, если в нем определены бинарная операция умножения с единицей **1** и неполная бинарная операция сложения, в которой есть нулевой элемент **0**, такие, что эти операции коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны и удовлетворяют условиям:

- 1) для любого $\alpha \in \mathcal{P}$ существует дополнительный элемент $\bar{\alpha}$, $\alpha + \bar{\alpha} = \mathbf{1}$;
- 2) для любого ненулевого элемента $\alpha \in \mathcal{P}$ сумма $\alpha + \dots + \alpha$ (k -раз) не определена начиная с некоторого $k = k(\alpha)$;
- 3) уравнение $x^2 = x$ в $\mathcal{P}$ имеет только два решения **0** и **1** (это условие мы называем условием Колмогорова).

Например, множество чисел, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, является вероятностным множеством относительно обычного сложения и умножения.

Свойства 1)–3) позволяют строить $\mathcal{P}$ -меры и случайные величины с $\mathcal{P}$ -распределением, сохраняя при этом естественные представления о вероятности, такие как свойство неразложимости нуля ($\alpha + \beta = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \mathbf{0}$) и свойство недополняемости до единицы, т. е. сумма $\mathbf{1} + \alpha$ не определена в $\mathcal{P}$ для $\alpha \neq \mathbf{0}$. Кроме того, свойство 2) позволяет показать (см. [8]), что если $\alpha \neq \mathbf{0}$, то и $\alpha^2 \neq \mathbf{0}$, а свойство 3) обеспечивает выполнение закона нуля или единицы (см. [9]) для сумм независимых случайных величин с $\mathcal{P}$ -распределением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\mathbb{P}$ называется *вероятностной структурой*, если в нем определены бинарная операция умножения с единицей **1** и неполная бинарная операция сложения, в которой есть нулевой элемент **0**, такие, что эти операции коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны и удовлетворяют условиям:

- 1) для любого $\alpha \in \mathbb{P}$ существует дополнительный элемент $\bar{\alpha}$, $\alpha + \bar{\alpha} = \mathbf{1}$;
- 2а) для любого ненулевого элемента $\alpha \in \mathbb{P}$ сумма $\mathbf{1} + \alpha$ не определена в $\mathbb{P}$.

В вероятностной структуре также имеет место неразложимость нуля; действительно, если $\alpha + \beta = \mathbf{0}$, то, прибавляя к обеим частям $\bar{\beta}$, получим $(\alpha + \beta) + \bar{\beta} = \alpha + (\beta + \bar{\beta}) = \alpha + \mathbf{1} = \bar{\beta}$, что противоречит свойству 2а), если $\alpha \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\alpha = \beta = \mathbf{0}$.

Нетрудно показать (см. [8]), что из 2) следует 2а), т. е. каждое вероятностное множество является и вероятностной структурой. Однако вероятностная структура может не удовлетворять как условию 2), так и условию 3).

ТЕОРЕМА 1. *Существуют вероятностные структуры с условием Колмогорова, которые не являются вероятностным множеством*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$, состоящее из всех конечных сумм полиномов вида $x^{v_0}(1-x)^{v_1} \dots (1-nx)^{v_n}$, $v_i = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, от действительного переменного x и из функции $\mathbf{0} = 0(x) \equiv 0$. Множество $\mathcal{F}$ содержит тождественную единицу $\mathbf{1} = 1(x) \equiv 1$, и каждый образующий полином имеет

в $\mathcal{F}$ дополнительный до $\mathbf{1}$ элемент, который равен $P(x) + x^{v_0} \cdots (1 - nx)^{v_n-1} nx$, где $P(x)$ есть дополнительный элемент для образующего полинома $x^{v_0}(1 - x)^{v_1} \cdots (1 - (n-1)x)^{v_{n-1}}(1 - nx)^{v_n-1}$ в $\mathcal{F}$. Следовательно, $P(x)$ находится по индукции. Теперь рассмотрим множество $\mathbb{P}$ тех элементов из $\mathcal{F}$, которые можно дополнить до единицы $\mathbf{1} = 1(x)$ в $\mathcal{F}$. Умножение и сложение в $\mathbb{P}$ наследуются из $\mathcal{F}$. Сумма $\mathbf{1} + \alpha(x)$ для ненулевого α в $\mathbb{P}$ не определена. Действительно, если допустить, что $\mathbf{1} + \alpha(x) = \beta(x) \in \mathbb{P}$, то, прибавляя к обеим частям $\bar{\beta}(x)$ и учитывая ассоциативность, получим $(\mathbf{1} + \alpha(x)) + \bar{\beta}(x) = \mathbf{1} + \gamma(x) = \mathbf{1}$. Очевидно, что каждый элемент $f(x)$ из $\mathcal{F}$ в некоторой окрестности интервала $(0, \varepsilon_f)$, $\varepsilon_f > 0$, больше нуля, что противоречит равенству $\mathbf{1} + \gamma(x) = \mathbf{1}$. Итак, $\gamma(x) = \mathbf{0}$. По тем же соображениям имеем $\alpha(x) = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbb{P}$ есть вероятностная структура. С другой стороны, для элемента $\alpha = x$ сумма $\alpha + \cdots + \alpha = nx$ определена в $\mathbb{P}$ вместе с $1 - nx$ для любого n . Следовательно, $\mathbb{P}$ не обладает свойством 2). Из $f^2 = f \in \mathcal{F}$ следует, что $f(x) \equiv 1$ или $f(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Известно, что с каждым булеаном (т. е. множеством подмножеств некоторого множества M) связаны ассоциативная решетка и булева алгебра. Аналогично, с каждым булеаном $\mathcal{B}$ можно связать и вероятностную структуру $\mathbb{P}(\mathcal{B})$. Элементами $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ являются множества из $\mathcal{B}$ с умножением $A \cdot B = A \cap B$ и сложением $A + B = A \cup B$, которое определено, только если $A \cap B = \emptyset$. При этом $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{1} = M$ и $\bar{A} = M \setminus A$. Если $\mathcal{B}$ содержит более двух элементов, то $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ не является вероятностным множеством, так как $A^2 = A$ для любого $A \in \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 2. *Каждая конечная вероятностная структура $\mathbb{P}$ является вероятностной структурой конечного булеана.*

Идея доказательства состоит в следующем. Из конечности вероятностной структуры $\mathbb{P}$ выводится разложение единицы: $\mathbf{1} = e_1 + \cdots + e_s$, где e_i — ортогональные идемпотенты, т. е. $e_i e_j = \mathbf{0}$, $e_i^2 = e_i$. Элементами $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ будут все суммы $e_{i_1} + \cdots + e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s$, а соответствующий булеан $\mathcal{B}$ состоит из подмножеств множества $\{e_1, \dots, e_s\}$.

Таким образом, всякое конечное вероятностное множество состоит из двух элементов $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$.

Что касается компактного вероятностного множества, то весьма правдоподобна гипотеза о том, что оно изоморфно отрезку $[0, 1]$ с естественными операциями и топологией.

Автор выражает благодарность О. В. Вискову, Э. Л. Пресману, А. М. Стёпину и А. Ю. Хренникову за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, *Избранные труды*, Т. 3, *Теория информации и теория алгоритмов*, Наука, М., 2005. [2] R. L. Solomonoff, *Information and Control*, **7**:1 (1964), 1–22. [3] P. A. M. Dirac, *Rev. Modern Phys.*, **17**:2–3 (1945), 195–199. [4] R. P. Feynman, *Quantum implications*, Routledge and Kegan Paul, London, 1987, 235–248. [5] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994. [6] А. Ю. Хренников, *Неархимедов анализ и его приложения*, Физматлит, М., 2003. [7] V. M. Maximov, *Foundations of probability and physics*, QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **13**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, 257–273. [8] V. M. Maximov, *Foundations of probability and physics* – 4, AIP Conf. Proc., **889**, eds. G. Adenier, C. Fuchs, A. Yu. Khrennikov, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2007, 353–361. [9] А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*, Наука, М., 1974.

В. М. Максимов (V. M. Maksimov)

Российский государственный гуманитарный университет;

Тверской государственный университет

E-mail: vm_maximov@mail.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

31.07.2007